Primer parcial de Ecuaciones Diferenciales.

27 de setiembre de 2014.

No. parcial	Apellido y nombre	Firma	Cédula

En todos los casos se deben justificar las respuestas, haciendo referencia a los resultados utilizados.

1. *a*) Enunciar el teorema de salida de compactos.

   b) Se considera la ecuación diferencial $x' = t - e^x$.

      i) Mostrar que el gráfico de toda solución maximal corta a la curva $t = e^x$. Sug: Puede ser útil estudiar la concavidad de las soluciones.

      ii) Probar que toda solución maximal tiene un mínimo y ningún máximo.

      iii) Probar que el intervalo maximal de definición de cualquier solución maximal es de la forma $(\alpha, +\infty)$ con $\alpha \in I\!R$. (Posible sugerencia: puede ser útil considerar la ecuación $x' = -e^x$)

2. Considere la ecuación $\ddot{x} = -x - k\dot{x}$ que modela el fenómeno de una partícula sometida a la fuerza de un resorte moviéndose en una superficie (unidimensional) con cierto grado de rozamiento dado por el coeficiente $k > 0$.

   a) Definiendo una variable auxiliar $y = \dot{x}$ se obtiene un sistema de dimensión dos. Hallar dicho sistema y probar que está en las condiciones de Picard.

   b) Estudiar los intervalos maximales de sus soluciones.

   c) Describir los diagramas de fase discutiendo según $k > 0$.

   d) Interprete los resultados de la parte anterior en referencia a la situación modelada (partícula, resorte, con rozamiento).

3. *a*) Sea X un conjunto finito. Probar que el conjunto de las funciones inyectivas en $\mathcal{B}(X, I\!R) = \{f : X \to I\!R,\ \text{acotadas}\}$ es abierto.

   b) Investigar si la respuesta de la parte anterior es la misma cuando consideramos el conjunto de las funciones inyectivas en $\mathcal{B}([0,1], I\!R) = \{f : [0,1] \to I\!R,\ \text{acotadas}\}$.