Primer parcial de Ecuaciones Diferenciales.

5 de octubre de 2013.

No. parcial	Apellido y nombre	Firma	Cédula

En todos los casos se deben justificar las respuestas, haciendo referencia a los resultados utilizados.

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función de clase C^1 tal que existe un número real $K > 0$ tal que $\{||f(x)|| : x \in \mathbb{R}^2\} \subset [-K, K]$. Se considera la ecuación diferencial $x' = f(x)$.

   a) Demostrar que las soluciones están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$ (si su respuesta se basa en algún ejercicio del práctico, deberá resolverlo).

   b) Sean $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tales que $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Bosquejar las soluciones sabiendo que:

   - Si $x \le -1$, entonces
   $$Sg(f_2(x, y)) = Sg(y),\ f_1(x, y) \ge 0,\ f_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = -1;$$
   - Si $|x| < 1$, entonces
   $$f_1(x, y) > 0,\ Sg(f_2(x, y)) = -Sg(x).Sg(y);$$
   - Si $x \ge 1$, entonces
   $$f_1(x, y) \le 0,\ f_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 1,\ Sg(f_2(x, y)) = -Sg(y).$$

   c) Demostrar que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ no es una transformación lineal.

2. Se considera la ecuación $x' = 3t^2 \cos(x - t^3)$.

   a) Mostrar que existe una única solución al problema de valores iniciales.

   b) Encontrar soluciones de la forma $x(t) = at^3 + b$.

   c) Deducir que toda solución está definida para todo tiempo $t \in \mathbb{R}$.

   d) Mostrar que si $x_1(t)$ es solución, entonces $x_2(t) = x_1(t) + 2k\pi$ es solución para todo $k \in \mathbb{Z}$.

   e) Hallar el lugar de los puntos críticos de las soluciones y clasificarlos.

   f) Esbozar el gráfico de las soluciones de la ecuación.

3. *a*) Consideremos $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ el espacio de las funciones acotadas con la norma del supremo. Sea X el conjunto de las funciones crecientes. Probar que X no es abierto en $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$.

   b) El conjunto X de la parte antrior, ¿es cerrado en $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$?

   c) Sea $\mathcal{C}^1[a, b]$ el espacio vectorial de las funciones de clase C^1 (derivada continua) en $[a, b]$ con la norma $\|f\|_1 = \sup_{x\in[a,b]}(|f(x)| + |f'(x)|)$. Sea D el conjunto de las funciones de $f \in \mathcal{C}^1[a, b]$ tales que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Probar que D es abierto en $\mathcal{C}^1[a, b]$.