Primer parcial Ecuaciones Diferenciales.

1 de octubre de 2011.

No. Parcial	Apellido y nombre	Firma	Cédula

1. *a*) Enunciar el teorema de Picard.
   b) Se considera la ecuación $x' = Ax$, siendo A una matriz $n \times n$.
      i) Admitiendo el teorema de Picard, demostrar que el conjunto solución de esta ecuación forma un espacio vectorial de dimensión n.
      ii) Demostrar que el intervalo maximal es $\mathbb{R}$.
   c) Dibujar el diagrama de fase y estudiar la estabilidad de las órbitas del sistema para
   $$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Dada la ecuación $x' = \operatorname{sen} x$.
   a) Dibujar (en $\mathbb{R}$) el diagrama de fase.
   b) Demostrar que todas sus órbitas tienen intervalo maximal $\mathbb{R}$.

3. Sea $\begin{cases} \dot{x} = y - x \\ \dot{y} = 2xy - 2x^2 \end{cases}$
   a) Determinar $n \in \mathbb{N}$ para que $H(x, y) = y - x^n$ sea una preintegral.
   b) Hallar los puntos de equilibrio.
   c) Estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio.

Recordar:
Lema de Gronwall: Sean u y v funciones continuas y no negativas en el intervalo $[a, b]$ tales que, para $\alpha \geq 0$, satisfacen,
$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t v(s)u(s)\, ds, \quad t \in [a, b].$$
Entonces,
$$u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s)\, ds}.$$