Primer parcial de Ecuaciones Diferenciales.

30 de setiembre de 2010.

No. parcial	Apellido y nombre	Firma	Cédula

En todos los casos se deben justificar las respuestas, haciendo referencia a los resultados utilizados.

1. *a*) Se considera la ecuación diferencial $\dot{x} = e^{x^4}$ en la recta real $\mathbb{R}$.
   1) Probar que $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ es una solución si y solo si la función $\psi(t) = -\varphi(-t)$ definida en $(-b,-a)$ también es solución.
   2) Deducir que la solución maximal φ_0 para la condición inicial $x(0) = 0$ está definida sobre un intervalo simétrico.
   3) Comparando con la ecuación $\dot{x} = x^2$ deducir que dicho intervalo es un intervalo acotado $(-a,a)$ y que $\varphi_0 : (-a,a) \to \mathbb{R}$ es biyectiva.
   4) Demostrar que la solución maximal para una condición inicial arbitraria (t_0, x_0) es la función
   $$\varphi(t,t_0,x_0) = \varphi_0(t - t_0 + \varphi_0^{-1}(x_0)),$$
   que está definida en el intervalo
   $$(t_0 - \varphi_0^{-1}(x_0) - a, t_0 - \varphi_0^{-1}(x_0) + a).$$

   b) Se considera una perturbación de la ecuación anterior dada por $\dot{x} = e^{x^4} + \epsilon$, con $\epsilon \in \mathbb{R}$. Discutir según el valor de ϵ si el intervalo maximal de la solución con condición inicial $x(0) = 0$ es acotado o no.

2. *a*) Probar que el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas es continuo.

   b) Demuestre que $f_n(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \text{sen } (ix)/i^2$ converge uniformemente en R.

   c) Si $f(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \text{sen } (ix)/i^2$, demostrar que f es continua y que además se cumple
   $$\int_0^{\pi} f(x)dx = 2\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(2i-1)^3}.$$
   Enunciar los resultados teóricos utilizados.