

# Primer parcial de Ecuaciones Diferenciales.

1 de octubre de 2009.

No. parcial	Apellido y nombre	Firma	Cédula

**En todos los casos se deben justificar las respuestas, haciendo referencia a los resultados utilizados.**

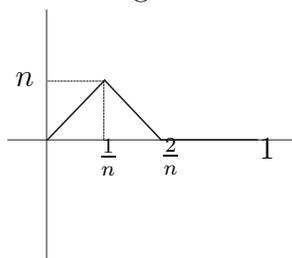
1. (12 puntos) Sea  $\varphi$  la solución maximal del problema

$$\begin{cases} y' = t/y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- a) Demostrar sin hallar  $\varphi$  que  $\varphi(t) > |t|$  para todo  $t$  en el dominio de  $\varphi$ .  
Sug: encontrar las soluciones lineales de la ecuación diferencial.
- b) Hallar  $\varphi$ .

2. (8 puntos) Sea  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por la figura 1

Figura 1:



- a) Demostrar que  $f_n \rightarrow 0$  (puntualmente).
- b) Probar que  $\lim \int_0^1 f_n \neq \int_0^1 \lim f_n$ .
- c) Concluir que  $f_n \not\rightarrow 0$ .
3. (12 puntos) Se considera la ecuación diferencial

$$\dot{x} = x - x^3.$$

- a) Enunciar el teorema de Picard y verificar sus hipótesis para la ecuación planteada.
- b) Halla las soluciones constantes (también llamadas puntos de equilibrio). Bosquejar las soluciones con con condición inicial  $(1, 2)$  y  $(1, 1/2)$ , describiendo, en la medida de lo posible, el intervalo maximal de definición de cada solución.
4. (8 puntos)
- a) Definir espacio métrico completo.
- b) Probar que si  $M$  es un espacio métrico completo y  $F \subset M$  es cerrado, entonces  $F$  es completo.