Primer parcial Ecuaciones Diferenciales.

3 de octubre de 2008.

No. Parcial	Apellido y nombre	Firma	Cédula

1. (13 puntos) Sea $A \in M_{2\times 2}(R)$ una matriz y la ecuación $\dot{x} = Ax$.

   (a) Probar que si $\lambda = a + ib$ es valor propio de A entonces existen $u, v \in R^2$ no nulos tales que

   $$e^{At}u = e^{at}(cos(bt)u + sen(bt)v) \ \text{ y } \ e^{At}v = e^{at}(cos(bt)v - sen(bt)u). \text{ (4 puntos)}$$

   (b) Mostrar que si $0 \in R^2$ es estable entonces todo valor propio λ de A verifica $Re(\lambda) \leq 0$. (4 puntos)

   (c) Sea la matriz

   $$A = \begin{pmatrix} -21 & 9 \\ -49 & 21 \end{pmatrix}.$$

   Estudiar la estabilidad de las soluciones de $\dot{x} = Ax$ (5 puntos).

2. (13 puntos) Sea la siguiente matriz

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcular e^{At}. (6 puntos)

   (b) Resolver completamente el sistema $\dot{x} = Ax$. (3 puntos)

   (c) Dibujar la solución $x(t)$ con $x(0) = (0, 1, 0)$ y estudiar la estabilidad. (4 puntos)

3. (14 puntos) Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones tal que $f_n : X \to \mathbf{R}$ para todo n.

   (a) Definir convergencia puntual y uniforme para $\{f_n\}$. (2 puntos)

   (b) Probar que sí f_n es continua $\forall n$ y $\{f_n\}$ converge uniformemente a una función f, entonces f es continua. (4 puntos)

   (c) Demostrar que la sucesión de funciones

   $$f_n : [0, 1] \to R \ \text{ tal que } \quad f_n(x) = n(1 - x)x^n$$

   no converge uniformemente, pero si puntualmente. (4 puntos)

   (d) Sea $g : [0, 1] \to R$ una función continua tal que $g(1) = 0$. Demostrar que la sucesión

   $$h_n : [0, 1] \to R \ \text{ tal que } \quad h_n(x) = g(x).f_n(x)$$

   es uniformemente convergente (en $[0, 1]$). (4 puntos)