Universidad de la República **Geometría y Álgebra Lineal 1 - Anual**
Facultad de Ingeniería **Curso 2015**
Instituto de Matemática y Estadística

Segundo Parcial
24 de Noviembre

Ejercicio 1 (13 puntos)
Sea $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $f(t^2+t-1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $f(t+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(t^2-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $f(2t^2+t-2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. ¿Existe una transformación lineal en estas condiciones?. Justificar.
2. En caso afirmativo hallar su expresión $f(at^2+bt+c)$.
3. Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[t]$ transformación lineal, $\mathcal{B}_1 = \{(1,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$, $\mathcal{B}_2 = \{t^2+t-1, t+1, t^2-1\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{P}_2[t]$ respectivamente.
$$_{\mathcal{B}_2}[g]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Determinar en caso de ser posible la matriz asociada a $f \circ g$ y/o $g \circ f$ en ciertas bases. Justificar.
4. Hallar $N(f \circ g)$ e $Im(f \circ g)$ y una base de los mismos.

Ejercicio 2 (8,5 puntos)
1. Definir subespacio vectorial.
2. Sea V espacio vectorial, $v_0 \in V$, se define $\{v_0\}^\perp = \{v \in V : \langle v, v_0\rangle = 0\}$.
¿Es $\{v_0\}^\perp$ un subespacio vectorial? Justificar.
3. Sea $V = \mathbb{R}^3$, $v_0 = (1,-1,1)$
   a) Hallar $\{v_0\}^\perp$ y una base del mismo.
   b) Mostrar que $\mathbb{R}^3 = \{v_0\}^\perp \oplus [v_0]$.

Ejercicio 3 (8,5 puntos)
1. Sea $T : V \to W$ transformación lineal. Definir $\ker(T)$ e $Im(T)$
2. Se considera V espacio vectorial tal que $dim(V) = n$, sea $T : V \to V$ una transformación lineal que cumple que $T^2(v) = \vec{0}$ para todo $v \in V$.
Mostrar que:
   a) $Im(T) \subset \ker(T)$.
   b) $\dim(Im(T)) \leq n/2$.
   c) Probar o refutar:
      1) ¿Es T un isomorfismo? Justificar.
      2) $\ker(T^2) \subset Im(T)$.