MS de Polos Salientes $e \neq cte.$

f.m.m. de entrehierro → campo $H(\theta,t)$, puramente radial en el entrehierro

$$\mathcal{E}(\theta,t) = H(\theta,t)\cdot e(\theta,t)$$

← entrehierro, variable en θ y t

Con un entrehierro que no es más constante, el valor de $e = e(\theta,t)$ dependerá de cada posición θ, y del tiempo t. La idea básica es elegir un referencial donde la expresión de $e(\theta,t)$ se simplifique.

$$H(\theta,t) = \frac{\mathcal{E}(\theta,t)}{e(\theta,t)}$$

$$B(\theta,t) = \mu_0 H(\theta,t) = \frac{\mu_0}{e(\theta,t)}\cdot \mathcal{E}(\theta,t)$$

definición $p(\theta,t) \overset{df}{=} \dfrac{\mu_0}{e(\theta,t)}$ = "permeancia del entrehierro por unidad de superficie"

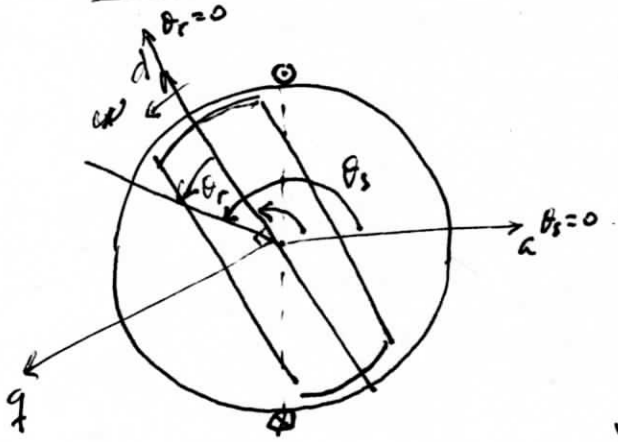
$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu\cdot S} \quad = \text{definición de reluctancia}$$

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{\mu\cdot S}{l} \quad = \text{definición de permeancia}$$

$$\frac{\mathcal{P}}{S} = \frac{\mu}{l} = \text{"Permeancia por unidad de superficie"}$$

$$\Rightarrow \boxed{B(\theta,t) = p(\theta,t)\cdot\mathcal{E}(\theta,t)}$$

inducción magnética en el entrehierro, supuesta puramente radial.



Elegimos un referencial fijo en el rotor y tal que $\theta_r = 0$ coincide con el eje d (eje longitudinal del rotor).

$$\theta_s = \theta_r + \alpha(t)$$

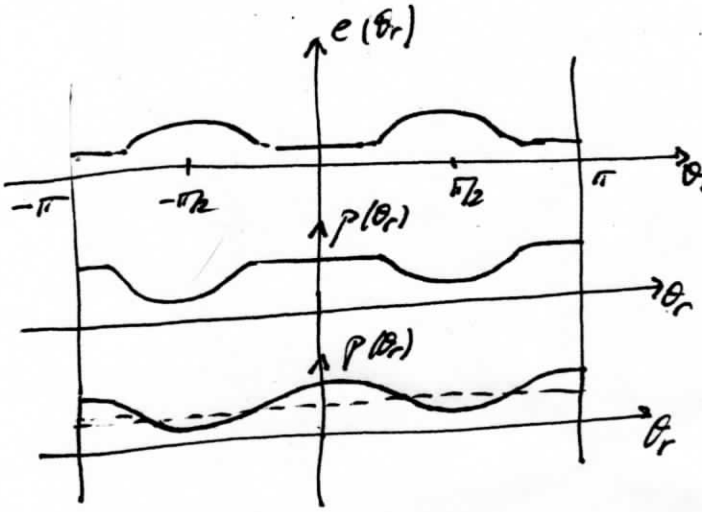
$$\alpha(t) = \Omega_s t + \alpha_0$$

$\Omega_s = \omega$ velocidad de sincronismo

de esta forma $e(\theta,t) = e(\theta_r)$

(el referencial del rotor gira a vel. sincronismo)

respecto del rotor, el entrehierro no depende de t



$$\rho(\theta_r) = \frac{\mu_0}{e(\theta_r)}$$

$$\rho(\theta_r) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{2k} \cos 2k\theta_r$$

desarrollo en cos pares con valor medio $\neq 0$

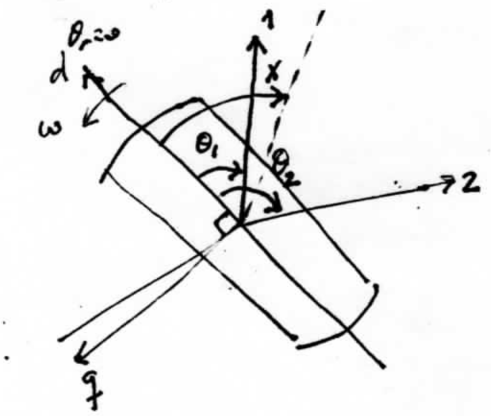
Aprox:

$$\boxed{\rho(\theta_r) = P_0 + P_2 \cos 2\theta_r}$$

Despreciando términos de orden superior.

Obs: A pesar de entrehierro no constante, se seguirá asumiendo que el campo magnético es <u>radial</u>.

A continuación analizaremos la situación de 2 bobinas, bobina 1 y bobina 2, situadas indistintamente en el rotor o en el estator.



Observar que los ejes de simetría (ejes de flujo) de esas bobinas, caracterizados por los ángulos θ_1 y θ_2, mientras que la posición de un punto genérico del entrehierro estará caracterizada por el ángulo x.

Obs. que al tomar ref. en el rotor, los ángulos θ_1 y θ_2 son o bien ctes (si bobinas fijas al rotor), ó crecientes en sentido trigonométrico (o sea decrecientes).

Lo mismo para x.

→ F.m.m. de entrehierro y campo magnético creado por la <u>bobina 1</u>

<u>Hip</u>: Bobina 1 con distribución sinusoidal de (espiras / conductores).

<u>Hip</u> → $2N_1$ espiras, distribuidas sinusoidalmente.

$$\mathcal{E}_1(x,t) = N_1\, i_1(t) \cos(x-\theta_1)$$

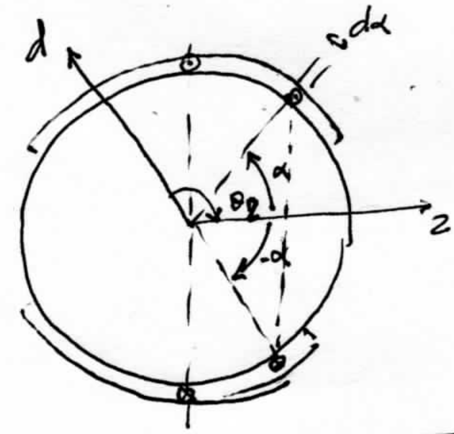
$$B_1(x,t) = p(x)\cdot \mathcal{E}(x,t) = N_1 i_1 \cos(x-\theta_1)\left[P_0 + P_2 \cos 2x\right]$$

$$B_1(x,t) = N_1 i_1 \Big[P_0 \cos(x-\theta_1) + P_2 \underbrace{\cos(x-\theta_1)\cos 2x}_{=\ \frac{1}{2}\left[\cos(3x-\theta_1) + \cos(x+\theta_1)\right]} \Big]$$

$$\boxed{B_1(x,t) = N_1 i_1 \Big[P_0 \cos(x-\theta_1) + \frac{1}{2} P_2 \cos(x+\theta_1) + \frac{1}{2} P_2 \cos(3x-\theta_1) \Big]}$$

→ Cálculo del flujo que atraviesa el bobinado 2, del campo magnético creado por la bobina 1.

<u>Hip</u>. Bobina 2, con $2N_2$ espiras, distribuidas sinusoidalmente



$$N_2(\alpha) = N_2 \sin\alpha$$

Consideramos una "espira" ficticia comprendida entre $-\alpha + d\alpha$ y $\alpha - d\alpha$. Esta espira es de paso 2α (aprox) despreciando $d\alpha \ll \alpha$.

La espira ficticia tiene $N_2(\alpha)d\alpha$ "conductores".

$$\boxed{d\Psi_{21} = N_2(\alpha)\, d\alpha \int_{\theta_2-\alpha}^{\theta_2+\alpha} L R\, B_1(\gamma,t)\, d\gamma}$$

Flujo enlazado por $N_2(\alpha)d\alpha$ "espiras" entre $-\alpha$ y $+\alpha$, simétricos respecto al eje de la bobina 2 situado a θ_1 de la referencia d.

$$d\Psi_{21} = N_2(\alpha)\,d\alpha \cdot LR\,N_1 i_1 \int_{\theta_2-\alpha}^{\theta_2+\alpha} \left[P_0 \cos(x-\theta_1) + \tfrac{1}{2} P_2 \cos(x+\theta_1) + \tfrac{1}{2} P_2 \cos(3x-\theta_1) \right] dx$$

$$d\Psi_{21} = LR\,N_1 N_2(\alpha)\, i_1\, d\alpha \Big[\int_{\theta_2-\alpha}^{\theta_2+\alpha} P_0 \cos(x-\theta_1)\,dx + \int_{\theta_2-\alpha}^{\theta_2+\alpha} \tfrac{1}{2} P_2 \cos(x+\theta_1)\,dx + \int_{\theta_2-\alpha}^{\theta_2+\alpha} \tfrac{1}{2} P_2 \cos(3x-\theta_1)\,dx \Big]$$

$$\int_{\theta_2-\alpha}^{\theta_2+\alpha} \cos(x-\theta_1)\,dx = \sin(\theta_2-\theta_1+\alpha) - \sin(\theta_2-\theta_1-\alpha) = 2\cos(\theta_2-\theta_1)\sin\alpha$$

$$\int_{\theta_2-\alpha}^{\theta_2+\alpha} \cos(x+\theta_1)\,dx = \sin(\theta_2+\theta_1+\alpha) - \sin(\theta_2+\theta_1-\alpha) = 2\cos(\theta_2+\theta_1)\sin\alpha$$

$$3\int_{\theta_2-\alpha}^{\theta_2+\alpha} \cos(3x-\theta_1)\,dx = \sin(3\theta_2-\theta_1+3\alpha) - \sin(3\theta_2-\theta_1-3\alpha) = 2\cos(3\theta_2-\theta_1)\sin 3\alpha.$$

$$\Rightarrow \boxed{d\Psi_{21} = LR\,N_1 N_2(\alpha)\, i_1\, d\alpha \Big[2P_0 \cos(\theta_2-\theta_1)\sin\alpha + P_2\cos(\theta_2+\theta_1)\sin\alpha + \tfrac{1}{3} P_2 \cos(3\theta_2-\theta_1)\sin 3\alpha \Big]}$$

luego $\boxed{\Psi_{21} = \int_{\alpha=-\pi/2}^{\alpha=\pi/2} d\Psi_{21}(\alpha,t)\,d\alpha}$ con $N_2(\alpha) = N_2 \sin\alpha$

$$\Psi_{21} = L R N_1 i_1 N_2 \Big[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 \mathcal{P}_0 \cos(\theta_2-\theta_1) \sin^2\alpha \, d\alpha +$$

$$+ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathcal{P}_2 \cos(\theta_2+\theta_1) \sin^2\alpha \, d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathcal{P}_2 \cos(3\theta_2-\theta_1) \sin 3\alpha \sin\alpha \, d\alpha \Big]$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\alpha \, d\alpha = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \, d\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 3\alpha \sin\alpha \, d\alpha = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}\left[\cos 2\alpha - \cos 4\alpha\right] d\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Psi_{21} = \frac{\pi}{2} L R N_1 N_2 i_1 \left[2\mathcal{P}_0 \cos(\theta_2-\theta_1) + \mathcal{P}_2 \cos(\theta_2+\theta_1)\right]}$$

para bobinados 1 y 2 con distribución sinusoidal de espiras.

Si el bobinado 2 es concentrado ($\Rightarrow$ paso diametral $\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$)

$$N_2(\alpha) = \begin{cases} = N_2 & \text{si } \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} \\ \alpha = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \\ = 0 & \text{para todo otro } \alpha. \end{cases}$$

$$\Rightarrow d\Psi_{21} = L R N_1 N_2 i_1 \, d\alpha \Big[2\mathcal{P}_0 \cos(\theta_2-\theta_1) \sin\alpha +$$

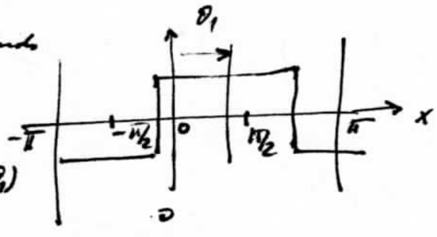
$$+ \mathcal{P}_2 \cos(\theta_2+\theta_1) \sin\alpha +$$

$$+ \frac{1}{3} \mathcal{P}_2 \cos(3\theta_2-\theta_1) \sin 3\alpha \Big]$$

Fmm. de entrehierro y campo magnético creado por la bobina 1

Hip : Bobina 1 no distribuida, sino concentrada diametral $2N_1$ espiras.

$$\mathcal{E}_1(x,t) = \begin{cases} N_1 i_1(t) \\ -N_1 i_1(t) \end{cases} \leftarrow \text{onda cuadrada}$$



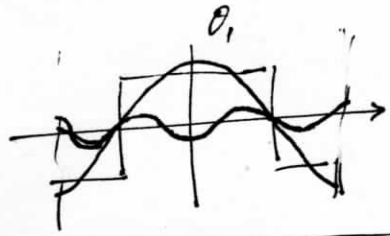
Fundamental $\mathcal{E}_{11}(x,t) = \frac{4}{\pi} N_1 i_1(t) \cos(x-\theta_1)$

En realidad va a poder desarrollarse en una serie de Fourier de cosenos impares

$$\mathcal{E}_1(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} N_1 i_1(t)\, a_{2k-1} \cos(2k-1)(x-\theta_1) \qquad \text{con } a_1 = 4/\pi$$

$$= N_1 i_1 \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} \cos(2k-1)(x-\theta_1)$$

$$= N_1 i_1(t) \left[a_1 \cos(x-\theta_1) + a_3 \cos(3x-3\theta_1) + \dots \right.$$



Hip : Si dejamos sólo el fundamental

$$\boxed{\mathcal{E}_{11}(x,t) = N_1 i_1 \cdot \frac{4}{\pi} \cos(x-\theta_1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{B_1(x,t) = \frac{4}{\pi} N_1 i_1(t) \left[P_0 \cos(x-\theta_1) + \frac{1}{2} P_2 \cos(x+\theta_1) + \frac{1}{2} P_2 \cos(3x-\theta_1) \right]}$$

Y quedaría todo igual, salvo que con un coef $\frac{4}{\pi}$ delante.

Si bobina 2 con distrib. sinusoidal de conductores:

$$\Rightarrow \psi_{21} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} L R N_1 N_2 i_1 \left[2P_0 \cos(\theta_2-\theta_1) + P_2 \cos(\theta_2+\theta_1) \right]$$

$$\boxed{\psi_{21} = 2 L R N_1 N_2 i_1 \left[2P_0 \cos(\theta_2-\theta_1) + P_2 \cos(\theta_2+\theta_1) \right]}$$

Bobina 1 diametral →
Bobina 2 distribuida sinusoidalmente.

F.m.m. de entrehierro y campo magnético creado por la bobina 1

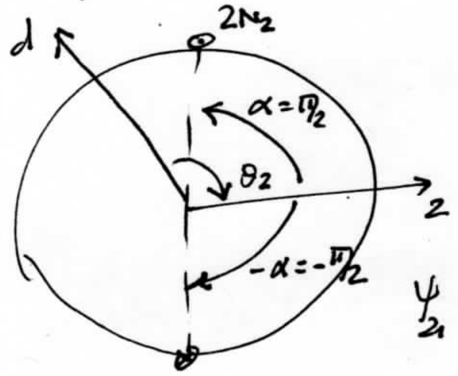
Hip. Bobina 1 distribuida sinusoidalmente

$$\boxed{B_1(x,t) = N_1 i_1 \left[P_0 \cos(x-\theta_1) + \frac{1}{2} P_2 \cos(x+\theta_1) + \frac{1}{2} P_2 \cos(3x-\theta_1) \right]}$$

(Cálculo anterior).

→ Cálculo del flujo que atraviesa el bobinado 2, del campo magnético creado por la bobina 1.

Hip Bobina 2, con $2N_2$ espiras, concentrada diametralmente



En el razonamiento anterior, el único valor posible de α es $\pi/2$

$$\psi_{21} = d\psi_{21} = 2N_2 \int_{\theta_2-\frac{\pi}{2}}^{\theta_2+\frac{\pi}{2}} LR\, B_1(x,t)\, dx$$

$$\Rightarrow \psi_{21} = 2N_2 LR \int_{\theta_2-\frac{\pi}{2}}^{\theta_2+\frac{\pi}{2}} N_1 i_1 \left[P_0 \cos(x-\theta_1) + \frac{1}{2} P_2 \cos(x+\theta_1) + \frac{1}{2} P_2 \cos(3x-\theta_1) \right] dx$$

$$\psi_{21} = 2LR N_1 N_2 i_1 \left[\int_{\theta_2-\frac{\pi}{2}}^{\theta_2+\frac{\pi}{2}} P_0 \cos(x-\theta_1)\, dx + \int_{\theta_2-\frac{\pi}{2}}^{\theta_2+\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} P_2 \cos(x+\theta_1)\, dx + \int_{\theta_2-\frac{\pi}{2}}^{\theta_2+\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} P_2 \cos(3x-\theta_1)\, dx \right]$$

$$\int_{\theta_2-\frac{\pi}{2}}^{\theta_2+\frac{\pi}{2}} B_0 \cos(x-\theta_1)\,dx = 2 B_0 \cos(\theta_2-\theta_1)\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}$$

$$\int_{\theta_2-\frac{\pi}{2}}^{\theta_2+\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} B_2 \cos(x+\theta_1)\,dx = 2\cdot\frac{1}{2} B_2 \cos(\theta_2+\theta_1)\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}$$

$$\int_{\theta_2-\frac{\pi}{2}}^{\theta_2+\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} B_2 \cos(3x-\theta_1)\,dx = \frac{1}{3}\,\frac{1}{2} B_2 \cdot 2\cos(3\theta_2-\theta_1)\underbrace{\sin\frac{3\pi}{2}}_{=-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi_{21} = 2 L R N_1 N_2\, i_1 \left[2 B_0 \cos(\theta_2-\theta_1) + B_2 \cos(\theta_2+\theta_1) - \frac{1}{3} B_2 \cos(3\theta_2-\theta_1)\right]}$$

Bobina 1 distribuida sinusoidalmente

Bobina 2 concentrada de paso diametral.

Hip.: Bobina 1 concentrada, paso diametral
Bobina 2 concentrada, paso diametral

De lo anterior:

$$\mathcal{E}_{11}(x,t) = \frac{4}{\pi} N_1 i_1 \cos(x-\theta_1)$$

$$B_1(x,t) = \frac{4}{\pi} N_1 i_1(t) \left[P_0 \cos(x-\theta_1) + \frac{1}{2} P_2 \cos(x+\theta_1) + \frac{1}{2} P_2 \cos(3x-\theta_1) \right]$$

Como la bobina 2 es concentrada:

$$\psi_{21} = 2 N_2 \int_{\theta_2 - \frac{\pi}{2}}^{\theta_2 + \frac{\pi}{2}} L R B_1(x,t)\, dx$$

$$\psi_{21} = \frac{4}{\pi} 2 L R N_1 N_2 i_1 \int_{\theta_2 - \frac{\pi}{2}}^{\theta_2 + \frac{\pi}{2}} \left[P_0 \cos(x-\theta_1) + \frac{1}{2} P_2 \cos(x+\theta_1) + \frac{1}{2} P_2 \cos(3x-\theta_1) \right] dx$$

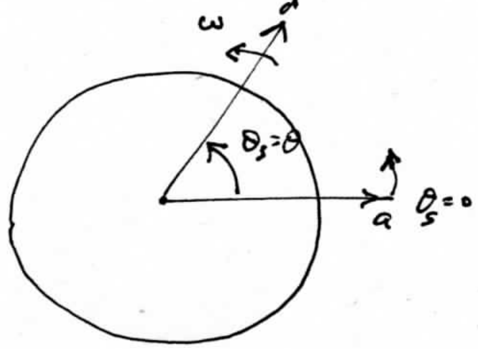
Por los cálculos anteriores:

$$\boxed{\psi_{21} = \frac{4}{\pi} 2 L R N_1 N_2 i_1 \left[2 P_0 \cos(\theta_2-\theta_1) + P_2 \cos(\theta_2+\theta_1) - \frac{1}{3} P_2 \cos(3\theta_2-\theta_1) \right]}$$

Ambas bobinas concentradas y de paso diametral.

Inductancias propias del estator

Fase a



$$N_1 = N_2 = N_s$$
$$i_1 = i_2 = i_a$$
$$\theta_1 = \theta_2 = -\theta_s \ (= -\theta)$$
por brevedad

Hip bobinado fase a distribuido sinusoidalmente

$$\psi_{aa} = \frac{\pi}{2} L R N_s^2 i_a \left[2P_0 \underbrace{\cos(\underbrace{\theta_2 - \theta_1}_{=0})}_{=1} + P_2 \cos(\underbrace{\theta_2 + \theta_1}_{=-2\theta_s}) \right]$$

$$\psi_{aa} = \frac{\pi}{2} L R N_s^2 i_a \left[2P_0 + P_2 \cos 2\theta \right]$$

$$L_{aa} = \frac{\psi_{aa}}{i_a} = \underbrace{\pi L R N_s^2 P_0}_{L_{s_0}} + \underbrace{\frac{\pi L R N_s^2 P_2}{2}}_{L_{sv}} \cos 2\theta$$

$$\boxed{L_{aa} = L_{s_0} + L_{sv} \cos 2\theta}, \quad \text{con} \quad \boxed{L_{sv} = \frac{1}{2} L_{s_0}}$$

Fase b : cambiar θ por $\theta - \frac{2\pi}{3}$

Fase c : " " " $\theta - \frac{4\pi}{3}$

$$\boxed{L_{bb} = L_{s_0} + L_{sv} \cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$\boxed{L_{cc} = L_{s_0} + L_{sv} \cos 2\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right)}$$

Obs: Si la MS fuese de polos lisos ($e = cte$) $\Rightarrow P_2 = 0 \Rightarrow L_{sv} = 0$ y las inductancias propias $L_{aa} = L_{bb} = L_{cc} = L_{s_0}$, independientes de θ

Inductancias mutuas del estator

$$N_1 = N_2 = N_3$$

fase a : bobina 2 $\Rightarrow i_2 = 0 \ , \ \theta_2 = -\theta$

fase b : " 1 $\Rightarrow i_1 = i_b \ , \ \theta_1 = -(\theta - \frac{2\pi}{3}) = -\theta + \frac{2\pi}{3}$

$$\Psi_{21} = \frac{\pi}{2} L R N_s^2 \, i_b \left[2 P_0 \underbrace{\cos\left(\cancel{-\theta} + \cancel{\theta} - \frac{2\pi}{3}\right)}_{\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}} + P_2 \underbrace{\cos\left(-\theta - \theta + \frac{2\pi}{3}\right)}_{\cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right)} \right.$$

$$L_{ab} = \frac{\Psi_{21}}{i_b} = \frac{\pi}{2} L R N_s^2 \left[-\frac{\cancel{2} P_0}{\cancel{2}} + P_2 \cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

$$L_{ab} = -\left(\frac{\pi L R N_s^2 P_0}{2}\right) + \frac{\pi L R N_s^2 P_2}{2} \cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\boxed{L_{ab} = M_{s0} + L_{sv} \cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right)} \quad \text{con} \quad \boxed{M_{s0} = -\frac{1}{2} L_{s0}}$$

Fases b y c, modificando los ángulos θ y las corrientes:

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} L_{ba} &= L_{ab} = M_{s0} + L_{sv} \cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ L_{bc} &= L_{cb} = M_{s0} + L_{sv} \cos 2\theta \\ L_{ca} &= L_{ac} = M_{s0} + L_{sv} \cos\left(2\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}}$$

Obs: Si la MS fuese de polos lisos ($e = cte$) $\Rightarrow P_2 = 0 \Rightarrow L_{sv} = 0$

y las inductancias mutuas:

$$L_{ba} = L_{ab} = L_{bc} = L_{cb} = L_{ca} = L_{ac} = M_{s0} = -\frac{1}{2} L_{s0}$$

y las inductancias cíclicas de estator:

$$\mathcal{L}_a = L_{aa} - L_{ab} = L_{s0} - \left(-\frac{1}{2} L_{s0}\right) = \frac{3}{2} L_{s0}$$

Inductancia propia del rotor

$N_1 = N_2 = N_r$

$i_1 = i_2 = i_r \; (= i_f)$

$\theta_1 = \theta_2 = 0$

Máq. polos salientes: "Bobina 1 y Bobina 2 concentradas diametrales"

$$\Psi_{21} = \frac{4}{\pi} 2LRN_r^2 i_r \underbrace{\left[2P_0 \underbrace{\cos(0)}_{1} + P_2 \underbrace{\cos(0+0)}_{1} - \frac{1}{3} P_2 \underbrace{\cos(90-0)}_{0}\right]}_{2P_0 + \frac{2}{3} P_2 = 2(P_0 + 2P_2)}$$

$$\Psi_{21} = \frac{16}{\pi} LRN_r^2 i_r \left(P_0 + 2P_2\right)$$

$$\boxed{L_{rr} = \frac{\Psi_{21}}{i_r} = \frac{16}{\pi} LRN_r^2 \left(P_0 + 2P_2\right)}$$

L_{rr} = cte, indep. de θ.

Si MS fuese de polos lisos (e=cte): "Bobina 1 y Bobina 2 distribuidas" (Se admitirá distribución sinusoidal)

$$\Psi_{21} = \frac{\pi}{2} LRN_1N_2 \, i_1 \left[2P_0 \cos(\underset{0}{\theta_2} - \underset{0}{\theta_1}) + P_2 \cos(\underset{0}{\theta_2} + \underset{0}{\theta_1})\right]$$

$$\Psi_{21} = \frac{\pi}{2} LRN_r^2 i_r \left[2P_0 + P_2\right]$$

$$\boxed{L_{rr} = \frac{\Psi_{21}}{i_r} = \frac{\pi}{2} LRN_r^2 \left[2P_0 + P_2\right]}$$

Inductancias Mutuas rotor - estator

Máq. polos salientes: "bobina 1 (rotor) concentrada y bobina 2 (estator) distribuida sinusoidalmente".

$$N_1 = N_r$$
$$N_2 = N_s$$
$$i_1 = i_r \; (= i_f)$$
$$\theta_1 = 0$$
$$\theta_2 = -\theta$$

$$\psi_{21} = 2LRN_1N_2 i_1 \left[2 P_0 \cos(\underset{-\theta}{\theta_2} - \underset{0}{\theta_1}) + P_2 \cos(\underset{-\theta}{\theta_2} + \underset{0}{\theta_1}) \right]$$

$$\psi_{21} = 2LRN_rN_s i_r \left[2P_0 + P_2 \right] \cos\theta$$

$$L_{ar} = \frac{\psi_{21}}{i_r} = \underbrace{2LR\, N_rN_s \left[2P_0 + P_2\right]}_{\overset{\text{def.}}{=}\; M_{rs}} \cos\theta$$

$$\boxed{\begin{aligned} L_{ar} &= M_{rs}\cos\theta \\ L_{br} &= M_{rs}\cos\left(\theta - \tfrac{2\pi}{3}\right) \\ L_{cr} &= M_{rs}\cos\left(\theta - \tfrac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}}$$

$$\boxed{M_{rs} = 2LRN_rN_s(2P_0 + P_2)}$$

(Polos salientes)

Si Máq es de rotor liso (e=cte): "bobinas 1 y 2 distribuidas"

$$\psi_{21} = \frac{\pi}{2} LRN_1N_2 i_1 \left[2P_0 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \overset{=0}{P_2} \cos(\theta_2 + \theta_1) \right]$$

$$\psi_{21} = \frac{\pi}{2} LRN_rN_s i_r \left[2P_0 \cos(-\theta) + \underset{0}{P_2} \cos(-\theta) \right]$$

$$L_{ar} = \frac{\psi_{21}}{i_r} = \frac{\pi}{2} LRN_rN_s \cdot 2P_0 \cos\theta = \pi LR\, N_rN_s P_0 \cos\theta$$

como $P_0 = \frac{\mu_0}{e}$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} L_{ar} &= M_{rs}\cos\theta \\ L_{br} &= M_{rs}\cos\left(\theta - \tfrac{2\pi}{3}\right) \\ L_{cr} &= M_{rs}\cos\left(\theta - \tfrac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}}$$

con $\boxed{M_{rs} = \mu_0 \left(\frac{\pi LR}{e}\right) N_rN_s}$

Inductancias mutuas estator – amortiguador eje d.

Es lo mismo que las inductancias mutuas entre bobinados de estator y el bobinado de excitación del rotor:

Sólo cambiando:

$$\begin{cases} N_1 = N_{kd} \\ i_1 = i_{kd} \end{cases}$$, quedan iguales: $N_2 = N_s$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = -\theta$ (para fase a)

Si MS es de polos salientes: (bobina 1 (amortiguador eje d) concentrada y bobina 2 (estator) distribuida sinusoidalmente)

Tenemos:

$$L_{ar} = M_{rs}\cos\theta \ , \quad \text{con } M_{rs} = 2LRN_rN_s(2P_0 + P_2)$$

Ahora será

$$\boxed{\begin{aligned} L_{akd} &= M_{kds}\cos\theta \ , \quad \text{con } M_{kds} = 2LRN_{kd}N_s(2P_0+P_2) \\ L_{bkd} &= M_{kds}\cos\left(\theta - \tfrac{2\pi}{3}\right) \\ L_{ckd} &= M_{kds}\cos\left(\theta - \tfrac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}}$$

Si MS es de rotor cilíndrico ($e = cte$), las expresiones anteriores son las mismas, sólo cambia

$$\boxed{M_{kds} = \mu_0 \frac{\pi L R}{e} \cdot N_{kd} N_s}$$

Inductancias mutuas estator - amortiguador eje q.

Es lo mismo que para el eje d, cambiando θ por $\theta + \frac{\pi}{2}$ y N_{kd} por N_{kq}

polos salientes

$$\boxed{\begin{aligned} L_{akq} &= M_{kqs}\cos\left(\theta + \tfrac{\pi}{2}\right) = -M_{kqs}\sin\theta \\ L_{bkq} &= M_{kqs}\cos\left(\theta + \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{2\pi}{3}\right) = -M_{kqs}\sin\left(\theta - \tfrac{2\pi}{3}\right) \\ L_{ckq} &= M_{kqs}\cos\left(\theta + \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{4\pi}{3}\right) = -M_{kqs}\sin\left(\theta - \tfrac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}}$$

$$M_{kqs} = 2LRN_{kq}N_s(2P_0 + P_2) \quad \text{(polos salientes)}$$

y $$M_{kqs} = \mu_0 \frac{\pi L R}{e} N_{kq} N_s \quad \text{(polos lisos)}$$

Inductancias propias y mutuas rotor-rotor

L_{rr} (ya calculado) : cte. como $f(\theta)$

L_{rkd} : (mutua excitación-amortiguador eje d) : es cte. como $f(\theta)$
→ ambas bobinas sobre eje d ⇒ $\begin{cases} \theta_1 = 0 \\ \theta_2 = 0 \end{cases}$

L_{kdkd} : (inductancia propia amortiguador eje d) : cte como $f(\theta)$
$\left(\begin{array}{l} \theta_1 = 0 \\ \theta_2 = 0 \end{array}\right)$

L_{kqkq} : (inductancia propia amortiguador eje q) : cte como $f(\theta)$
$\left(\begin{array}{l} \theta_1 = -\frac{\pi}{2} \\ \theta_2 = -\frac{\pi}{2} \end{array}\right)$

L_{kdkq} : (mutua entre amortig. eje d y amortig. eje q) $= 0 = L_{kqkd}$
(forman ángulo $= \frac{\pi}{2}$)

$L_{rkq} = L_{kqr} = 0$ (mutua entre bobinado de excitación del rotor y amortiguador eje q.
forman ángulo $= \frac{\pi}{2}$)

Cambio de notación: <u>bobinado de excitación</u>
notación f (field) en vez de r (rotor)

<u>Ecuaciones de flujos:</u>

$$
\begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \\ \psi_f \\ \psi_{kd} \\ \psi_{kq} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} & L_{af} & L_{akd} & L_{akq} \\
L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} & L_{bf} & L_{bkd} & L_{bkq} \\
L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} & L_{cf} & L_{ckd} & L_{ckq} \\
L_{fa} & L_{fb} & L_{fc} & L_{fd} & L_{fkd} & L_{fkq} \\
L_{kda} & L_{kdb} & L_{kdc} & L_{kdf} & L_{kd} & L_{kdkq} \\
L_{kqa} & L_{kqb} & L_{kqc} & L_{kqf} & L_{kqkd} & L_{kq}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_f \\ i_{kd} \\ i_{kq} \end{bmatrix}
$$

con

$$L_{aa} = L_{so} + L_{sv} \cos 2\theta$$
$$L_{bb} = L_{so} + L_{sv} \cos 2(\theta - \tfrac{2\pi}{3})$$
$$L_{cc} = L_{so} + L_{sv} \cos 2(\theta - \tfrac{4\pi}{3})$$

$$L_{ab} = L_{ba} = M_{so} + L_{sv} \cos (2\theta - \tfrac{2\pi}{3})$$
$$L_{bc} = L_{cb} = M_{so} + L_{sv} \cos 2\theta$$
$$L_{ca} = L_{ac} = M_{so} + L_{sv} \cos (2\theta - \tfrac{4\pi}{3})$$

$$L_{af} = L_{fa} = M_{rs} \cos\theta$$
$$L_{bf} = L_{fb} = M_{rs} \cos(\theta - \tfrac{2\pi}{3})$$
$$L_{cf} = L_{fc} = M_{rs} \cos(\theta - \tfrac{4\pi}{3})$$

$$L_{akd} = L_{kda} = M_{kds} \cos\theta$$
$$L_{bkd} = L_{kdb} = M_{kds} \cos(\theta - \tfrac{2\pi}{3})$$
$$L_{ckd} = L_{kdc} = M_{kds} \cos(\theta - \tfrac{4\pi}{3})$$

$$L_{akq} = L_{kqa} = -M_{kqs} \sin\theta$$
$$L_{bkq} = L_{kqb} = -M_{kqs} \sin(\theta - \tfrac{2\pi}{3})$$
$$L_{ckq} = L_{kqc} = -M_{kqs} \sin(\theta - \tfrac{4\pi}{3})$$

$$L_{fd} = L_{rr} = \text{cte.}$$
$$L_{kd} = \text{cte.}$$
$$L_{kq} = \text{cte.}$$

$$L_{fkd} = \text{cte} = k_{kdf}$$
$$L_{fkq} = L_{kqf} = 0$$
$$L_{kdkq} = L_{kqkd} = 0$$