2 formas de representar la t. física

1). $V_1(t) = V\sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi_1)$

$V_2(t) = V\sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi_1 - \frac{2\pi}{3})$

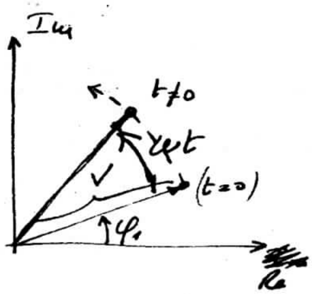
$$V_3(t) = V\sqrt{2}\,\underbrace{\cos(\omega t - \varphi_1 - \tfrac{4\pi}{3})}_{=\ \cos(\omega t - \varphi_1 + \frac{2\pi}{3})} =$$

Una notación consiste en trabajar en el plano de Fresnel.
(o diagrama de Fresnel).

$$v(t) = V\cos(\omega t + \varphi_1) = Re\left[V\left(\cos(\omega t + \varphi_1) + j\sin(\omega t + \varphi_1)\right)\right]$$

$$= Re\left[V e^{j(\omega t + \varphi_1)}\right]$$

$$= Re\ V e^{+j\varphi_1} \cdot e^{j\omega t}$$




En el plano complejo, esto representa, para

→ para $t=0$, un complejo de módulo V y argumento $+\varphi_1$

→ para $t \neq 0$, el mismo complejo precedente, girado respecto al origen de un ángulo $\omega t$ contado en el sentido trigonométrico positivo (antihorario).

La idea de Fresnel consiste, en la medida en que $\omega = cte$, en prescindir de la rotación de ángulo $\omega t$, que no aporta más información. Lo cual es equivalente a suponer que los ejes Real e Im. giran a velocidad $\omega t$, de forma tal que, en el plano de Fresnel a la magnitud real $v(t)$, de variación temporal sinusoidal, se le asocia un vector o número complejo, fijo en el plano de Fresnel, tal que $V(t) \rightarrow \vec{V} =$

$\cancel{\vec{V} = V}$

$$v(t) = V\cos(\omega t + \varphi_1) \longrightarrow \vec{V} = V e^{j\varphi_1}$$

Cuestiones de notación:

1) Aun cuando parezca secundario, vamos a hacer la precisión de notación siguiente:

$v(t)$ : magnitud real, de variación temporal cualquiera. En la gran mayoría de los casos será variación temporal sinusoidal

$$v(t) = V_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_1) = V_m \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$V_{eff} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \qquad V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,dt} \qquad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$2\pi f = \omega$$

$\left.\begin{array}{l} V_m \\ V_{eff} \end{array}\right\}$ Valores reales

$\bar{V}$ } valores complejos, representados por una barra superior (A veces, por brevedad, podemos suprimir la barra superior cuando no haya lugar a dudas).

$\vec{V}$ : Representación de Fresnel (o "fasorial"), es un complejo, pero representa la información completa sólo en el plano de Fresnel o bien sólo representa la información relativa a la fase de la magnitud sinusoidal respectiva.

2) Se pueden elegir dos formas de asociar el vector de Fresnel (o fasor) a una magnitud de variación temporal sinusoidal:

a) En valor de pico, o cresta (o máximo)

b) En valor eficaz.

$$\boxed{v(t)} = \begin{cases} \boxed{V\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_1) \longrightarrow \vec{V} = V e^{j\varphi}} \\ V_m \cos(\omega t + \varphi_1) \longrightarrow \vec{V} = V_m e^{j\varphi} = V\sqrt{2}\, e^{j\varphi}. \end{cases}$$

Nosotros vamos a preferir sistemáticamente la primera.

¿Por qué?

p.ej potencia:
$$v(t) = V\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_1)$$
$$i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_2)$$

in

$$p(t) = \text{potencia instantánea} = v(t)\, i(t)$$

potencia activa ("potencia") $= \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt$

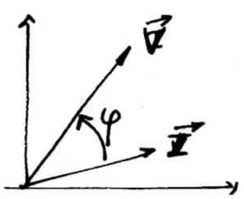
$$\underline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T 2\,V I \cos(\omega t+\varphi_1)\cdot\cos(\omega t+\varphi_2)\,dt$$

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a\sin b\\ \cos(a-b) &= \cos a\cos b + \sin a\sin b\end{aligned}$$

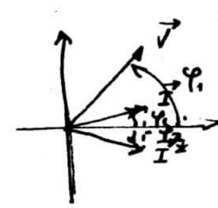
$$\cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cos a\cos b.$$

$$\underline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T V I\left[\cos(2\omega t+\varphi_1+\varphi_2)+\cos(\varphi_1-\varphi_2)\right]dt = V I\cos\underbrace{(\varphi_1-\varphi_2)}_{\varphi}$$

$$\underline{P} = Re(\vec{V}\cdot\vec{I}^{*})$$

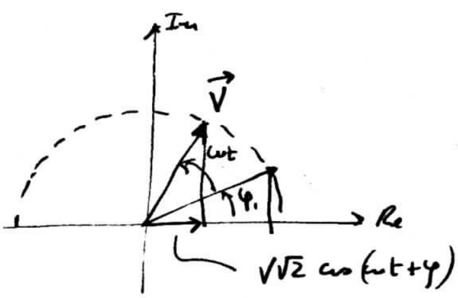



$$\vec{V}\cdot\vec{I}^{*} = V I\,\angle\,\varphi_1-\varphi_2$$

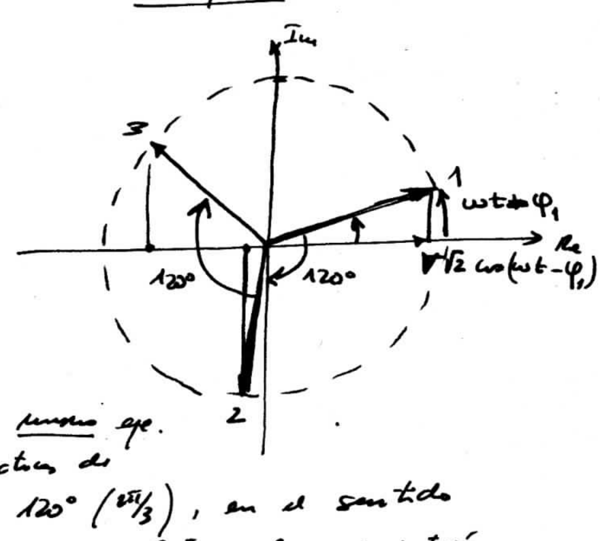



---

Ahora bien, hay una representación posible que asocia la magnitud real a su proyección sobre un eje (p.e. el eje real)

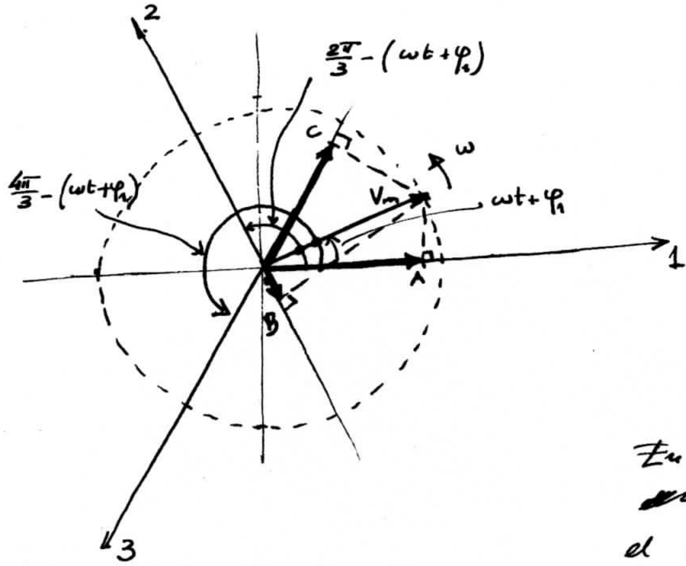



Caso trifásico.




Tomar las proyecciones sobre un mismo eje de tres vectores de módulo constante, desfasados de 120° ($2\pi/3$), en el sentido trigonométrico positivo, es totalmente equivalente a la representación en el diagrama de Fresnel. (La proyección no es otra cosa que la parte real del vector en cuestión, considerando como el vector asociado al afijo del complejo.

Otra posible representación del trifásico es tomar un vector de módulo constante que gira a velocidad angular constante.



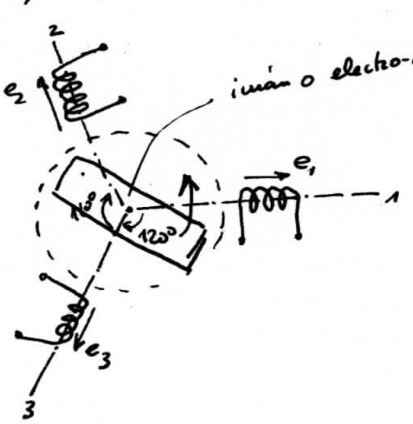

$$OA = V_m \cos(\omega t + \varphi_1)$$
$$OB = V_m \cos\left(\omega t + \varphi_1 - \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$OC = V_m \cos\left(\omega t + \varphi_1 - \frac{4\pi}{3}\right)$$

En la primera representación se observa que ~~el sentido de giro de los vectores~~ el orden de sucesión de los vectores asociado a cada una de las fases es 1-2-3 cuando se los recorre en el sentido horario (trigonométrico negativo).

En la segunda representación, el orden de sucesión de los ejes asociados a las fases es 1 3 2 cuando el vector rotante gira en el sentido trigonométrico positivo (antihorario), pero el observador ~~gira~~ recorre las fases en sentido horario (trigonométrico negativo). – (*)

---

Obsérvese que para obtener un sistema de tensiones trifásico equilibrado directo de tensiones $\left.\begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}\right\}$ trif. eq. direct.

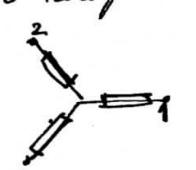


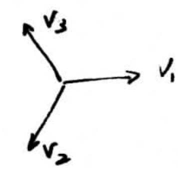

El sentido de giro es antihorario.

$\omega t > 0 \qquad \omega > 0$.

De forma tal que un dispositivo (generador o receptor trifásico

pero las tensiones (y corrientes)




---

(*) Además deberá observarse que un sistema trifásico equilibrado no da una representación por tres vectores de igual módulo desfasados de 120° unos respecto al siguiente o al anterior.

# II. Estudio general de Sistemas Polifásicos.

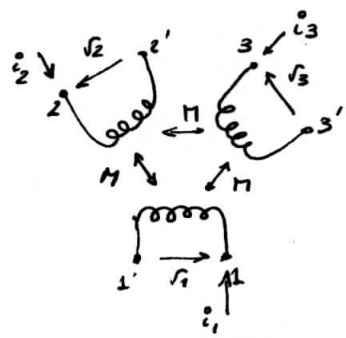
II.1 - Introducción ~~Hipótesis~~ — Consideramos primero el caso particular trifásico, y luego generalizamos la idea y el procedimiento de cálculo.

→ Hipótesis: . Red trifásica simétrica.
. Alimentación por un sistema trifásico equilibrado directo de tensiones.

Mostraremos: 1). — El sistema de corriente resultante es trifásico equilibrado directo.
2). — El estudio del problema se reduce al de un circuito monofásico, que será caracterizado por un valor de impedancia, llamada impedancia cíclica directa.

1). En anexo. (para el caso en que no haya sido demostrado en el curso de Teoría de Circuito en 4to Año.

Por la simetría de construcción, admitimos en este caso que las mutuas entre bobinas valen todas M




$$(1)\begin{cases} v_1(t) = R\, i_1(t) + L\dfrac{di_1}{dt} + M\dfrac{di_2}{dt} + M\dfrac{di_3}{dt} \\ v_2(t) = R\, i_2(t) + L\dfrac{di_2}{dt} + M\dfrac{di_1}{dt} + M\dfrac{di_3}{dt} \\ v_3(t) = R\, i_3(t) + L\dfrac{di_3}{dt} + M\dfrac{di_1}{dt} + M\dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$

El sistema de eqs. (1) es absolutamente general, para cualquier sistema de alimentación de la red simétrica. Si en particular se considera una alimentación mediante ~~una~~ ~~...~~ sistema trifásico equilibrado directo de tensiones, tendremos: (con notación vectorial asociada)

$$(2)\begin{cases} \vec{V_1} = R\vec{I_1} + j\omega L\vec{I_1} + j\omega M\vec{I_2} + j\omega M\vec{I_3} \\ \vec{V_2} = R\vec{I_2} + j\omega L\vec{I_2} + j\omega M\vec{I_1} + j\omega M\vec{I_3} \\ \vec{V_3} = R\vec{I_3} + j\omega L\vec{I_3} + j\omega M\vec{I_1} + j\omega M\vec{I_2} \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} \vec{V_2} = a^{-1}\vec{V_1} = a^2\vec{V_1} \\ \vec{V_3} = a^{-2}\vec{V_1} = a\vec{V_1} \end{cases}$$

Los sistemas de eqs. precedentes se pueden escribir como:

$$(4) \qquad \begin{bmatrix} (R+j\omega L) & j\omega M & j\omega M \\ j\omega M & (R+j\omega L) & j\omega M \\ j\omega M & j\omega M & (R+j\omega L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \\ \vec{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ a^2\vec{V}_1 \\ a\vec{V}_1 \end{bmatrix}$$

Solución:

1) El sistema de corrientes es trifásico equilibrado directo; en efecto:

$$(5) \quad \begin{cases} \vec{I}_1 = \dfrac{1}{\Delta} \det \begin{bmatrix} \vec{V}_1 & j\omega M & j\omega M \\ a^2\vec{V}_1 & R+j\omega L & j\omega M \\ a\vec{V}_1 & j\omega M & R+j\omega L \end{bmatrix} & (5a) \\[2ex] \vec{I}_2 = \dfrac{1}{\Delta} \det \begin{bmatrix} R+j\omega L & \vec{V}_1 & j\omega M \\ j\omega M & a^2\vec{V}_1 & j\omega M \\ j\omega M & a\vec{V}_1 & R+j\omega L \end{bmatrix} & (5b) \\[2ex] \vec{I}_3 = \dfrac{1}{\Delta} \det \begin{bmatrix} R+j\omega L & j\omega M & \vec{V}_1 \\ j\omega M & R+j\omega L & a^2\vec{V}_1 \\ j\omega M & j\omega M & a\vec{V}_1 \end{bmatrix} & (5c) \\[2ex] \text{con } \Delta = \det \begin{bmatrix} R+j\omega L & j\omega M & j\omega M \\ j\omega M & R+j\omega L & j\omega M \\ j\omega M & j\omega M & R+j\omega L \end{bmatrix} & (5d) \end{cases}$$

$a^{3+n} = a^n$

multiplicando x $a^3=1$

$$\det \begin{bmatrix} R+j\omega L & \vec{V}_1 & j\omega M \\ j\omega M & a^2\vec{V}_1 & j\omega M \\ j\omega M & a\vec{V}_1 & R+j\omega L \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} R+j\omega L & a^2(a\vec{V}_1) & j\omega M \\ j\omega M & a^2(\vec{V}_1) & j\omega M \\ j\omega M & a^2(a^2\vec{V}_1) & R+j\omega L \end{bmatrix} =$$

$$= -a^2 \det \begin{bmatrix} a\vec{V}_1 & R+j\omega L & j\omega M \\ \vec{V}_1 & j\omega M & j\omega M \\ a^2\vec{V}_1 & j\omega M & R+j\omega L \end{bmatrix} = a^2 \det \begin{bmatrix} \vec{V}_1 & j\omega M & j\omega M \\ a\vec{V}_1 & R+j\omega L & j\omega M \\ a^2\vec{V}_1 & j\omega M & R+j\omega L \end{bmatrix}$$

$$= -a^2 \det \begin{bmatrix} \vec{V}_1 & j\omega M & j\omega M \\ a^2\vec{V}_1 & j\omega M & R+j\omega L \\ a\vec{V}_1 & R+j\omega L & j\omega M \end{bmatrix} = a^2 \det \begin{bmatrix} \vec{V}_1 & j\omega M & j\omega M \\ a^2\vec{V}_1 & R+j\omega L & j\omega M \\ a\vec{V}_1 & j\omega M & R+j\omega L \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad \vec{I}_2 = a^2 \vec{I}_1$ y análogamente se puede mostrar que $\vec{I}_3 = a\vec{I}_1$

2) En consecuencia:

$$
(6)\quad \begin{cases} \vec{V}_1 = R\,\vec{I}_1 + j\omega L\,\vec{I}_1 + j\omega M\left(\vec{I}_2 + \vec{I}_3\right) \\ \vec{V}_2 = R\,\vec{I}_2 + j\omega L\,\vec{I}_2 + j\omega M\left(\vec{I}_1 + \vec{I}_3\right) \\ \vec{V}_3 = R\,\vec{I}_3 + j\omega L\,\vec{I}_3 + j\omega M\left(\vec{I}_1 + \vec{I}_2\right) \end{cases}
$$

pero $\quad \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 = 0$

$$
\Rightarrow \quad (6a) \qquad \vec{V}_1 = R\vec{I}_1 + j\omega(L-M)\,\vec{I}_1 = [\underbrace{R + j\omega(L-M)}_{Z_d}]\,\vec{I}_1
$$

y se puede constatar que la misma ecuación es la que resuelve $\vec{I}_2$ e $\vec{I}_3$

$$
\vec{I}_1 = \frac{\vec{V}_1}{Z_d} \quad ; \quad \vec{I}_2 = \frac{\vec{V}_2}{Z_d} \quad ; \quad \vec{I}_3 = \frac{\vec{V}_3}{Z_d}
$$

$$
\boxed{Z_d = \text{impedancia cíclica directa} = R + j\omega(L-M)}
$$

## II. 2 - Impedancia cíclica inversa.

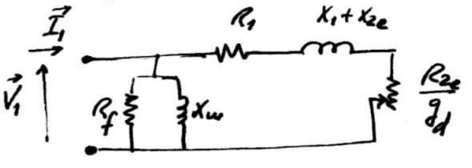
Análogamente, se puede mostrar que si una red trifásica simétrica es alimentada por un sistema de tensiones equilibrado inverso, las corrientes van a constituir un sistema trifásico equilibrado inverso.

En este caso, si tomamos el mismo ejemplo de red pasiva del caso precedente, encontraremos que ~~[illegible]~~ el sistema está caracterizado por una única impedancia, monofásica, que llamaremos impedancia cíclica inversa $Z_i$.

En el ejemplo anterior tendremos además que $Z_i = Z_d$. pero este resultado sólo es válido en el caso de redes pasivas y estáticas.

Ejemplo: Caso del motor de inducción

Más adelante, en el curso se demostrará que la impedancia cíclica directa de un motor de inducción es (o puede reducirse, con algunas aproximaciones) a:




donde $g = \dfrac{\frac{\omega}{p} - \Omega}{\frac{\omega}{p}}$

con $p$ = parámetro de la máquina (Nº de pares de polos).

$g$ = "deslizamiento" es una forma de medir la velocidad real del motor (velocidad mecánica) respecto a una velocidad "del campo electromagnético"

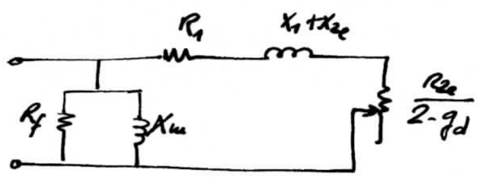
Ahora bien, por la definición de $g$ = deslizamiento de la velocidad mecánica del rotor respecto a la velocidad del campo giratorio

Lo que sucede, (que por el momento se admitirá sin demostración) es que si para el sistema de tensiones directo, el motor girara ~~para~~ en el mismo sentido del campo (es decir el campo electromagnético gira a velocidad $\frac{\omega}{p}$


$$g_d + g_i = \frac{1}{\left(\frac{\omega}{p}\right)}\left[\frac{\omega}{p} - \Omega + \frac{\omega}{p} + \Omega\right] = 2$$

$$g_d = \frac{\frac{\omega}{p} - \Omega}{\frac{\omega}{p}} \qquad g_i = \frac{\frac{\omega}{p} - (-\Omega)}{\frac{\omega}{p}} \quad \Rightarrow \quad g_d + g_i = 2.$$

En consecuencia el circuito equivalente para el motor, girando a la misma velocidad $\Omega$ que en el caso precedente, pero frente a la alimentación ~~por~~ ~~a~~ por un sistema trifásico equilibrado inverso de tensiones, será:




Por lo cual resulta claro que $Z_i \neq Z_d$.

$$Z_d = R_f \,||\, X_m \,||\left(R_1 + \frac{R_{2e}}{g_d} + X_1 + X_{2e}\right)$$

$$Z_i = R_f \,||\, X_m \,||\left(R_1 + \frac{R_{2e}}{2-g_d} + X_1 + X_{2e}\right)$$

## II.3 - Impedancia cíclica ~~inversa~~ homopolar

$$\vec{V_1} = \vec{V_2} = \vec{V_3} \quad \Rightarrow \quad \vec{V_1} = R_1\vec{I_1} + j\omega L\vec{I_1} + j\omega M\vec{I_1} + j\omega M\vec{I_1}$$

$$\vec{V_1} = [\underbrace{R_1 + j\omega(L+2M)}_{Z_h}]\,\vec{I_1}$$

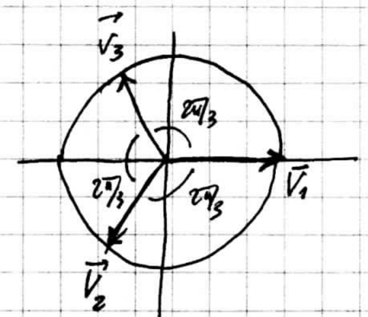
$Z_h$ impedancia cíclica homopolar.

## Sistemas polifásicos generales.

Se analizarán los sistemas $q$-fásicos donde las $q$ magnitudes eléctricas de fase son de igual frecuencia, y además los sistemas $q$-fásicos que son equilibrados, es decir donde la suma de las magnitudes de fase es 0.

Esto es porque si hubiese distintas frecuencias, se descompondría en éstas por análisis de Fourier. La elección sólo de sistemas equilibrados resulta de la descomposición de FORTESCUE que se estudiará seguidamente. (Todo sistema polifásico de igual frecuencia en sus fases se puede descomponer en la superposición de sistemas polifásicos equilibrados, más un sistema monofásico, eventualmente).

## Sistema trifásico equilibrado.




Sistema directo representado con $\varphi = 0$

$$v_1(t) = V_m \cos(\omega t - \varphi)$$
$$v_2(t) = V_m \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$v_3(t) = V_m \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right)$$

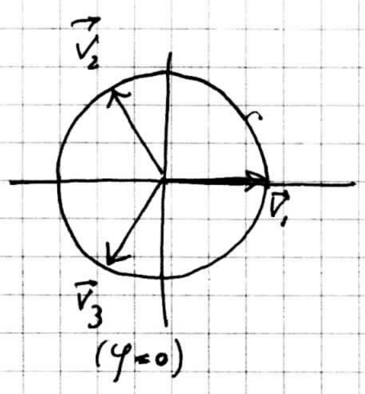
El sistema es equilibrado porque $v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) \equiv 0$.

Como el orden de sucesión de fases en el tiempo es $v_1$, $v_2$, $v_3$ se dice directo.

Notación: empleando $a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$, donde $a$ es una de las raíces cúbicas complejas de 1. ($a^3 = 1$).

Sistema directo: $\left\{ \begin{array}{l} \vec{V}_2 = a^2 \vec{V}_1 \\ \vec{V}_3 = a \vec{V}_1 \end{array} \right\}$ Notación fasorial compacta.

Si el orden de sucesión de fases en el tiempo fuese 1°) $v_1$, 2°) $v_3$, 3°) $v_2$ entonces se tendría un sistema trifásico, equilibrado inverso



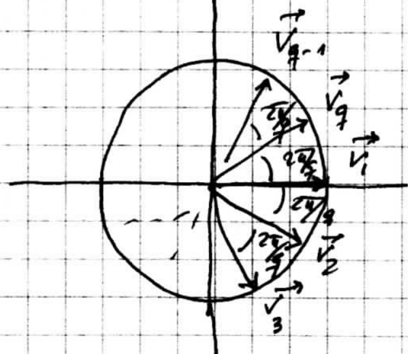

($\varphi = 0$)

$$v_1(t) = V_m \cos(\omega t - \varphi)$$
$$v_2(t) = V_m \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$v_3(t) = V_m \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{4\pi}{3}\right)$$

Sistema inverso: $\left\{ \begin{array}{l} \vec{V}_2 = a \vec{V}_1 \\ \vec{V}_3 = a^2 \vec{V}_1 \end{array} \right.$

## Sistema q-fásico equilibrado

Para $\varphi = 0$:



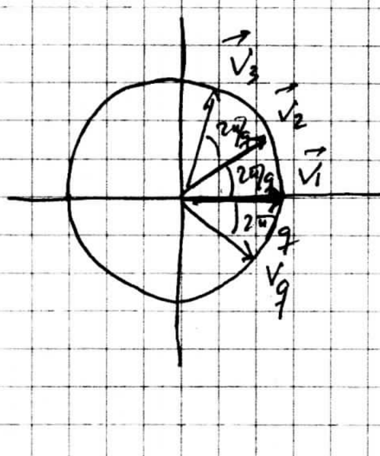
$$v_1(t) = V_m \cos(\omega t - \varphi)$$
$$v_2(t) = V_m \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{q}\right)$$
$$v_3(t) = V_m \cos\left(\omega t - \varphi - 2 \cdot \frac{2\pi}{q}\right)$$
$$\vdots$$
$$v_q(t) = V_m \cos\left(\omega t - \varphi - (q-1)\frac{2\pi}{q}\right)$$

Éste es un sistema <u>directo</u>, pues el orden de sucesión de fases en el tiempo es 1°) $v_1$, 2°) $v_2$, 3°) $v_3$ — , q-ésimo) $v_q$

Si $a = e^{j\frac{2\pi}{q}}$ $\quad (a^q = 1)$

<u>directo</u>
$$\begin{cases} \vec{V}_2 = a^{(q-1)}\vec{V}_1 \\ \vec{V}_3 = a^{(q-1)}\vec{V}_2 = a^{(q-2)}\vec{V}_1 \\ \vdots \\ \vec{V}_q = a^{(q-(q-1))}\vec{V}_1 = a\vec{V}_1 \end{cases}$$

En un sistema <u>inverso</u> el orden de sucesión de fases es 1°) $v_1$, 2°) $v_q$, 3°) $v_{q-1}$, -- q-ésimo) $v_2$.



$$v_1(t) = V_m \cos(\omega t - \varphi)$$
$$v_2(t) = V_m \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{2\pi}{q}\right)$$
$$v_3(t) = V_m \cos\left(\omega t - \varphi + 2 \cdot \frac{2\pi}{q}\right)$$
$$\vdots$$
$$v_q(t) = V_m \cos\left(\omega t - \varphi + (q-1)\frac{2\pi}{q}\right)$$

$$a = e^{j\frac{2\pi}{q}}$$

inverso.
$$\begin{cases} \vec{V}_2 = a\vec{V}_1 \\ \vec{V}_3 = a\vec{V}_2 = a^2\vec{V}_1 \\ \vdots \\ \vec{V}_q = a\vec{V}_{q-1} = a^{(q-1)}\vec{V}_1 \end{cases}$$

Orden de un sistema q-fásico (ó secuencia)

Sistema q-fásico de orden (o secuencia) m (entero ≷ 0)

$$\begin{cases} v_1(t) = V_m \cos(\omega t - \varphi) \\ v_2(t) = V_m \cos\left(\omega t - \varphi - m\frac{2\pi}{q}\right) \\ v_3(t) = V_m \cos\left(\omega t - \varphi - 2m\frac{2\pi}{q}\right) \\ \vdots \\ v_q(t) = V_m \cos\left(\omega t - \varphi - (q-1)m\cdot\frac{2\pi}{q}\right) \end{cases}$$

Si $m = 1$ → Sistema q-fásico eq. directo (ó de secuencia 1)

Si $m = -1$ → Sistema q-fásico eq. inverso (ó de secuencia -1)

Si $|m| > 1$, entonces el sistema q-fásico requiere m "vueltas" ($m \cdot 2\pi$) para recorrer todas las fases, aunque los fasores correspondientes están todos a ángulos de $\frac{2\pi}{q}$ entre sí, pero las fases consecutivas en el tiempo están a $m \cdot \frac{2\pi}{q}$.

Si $m > 0$ ⇒ Sistemas directos o de "secuencia positiva"
Si $m < 0$ ⇒ " inversos " " "secuencia negativa".

Obs: Un sistema q-fásico de orden $\begin{cases} m > 0 \\ m < q \end{cases}$, es idéntico a un sistema q-fásico de igual amplitud, frecuencia y fase, de orden $m-q$. ($m - q < 0$)

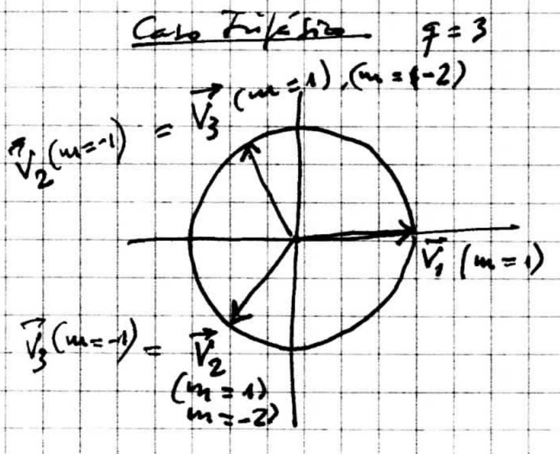
Así:

$$\begin{array}{lcl} \text{Sist. q-fásico orden } 1 & = & \text{Sist. q-fásico orden } 1-q \\ \quad " \quad 2 & & \quad " \quad 2-q \\ \quad \vdots & & \\ \quad q-1 & = & \quad " \quad -1 \\ \quad q & = & \quad " \quad 0 \end{array}$$

→ Sist. "homopolar" $V_1 = V_2 = \dots = V_q$

sistemas directos — sistemas inversos

Caso Trifásico $q = 3$ $\qquad a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$




trifásico orden 1 = $\underbrace{\text{trifásico orden } -2}_{\text{"inverso secuencia 2"}}$

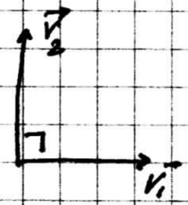
trifásico orden 2 = $\underbrace{\text{trifásico orden } -1}_{\text{"inverso secuencia 1"}}$

" " 3 = " " 0 ← homop.

<u>Caso especial</u>   $q = 2$

El sistema bifásico <u>no está constituido</u> por 2 fasores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ formando un ángulo $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

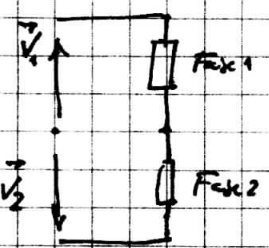
<u>Se define como sistema bifásico</u> a $\boxed{\vec{V}_2 \perp \vec{V}_1}$.




Con esta definición se tiene siempre que un sistema bifásico no puede ser equilibrado nunca

$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 \neq 0$.

¿Porqué esa definición? → El sistema bifásico que resultaría de la definición general, aplicado a un receptor bifásico, no es diferente del sistema monofásico:

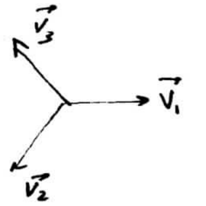




Sería lo mismo que aplicar el doble de tensión a la puesta en serie de las fases, pero como las fases y tensiones son iguales, es el sistema monofásico.

El sistema bifásico, tal como se define, $\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2$, tiene interés en el desarrollo de los modelos de las máquinas eléctricas rotativas.

# Representación de los sistemas polifásicos (continuación).

2). Sistema ~~directo y sistema trif~~ trifásico equilibrado directo y trifásico equilibrado inverso




directo: $a = e^{j\frac{2\pi}{3}} \rightarrow$ raíz cúbica de 1. / o de secuencia 1

$$\vec{V}_2 = a^2 \vec{V}_1 = a^{-1} \vec{V}_1$$
$$\vec{V}_3 = a \vec{V}_1 = a^{-2} \vec{V}_1$$

propiedades: $a^3 = 1$ / $a^2 = a^{-1}$

$(a^2)^3 = a^6 = 1$ / $a^n \cdot a^3 = a^n \Rightarrow \boxed{a^{n+3} = a^n}$ $n>0$, $n<0$, $n=0$

$$\boxed{1 + a + a^2 = 0}$$

Sistema trifásico inverso $\begin{cases} \vec{V}_2 = a \vec{V}_1 \\ \vec{V}_3 = a^2 \vec{V}_1 \end{cases}$ o de secuencia -1

---

2) Sistema polifásico general:

2.1) Sistema q-fásico equilibrado directo

Tensiones:

$$\left.\begin{aligned} e_1(t) &= E_m \sin \omega t \quad \leftarrow \text{(fase 0)} \\ e_2(t) &= E_m \sin (\omega t - 2\pi/q) \\ e_3(t) &= E_m \sin (\omega t - 2 \cdot 2\pi/q) \\ &\;\;| \\ e_q(t) &= E_m \sin (\omega t - (q-1) \cdot 2\pi/q) \end{aligned}\right\}$$

Si p.e. los flujos son $\varphi_1(t) = \varphi_m \cos \omega t$ $\left( e_k(t) = - \frac{d\varphi_k(t)}{dt} \right)$

corrientes: $i_q(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$ $\varphi$ : desfasaje angular.

Sentido y orden de sucesión de fases

(ángulo dado) $\varphi_q$

Directo si los retardos temporales son crecientes: fase 2 en retardo de $\left(\frac{2\pi}{q}\right)$ sobre fase 1
fase 3 en retardo de $\left(\frac{2\pi}{q}\right)$ sobre fase 2

|

Inverso si las fases están en avance. fase 2 en avance de $\varphi_q$ sobre fase 1
fase 3 " " " " " 2
| " " " " q-1
q

Sólo para sistema equilibrado

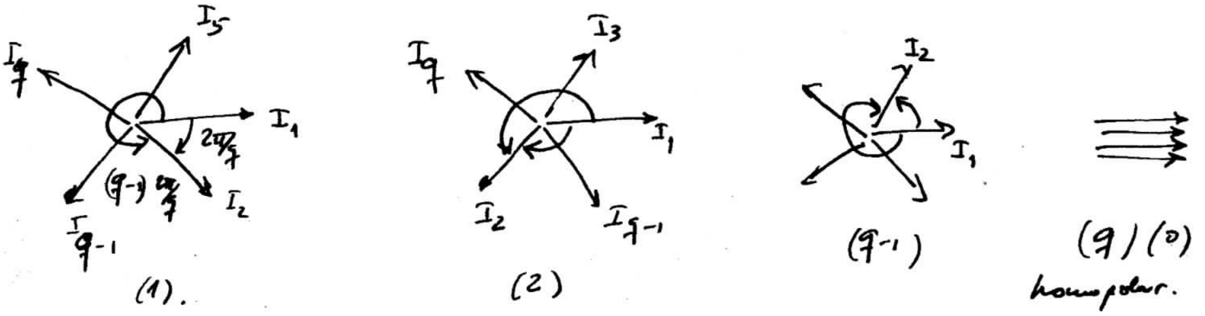
Orden del sistema polifásico (orden de sucesión de fases).

puede ser directo o inverso.

Un sistema q-fásico se llama de orden m (entero y positivo) cuando 2 fases consecutivas están desfasadas de $m \cdot \frac{2\pi}{q}$

Con q fases, se pueden "hacer" los siguientes q sistemas

(1) Directo de orden 1 ≡ Inverso de orden q-1.
(2) Directo " 2 ≡ Inverso " " q-2
(3) " 3 ≡ Inverso " q-3
— — — — — —
(q-1) Directo orden q-1 ≡ Inverso de orden 1
(q) Directo orden q (0) ≡ Inverso de orden 0 (q)




En trifásico → Directo → inverso → homopolar.

Notación compleja. → operador rotación

General: $a = e^{j\frac{2\pi}{q}}$

$\vec{V_2} = e^{-jm\frac{2\pi}{q}}\vec{V_1} = a^{-m}\vec{V_1}$
$\vec{V_3} = a^{-2m}\vec{V_1}$
⋮

Relaciones: $\begin{cases} a^q = 1 \\ 1 + a + a^2 + \cdots + a^{q-1} = 0. \\ a^{n+q} = a^n \quad n \geq 0. \end{cases}$

En trifásico podemos agregar: $1 - a = \sqrt{3}\, e^{-j\pi/6}$
$1 - a^2 = \sqrt{3}\, e^{j\pi/6}$

→ Conexionado de sistemas polifásicos. → Estrella, Triángulo (polígono), tensiones simples (o de fase) y compuestas (o entre fases), corrientes de fase y de línea.

fases separadas.

Potencia. Hay que ser cuidadoso: vamos a considerar en esta def. los valores de fase (tensiones simples o de fase, corrientes de fase).

Caso monofásico: def. Pot. activa, ~~aparente~~, reactiva, aparente, compleja. aparente compleja

$m \approx 1$

$$\mathcal{S} = P + jQ = \vec{V}_1 \vec{I}_1^* + \vec{V}_2 \vec{I}_2^* + \text{———} + \vec{V}_q \vec{I}_q^*$$

$$= V e^{j\omega t} I e^{-j(\omega t - \varphi)} + V e^{j(\omega t - \frac{2\pi}{q})} I e^{-j(\omega t - \frac{2\pi}{q} - \varphi)}$$

$$= VI e^{j\varphi} + \text{———} + VI e^{j\varphi}$$

$$\Rightarrow \quad P = q\, VI \cos\varphi$$
$$Q = q\, VI \sin\varphi$$

---

Potencia fluctuante:

a) Caso monofásico

$$p(t) = v(t)\, i(t) = \sqrt{2} V \cos\omega t \,.\, \sqrt{2} I \cos(\omega t - \varphi)$$
$$= 2VI \left[\cos\omega t \,.\, \cos(\omega t - \varphi)\right]$$
$$= VI \left[\cos(2\omega t - \varphi) + \cos\varphi\right]$$
$$= P_f(t) + P$$

$$\boxed{P_f(t) = \mathrm{Re}(\vec{V}.\vec{I})}$$

potencia fluctuante compleja (Sólo la parte real tiene sentido)

$$\boxed{\vec{P}_f = \vec{V}.\vec{I}}$$

$\vec{V} = V e^{j\omega t}$

$\vec{I} = I e^{-j\varphi} e^{j\omega t}$

$\vec{V}.\vec{I} = VI e^{j(2\omega t - \varphi)}$

Def. "Potencia fluctuante compleja".

b) Caso polifásico:

$$\vec{P}_f = \vec{V}_1 \vec{I}_1 + \text{———} + \vec{V}_q \vec{I}_q$$
$$= V e^{j\omega t} I e^{j(\omega t - \varphi)} + V e^{j(\omega t - \frac{2\pi}{q})} I e^{j(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{q})} + \text{——}$$
$$= VI e^{j\varphi} \underbrace{\left\{ e^{2j\omega t} + e^{2j(\omega t - \frac{2\pi}{q})} + \text{——} + e^{2j(\omega t - (q-1)\frac{2\pi}{q})} \right\}}_{\overset{\text{III}}{0}} \equiv 0$$

---

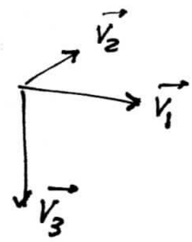
Recuerdo $\rightarrow$ $\boxed{Z_\lambda = \dfrac{Z_\Delta}{3}}$

Red trifásica de <u>construcción simétrica</u>, sometida a un <u>sistema trifásico</u> de tensiones, <u>desequilibrado</u>, senoidales y de igual frecuencia.

$$\vec{V_1} = R\vec{I_1} + j\omega L\,\vec{I_1} + j\omega M\vec{I_2} + j\omega M\vec{I_3}$$
$$\vec{V_2} = R\vec{I_2} + j\omega L\,\vec{I_2} + j\omega M\vec{I_1} + j\omega M\vec{I_3}$$
$$\vec{V_3} = R\vec{I_3} + j\omega L\,\vec{I_3} + j\omega M\vec{I_1} + j\omega M\vec{I_2}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{V_1} \\ \vec{V_2} \\ \vec{V_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R+j\omega L & j\omega M & j\omega M \\ j\omega M & R+j\omega L & j\omega M \\ j\omega M & j\omega M & R+j\omega L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I_1} \\ \vec{I_2} \\ \vec{I_3} \end{bmatrix}$$

Pero ahora $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}$ es




Si bien las 3 fases son separadas, y cada una de ellas está alimentada por las tensiones $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}$ en forma separada, los acoplamientos dados por las inductancias mutuas implican que las corrientes resultantes no son independientes entre sí.
¿Existe alguna forma de resolver las corrientes en forma desacoplada?

→ <u>Teorema de FORTESCUE</u> (Descomposición de FORTESCUE)

1°) Suponemos que el sistema de tensiones $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}$ se puede descomponer como la superposición de 3 sistemas trifásicos:

$$+\begin{cases} 1 \text{ sistema equilibrado directo}: & \vec{V_d},\ a^2\vec{V_d},\ a\vec{V_d} \\ 1 \text{ sistema equilibrado inverso}: & \vec{V_i},\ a\vec{V_i},\ a^2\vec{V_i} \\ 1 \text{ sistema homopolar}: & \vec{V_h},\ \vec{V_h},\ \vec{V_h} \end{cases}$$

Entonces:

$$\vec{V_1} = \vec{V_d} + \vec{V_i} + \vec{V_h}$$
$$\vec{V_2} = a^2\vec{V_d} + a\vec{V_i} + \vec{V_h}$$
$$\vec{V_3} = a\vec{V_d} + a^2\vec{V_i} + \vec{V_h}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{V_1} \\ \vec{V_2} \\ \vec{V_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{V_d} \\ \vec{V_i} \\ \vec{V_h} \end{bmatrix}$$

con $a = e^{j2\pi/3}$

2) Entonces, como el sistema es lineal, se puede aplicar el principio de superposición, y las corrientes resultantes por fase serán la suma de las contribuciones del sistema directo, más el sistema inverso más el sistema homopolar.

3º) Pero la respuesta de la red simétrica al $\begin{cases} \text{sist. directo es } Z_d, \\ \text{sist. inverso es } Z_i \\ \text{sist. homopolar es } Z_h \end{cases}$

Entonces: $\vec{I_d} = \dfrac{\vec{V_d}}{Z_d}$ , $\vec{I_i} = \dfrac{\vec{V_i}}{Z_i}$ , $\vec{I_h} = \dfrac{\vec{V_h}}{Z_h}$

4º) Luego:

$$\begin{aligned} \vec{I_1} &= \vec{I_d} + \vec{I_i} + \vec{I_h} \\ \vec{I_2} &= a^2\vec{I_d} + a\vec{I_i} + \vec{I_h} \\ \vec{I_3} &= a\vec{I_d} + a^2\vec{I_i} + I_h \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} \vec{I_1} \\ \vec{I_2} \\ \vec{I_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I_d} \\ \vec{I_i} \\ \vec{I_h} \end{bmatrix}$$

Pero ¿Existe la descomposición de $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}$ en $\vec{V_d}, \vec{V_i}, \vec{V_h}$?

$$\begin{bmatrix} \vec{V_d} \\ \vec{V_i} \\ \vec{V_h} \end{bmatrix} = \left( \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix}}_{\uparrow} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \vec{V_1} \\ \vec{V_2} \\ \vec{V_3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\ ) &= a + \overbrace{a^2 \cdot a^2}^{= a^4 = a} + a - a^2 - a^2 - a^2 \\ &= 3a - 3a^2 = 3a(1-a) \neq 0 \\ &\qquad\qquad \text{si } a = e^{j 2\pi/3} \end{aligned}$$

Entonces la descomposición existe y es única, los sistemas $\vec{V_d}$, $\vec{V_i}$, $\vec{V_h}$ asociados a $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}$ están bien determinados

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[F]^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[F] \cdot [F]^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \overset{=3}{a^3 + a^3 + 1} & \underset{=0}{a^4 + a^2 + 1} \\ 0 & \underbrace{a^2 + a^4 + 1}_{=0} & \underbrace{a^3 + a^3 + 1}_{=3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = [I] = [1]$$

③

Llamamos:

$$[\vec{V}_F] = \begin{bmatrix} \vec{V}_d \\ \vec{V}_i \\ \vec{V}_h \end{bmatrix} \qquad [\vec{I}_F] = \begin{bmatrix} \vec{I}_d \\ \vec{I}_i \\ \vec{I}_h \end{bmatrix}$$ ← "componentes de FORTESCUE"

$$[\vec{V}] = \begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \end{bmatrix} \qquad [\vec{I}] = \begin{bmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \\ \vec{I}_3 \end{bmatrix}$$ ← "componentes de fase"

$$\boxed{[\vec{V}] = [Z][\vec{I}]} \quad , \text{ con } [Z] = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_{12} & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_1 & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{12} & Z_1 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} Z_1 = R + j\omega L \\ Z_{12} = j\omega M \end{matrix}$$

$$[\vec{V}] = [F][\vec{V}_F]$$
$$[\vec{I}] = [F][\vec{I}_F]$$

$$[F][V_F] = [Z][F][I_F]$$

$$[V_F] = \big(\underbrace{[F]^{-1}[Z][F]}_{=\,[Z_F]}\big)[I_F]$$

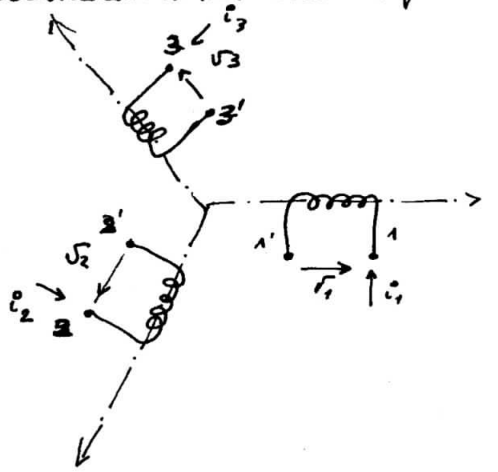
$[Z_F]$ es diagonal: $[Z_F] = \begin{bmatrix} Z_d & 0 & 0 \\ 0 & Z_i & 0 \\ 0 & 0 & Z_h \end{bmatrix}$

La descomposición de FORTESCUE es un caso particular de diagonalización de matrices.

## Repaso de sistemas polifásicos.

→ Noción de inductancia cíclica (se introducirá más adelante).

Consideremos un sistema formado de 3 bobinas, de valores $R_1, L_1$ ; $R_2, L_2$ ; $R_3, L_3$.




$$v_1(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} + M_{13} \frac{di_3}{dt}$$

$$v_2(t) = R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{21} \frac{di_1}{dt} + M_{23} \frac{di_3}{dt}$$

$$v_3(t) = R_3 i_3(t) + L_3 \frac{di_3}{dt} + M_{31} \frac{di_1}{dt} + M_{32} \frac{di_2}{dt}$$

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} L_1 & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & L_2 & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & L_3 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \end{bmatrix}$$

$$v_1(t) = R_1 i_1(t) + \frac{d\psi_1}{dt}$$

$$v_2(t) = R_2 i_2(t) + \frac{d\psi_2}{dt}$$

$$v_3(t) = R_3 i_3(t) + \frac{d\psi_3}{dt}$$

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= L_1 i_1 + M_{12} i_2 + M_{13} i_3 \\ \psi_2(t) &= L_2 i_2 + M_{21} i_1 + M_{32} i_3 \\ \psi_3(t) &= L_3 i_3 + M_{31} i_1 + M_{32} i_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \psi_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & L_2 & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \end{bmatrix}$$

Podríamos pensar en el caso más general en que las inductancias propias $L_j$ son funciones del tiempo (p.e. caso de circuitos deformables, o algún caso de máquinas eléctricas que se verá luego en el curso (máq. de polos salientes o máquina a reluctancia)) o que las mutuas son también funciones del tiempo (situación que puede darse en circuitos rígidos pero animados de movimiento relativo entre sí.)

En esos casos las expresiones $\frac{d\psi_j}{dt}$ serían más complicadas. Si nos restringimos

Si $v_1(t)$, $v_2(t)$, $v_3(t)$ son todas tensiones alternas de misma frecuencia, las tres podemos dar para cada una de ellas una representación vectorial en el plano de Fresnel (o rep. fasorial en el plano complejo)

→ $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$ → Como estudiamos regímenes permanentes, las corrientes resultantes van a ser también magnitudes de variación temporal sinusoidal, a la misma frecuencia

Las ecs. básicas quedan entonces expresadas en notación matricial (o tensorial como queda mejor dicho). (Ver libro de Santaló: Vectores y tensores).

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \\ \vec{I}_3 \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \left( \begin{bmatrix} L_1 & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & L_2 & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \\ \vec{I}_3 \end{bmatrix} \right)$$

---

En el caso ~~para~~ práctico de regímenes sinusoidales de misma frecuencia en todas las fases, con ~~impedancias~~ inductancias propias y mutuas constantes, las expresiones se simplifican mediante la introducción del ~~la nueva~~ concepto de impedancias, y se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \end{bmatrix} = [Z] \begin{bmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \\ \vec{I}_3 \end{bmatrix} \qquad [\vec{V}] = [Z][\vec{I}]$$

$$\text{con} \quad [Z] = \begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 & j\omega M_{12} & j\omega M_{13} \\ j\omega M_{21} & R_2 + j\omega L_2 & j\omega M_{23} \\ j\omega M_{31} & j\omega M_{32} & R_3 + j\omega L_3 \end{bmatrix}$$

En definitiva, en sistemas trifásicos estamos confrontados al tratamiento matemático de expresiones de la forma matricial

$$\underbrace{[\Psi] = [L][\vec{I}]}_{\substack{\text{más interesante para el} \\ \text{caso general de regímenes} \\ \text{cualquiera (en particular} \\ \text{reg. transitorios)}}} \quad , \text{ o } \quad \underbrace{[\vec{V}] = [Z][\vec{I}]}_{\substack{\text{Especialmente interesante en regímenes} \\ \text{permanentes sinusoidales.}}}$$

Como se puede ver, hay que recurrir a las nociones y técnicas del álgebra para tratar de simplificar el problema.

La situación general en un sistema polifásico q-fásico será entonces

$$\begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ | \\ \psi_q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M_{12} & \text{——} & M_{1q} \\ M_{21} & L_2 & \text{——} & M_{2q} \\ | & & & \\ M_{q1} & M_{q2} & \text{——} & L_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ | \\ i_q(t) \end{bmatrix} \qquad [\psi] = [L][i]$$

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ | \\ \vec{V}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \text{——} & Z_{1q} \\ Z_{21} & Z_{22} & \text{——} & Z_{2q} \\ | & & & \\ Z_{q1} & Z_{q2} & \text{——} & Z_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \\ | \\ \vec{I}_q \end{bmatrix} \qquad [\vec{V}] = [Z][\vec{I}]$$

La idea ~~es trabajar, en lugar~~ en lugar de trabajar con los valores reales por fase de tensiones y corrientes, o de flujos y corrientes, con valores transformados no representando los valores reales en las fases, pero que permite simplificar las matrices, por ejemplo llegar a matrices diagonales.

$$[\psi] = [T][\psi_c] \qquad [i] = [T][i_c]$$

$$[\vec{V}] = [T][\vec{V}_c] \qquad [\vec{I}] = [T][\vec{I}_c]$$

$$[\psi_c] = \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \\ \psi_n \end{bmatrix} \qquad [i_c] = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ \\ i_n \end{bmatrix} \qquad [\vec{V}_c] = \begin{bmatrix} \vec{V}_a \\ \vec{V}_b \\ | \\ \vec{V}_n \end{bmatrix} \qquad [\vec{I}_c] = \begin{bmatrix} \vec{I}_a \\ | \\ \vec{I}_n \end{bmatrix}$$

$\psi_a, \psi_b, \text{——}\, \psi_n$ son las <u>componentes</u> de las magnitudes reales de fase $\psi_1, \psi_2, \text{——}, \psi_n$

Si la matriz de paso o de transformación es a coeficientes constantes, reales o complejos, las componentes se llaman componentes simétricas. Si son coef. funciones del tiempo se las llama componentes <u>relativas</u>.

$$[\psi] = [L][i]$$

$$[T][\psi_c] = [L][T][i_c]$$

$$[\psi_c] = \underbrace{[T]^{-1}[L][T]}_{[L_c]}[i_c] \quad \rightarrow \quad [\psi_c] = [L_c][i_c]$$

con $[L_c] = [T]^{-1}[L][T]$

Esto es posible si la matriz $[T]$ es invertible, es decir no singular, y además tiene sentido práctico si además $[L_c]$ presenta alguna forma particular de interés, por ejemplo diagonal, de forma de simplificar las ecuaciones.

---

Obs. No es necesario utilizar la misma transformación para los flujos que para las corrientes (o tensiones y corrientes).
En el caso anterior, por ej. sería $[L_c] = [T_\psi]^{-1}[L][T_i]$

---

2) Condiciones impuestas a las matrices de transformación.

- Invariancia de la potencia aparente compleja. $<$ activa y reactiva } reg. permanente
- o bien invariancia de la potencia instantánea. $\rightarrow$ régimen transitorio.

- Conducen a eqs. que representan redes realizables, por medio de inductancias, resistencias y capacidades. $\rightarrow$ En particular la realizabilidad implica que las inductancias mutuas sean iguales.

2a) Invariancia de la potencia compleja

$$\vec{S} = \vec{V}_1 \vec{I}_1^* + \text{———} + \vec{V}_q \vec{I}_q^* = [\vec{V}]^{(t)}[\vec{I}]^*$$

$$\vec{S} = \{[T][\vec{V}_c]\}^{(t)} \cdot \{[T][\vec{I}_c]\}^*$$

$$= [\vec{V}_c]^{(t)}[T]^{(t)}[T]^*[\vec{I}_c]^* = [\vec{V}_c]^{(t)}\{[T]^{(t)}[T]^*\}[\vec{I}_c]^*$$

Condición $\boxed{[T]^{(t)}[T^*]^* = [1]}$ $\Rightarrow [T]$ unitaria

2b) Invariancia de la potencia instantánea.

$$p(t) = v_1(t)\, i_1(t) + \text{———} + v_q(t)\, i_q(t)$$

$$p(t) = [v(t)]^{(t)} [\, i(t)\,]$$

$$= \left\{[T][v_c(t)]\right\}^{(t)} \left\{[T][i_c(t)]\right\}$$

$$= [v_c(t)]^{(t)} \left\{[T]^{(t)}.[T]\right\} [i_c(t)]$$

condición $\boxed{[T]^{(t)}[T] = [1]}$ $\Rightarrow$ T es ortogonal.

obs. Si T es a coeficientes reales $\Rightarrow$ las dos condiciones se satisfacen, es decir que hay invariancia de la potencia aparente compleja (activa y reactiva) y también instantánea.

Existen transformaciones que conserven la potencia pseudo-invariante, es decir

$$[\vec{V}]^{(t)}[\vec{I}]^{*} = k\,[\vec{V}_c]^{(t)}[\vec{I}_c]^{*} \quad , \quad k \text{ real } > 0.$$

2c) Realizabilidad

1) La parte real de $[Z_c]$ debe ser definida positiva.
2) $[Z_c]$ simétrica respecto a la diagonal principal.

---

3) Matrices inductancia (o impedancia).

$$[L] = \begin{bmatrix} L_1 & M_{12} & \text{——} & M_{1q} \\ M_{21} & L_2 & \text{——} & M_{2q} \\ | & & & \\ M_{q1} & M_{q2} & \text{——} & L_q \end{bmatrix} \quad \text{general.}$$

construcción simétrica $\Rightarrow$ $\underline{L_i = L_j \qquad M_{ij} = M_{i+1,j+1}}$ $\leftarrow$ Matriz circulante.

$$[L] = \begin{bmatrix} L_1 & M_{12} & \cancel{M_{13}} \text{—} & M_{1q} \\ M_{1q} & L_q & M_{12} \text{—} & M_{1,q-1} \\ | & & & \\ M_{12} & M_{13} & M_{14} \text{—} & M_{1q} \quad L_q \end{bmatrix}$$

Circulante + Simétrica. (caso p.e. trifásico) $\rightarrow$ $\begin{bmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{bmatrix}$

La matriz impedancia puede ser la impedancia compleja (reg. permanente) $R + j\omega L$ o bien la impedancia operacional $R + Lp$. etc.
Lo que sigue se aplica sólo para Resistencia e inductancia constantes.
(Elementos de la matriz $L$ son todos ctes).

---

Diagonalización de matriz circulante.

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & \text{———} & Z_{1,q-1} & Z_{1,q} \\ Z_{1,q} & Z_1 & Z_{12} & Z_{13} & \text{———} & Z_{1,q-2} & Z_{1,q-1} \\ | & & & & & & \\ Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & Z_{15} & & Z_{1,q} & Z_1 \end{bmatrix}$$

$$[\pi] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \text{———} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \text{———} & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \text{———} & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \text{———} & & 0 \end{bmatrix} \qquad [\pi]^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \\ | & | & | & & \\ 1 & 0 & 0 & \text{———} & \\ 0 & 1 & 0 & & \end{bmatrix}$$

$$[Z] = Z_1 \underset{\underset{[\pi]^0}{\shortparallel}}{[1]} + Z_{12}[\pi] + Z_{13}[\pi]^2 + \text{———} + Z_{1q}[\pi]^{q-1}$$

$\Rightarrow$ la transformación que diagonaliza $[\pi]$ diagonaliza $[Z]$

$$[\pi][x] = \lambda [x] \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ | \\ x_q \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & & 1 & & | \\ 1 & \text{———} & & & & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda^q - 1 = 0}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \lambda x_1 \\ x_3 &= \lambda x_2 \\ &| \\ x_q &= \lambda x_{q-1} \\ x_1 &= \lambda x_q \end{aligned}$$

La ec. $\alpha^q - 1 = 0$ admite $q$ raíces $\neq$ en $\mathbb{C}$

$$\alpha_k = e^{j \frac{2\pi}{q} k} \qquad k = 0, 1, \ldots, q-1$$

$$\Rightarrow \text{Sea } \boxed{a = e^{j\frac{2\pi}{q}}} \Rightarrow \boxed{\alpha_k = a^k}$$

para cada valor propio $\alpha_k$ se tendrá un vector propio $[X_k] = \begin{bmatrix} x_{1_k} \\ x_{2_k} \\ \vdots \\ x_{q_k} \end{bmatrix}$

$$\left. \begin{aligned} x_{2_k} &= \alpha_k x_{1_k} \\ x_{3_k} &= \alpha_k x_{2_k} \\ &\vdots \\ x_{1_k} &= \alpha_k x_{q_k} \end{aligned} \right\} \quad \text{si se elige } x_{1_k} = 1$$

$$\Rightarrow [X_k] = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_k \\ \alpha_k^2 \\ \vdots \\ \alpha_k^{q-1} \end{bmatrix}$$

La matriz de pasaje a la base de los vectores propios va a ser:

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a^{q-1} & & a^{q-2} & a \\ \vdots & a^{2(q-1)} & & a^{2(q-2)} & a^2 \\ & & & \vdots & \vdots \\ 1 & a^{(q-1)(q-1)} & & a^{(q-1)(q-2)} & a^{q-1} \end{bmatrix}$$

$$[D] = [F]^{-1}[\pi][F] = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & a^{q-1} & & \\ & & a^{q-2} & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & a \end{bmatrix}$$

$$[Z_c] = Z_1 + Z_{12}[D] + Z_{13}[D]^2 + \cdots + Z_{1q}[D]^{q-1}$$

$$[Z_c] = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_{12} + \cdots + Z_{1q} & 0 & 0 \\ 0 & Z_1 + a^{q-1} Z_{12} + \cdots + a^{(q-1)(q-1)} Z_{1q} & \\ 0 & \cdots & Z_1 + a Z_{12} + \cdots a^{q-1} Z_{1q} \end{bmatrix}$$

.3.2) Diagonalización de matrices circulantes

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_{12} & Z_{13} & \text{———} & Z_{1q-1} & Z_{1q} \\ Z_{1q} & Z_1 & Z_{12} & \text{———} & Z_{1q-2} & Z_{1q+1} \\ | & & & & & \\ Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & \text{———} & Z_{1q} & Z_1 \end{bmatrix}$$

Def.

$$[\Pi] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \text{———} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \text{———} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{———} & 0 \\ | & | & | & & | \\ 0 & 0 & 0 & \text{———} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \text{———} & 0 \end{bmatrix} = [\Pi][1]$$

$[\Pi]$ puede escribirse como $[\Pi]^1$

Es fácil ver que el número de potencia (entera) coincide con el número de permutaciones

$$[\Pi]^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \text{———} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ | & | & | & | & & | \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

y así sucesivamente.

(No haremos la demostración)

Se puede escribir entonces que

matriz identidad, no se escribe $[I]$ para no confundir con vector de corriente.

$$[Z] = Z_1 [\mathbb{1}] + Z_{12}[\Pi] + Z_{13}[\Pi]^2 + \text{———} + Z_{1n}[\Pi]^{n-1} + \text{———} + Z_{1q}[\Pi]^{q-1}$$

podría formalmente escribirse como $[\Pi]^0$

Entonces es suficiente con encontrar la transformación que diagonaliza $[\Pi]$

En efecto, supongamos que ya encontramos la solución, sea $[F]$ la matriz que diagonaliza $[\Pi]$

$$[F]^{-1}[\Pi][F] = [D] \quad \text{con } D \text{ diagonal}$$

$$\Rightarrow [\Pi] = [F][D][F]^{-1}$$

también diagonal.

$$[\Pi]^2 = [F][D][F^{-1}][F][D][F]^{-1} = [F][D]^2[F]^{-1} \quad \text{etc.}$$

$$[Z] = [F]\left\{ Z_1[\mathbb{1}] + Z_{12}[D] + Z_{13}[D]^2 + \text{—} + Z_{1n}[D]^{n-1} + \text{—} + Z_{1q}[D]^{q-1} \right\}[F]^{-1}$$

porque

$$[\mathbb{1}] = [F][\mathbb{1}][F]^{-1}$$

Entonces queda definida la matriz de impedancias transformadas

$$\boxed{[Z_c] = Z_1[\mathbb{1}] + Z_{12}[D] + Z_{13}[D]^2 + \text{—} + Z_{1q}[D]^{q-1}}$$

que es una matriz diagonal. y tal que

$$[Z] = [F][Z_c][F]^{-1} \quad \text{o} \quad [Z_c] = [F]^{-1}[Z][F]$$

---

→ Diagonalización de $[\Pi]$ :

El método es el clásico:

- Hallar los autovalores de $[\Pi]$
- Construir una base de autovectores de $[\Pi]$
- La matriz de los autovectores es la que diagonaliza $[\Pi]$

- Autovalores de $[\Pi]$

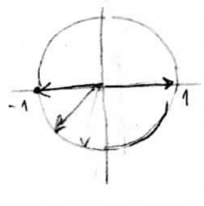
$$[\Pi][X] = \lambda[X]$$

$$\det\left([\Pi] - \lambda[\mathbb{1}]\right) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(-\lambda)^q + 1 = 0} \quad \text{en el caso } q \text{ impar}: \quad \boxed{\lambda^q - 1 = 0}$$

Se podría hacer el razonamiento análogo para q par. No lo desarrollaremos.

Obs: si q es par ⇒ $\lambda = \sqrt[q]{-1}$




para los vectores son opuestos, y por lo tanto también se pueden contar como $e^{j\frac{2\pi}{q}}$.

$$\text{con } [X]^{*} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \\ x_q \end{bmatrix} \Rightarrow {}^{*}\boxed{\begin{aligned} x_2 &= \lambda x_1 \\ x_3 &= \lambda x_2 \\ &\vdots \\ x_n &= \lambda x_{n-1} \\ &\vdots \\ x_q &= \lambda x_{q-1} \\ x_1 &= \lambda x_q \end{aligned}}$$

Si X es un autovector asociado al autovalor λ

* Esta es la eq. $[\Pi][X] = \lambda[X]$

$$x_1 = \lambda x_q = \lambda^2 x_{q-1} = \lambda^3 x_{q-2} = \text{———} = \lambda^q x_1$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\lambda^q - 1 = 0}$ Admite $q$ ~~raíces~~ autovalores, que son las raíces de orden $q$ de la unidad.

$$\boxed{\lambda_k = e^{j k \frac{2\pi}{q}} \quad , \quad k = 0, 1, \text{——}, q-1}$$

o también, adoptando la notación

$$\boxed{\begin{array}{l} a = e^{j \frac{2\pi}{q}} \\ \lambda_k = a^k \quad , \quad k = 0, 1, \text{——}, q-1 \end{array}}$$

Si tomamos $\boxed{x_1 = 1}$, los vectores propios quedan:

$$[X^{(k)}] = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_k \\ \lambda_k^2 \\ | \\ \lambda_k^{q-1} \end{bmatrix}$$

$\uparrow$

autovector asociado al autovalor $\lambda_k$

Queda así definida la matriz de cambio de base o matriz $[F]$

$$\boxed{[F] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & --- & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & & a^{q-2} & a^{q-1} \\ 1 & a^2 & a^4 & & a^{2(q-2)} & a^{2(q-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & | & | \\ 1 & a^{q-2} & a^{2(q-2)} & --- & a^{(q-2)(q-2)} & a^{(q-2)(q-1)} \\ 1 & a^{q-1} & a^{2(q-1)} & --- & a^{(q-1)(q-2)} & a^{(q-1)(q-1)} \end{bmatrix}}$$

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ [X^{(0)}] & [X^{(1)}] & [X^{(2)}] & [X^{(q-2)}] & [X^{(q-1)}] \\ \lambda_0 = 1 & \lambda_1 = a & \lambda_2 = a^2 & \lambda_{q-2} = a^{q-2} & \lambda_{q-1} = a^{q-1} \end{array}$$

y con esta matriz $[F]$ podemos calcular $[D]$

$[D] = [F]'[\Pi][F]$ , que sabemos que tiene que ser la matriz de los valores propios:

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & a^{q-2} & \\ 0 & \cdots & & & & a^{q-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & a & & & 0 & \\ & & a^2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & a^{q-2} & \\ & & & & & a^{q-1} \end{bmatrix}$$

---

De acuerdo a lo ya visto, quedará entonces

$$[Z_c] = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_{12} + Z_{13} + \cdots + Z_{1q} & & & 0 \\ & Z_1 + aZ_{12} + a^2 Z_{13} + \cdots + a^{q-1} Z_{1q} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & Z_1 + a^{(q-1)} Z_{12} + \cdots + a^{(q-1)(q-1)} Z_{1q} \end{bmatrix}$$

---

<u>Transformación de Fortescue</u> ~~[illegible]~~ : normalizada

$$\langle x^{(k)}, x^{(\ell)} \rangle = \sum_{j=1}^{q} x_j^{(k)} \cdot x_j^{(\ell)*} = \begin{cases} q & (k=\ell) \\ 0 & (k \neq \ell) \end{cases} \quad \text{(Demostración como ejercicio)}$$

$$= q\,\delta_{k\ell} \qquad (\delta_{k\ell} = \text{delta de Kronecker})$$

$$\boxed{[F_1] = \frac{1}{\sqrt{q}}[F]}$$

para que sea ortogonal y conserve la potencia

Observar que la normalización $[F_1]$ <u>no cambia los autovalores</u>, y por lo tanto no cambia $[Z_c]$, y tampoco las impedancias sensibles a la sec. directa, inversa, homop. etc.)

Caso trifásico 

matriz de Fortescue. $\lambda_1$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_d \\ V_i \\ V_h \end{bmatrix}$$

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_d + \vec{V}_i + \vec{V}_h$$
$$\vec{V}_2 = a^2\vec{V}_d + a\vec{V}_i + \vec{V}_h$$
$$\vec{V}_3 = a\vec{V}_d + a^2\vec{V}_i + V_h$$

$$\begin{bmatrix} V_d \\ V_i \\ V_h \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{F^{-1}} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1+1+1 & \cancel{1+a^2+a^4} & \cancel{1+a+a^2} \\ \cancel{1+a^4+a^2} & 1+a^3+a^3 & \cancel{1+a^2+a} \\ \cancel{1+a^2+a} & \cancel{1+a+a^2} & 1+1+1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

---

Para respetar el orden general encontrado, debería ser

$$\boxed{\begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & \underset{a}{\overset{}{a^4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{V}_h \\ \vec{V}_i \\ \vec{V}_d \end{bmatrix}}$$

$\lambda_0 = 1$

$\lambda_1 = a$

$\lambda_2 = a^2$

$a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$

---

$$[Z_c] = \begin{bmatrix} R + j\omega(L+2M) & & 0 \\ & \underbrace{\overset{Z_1 + aZ_{12} + a^2 Z_{13}}{R + j\omega L + j\omega M(\underbrace{a+a^2}_{-1})}}_{R + j\omega(L-M)} & \\ 0 & & \underbrace{\overset{Z_1 + a^2 Z_{12} + (a^2)^2 Z_{13}}{R + j\omega L + j\omega M(\underset{a}{a^4} + \underset{a^2}{a^5})}}_{R + j\omega(L-M)} \end{bmatrix}$$

$(a^2)^2 = a^4 = a$ ?

$Z_1 = R + j\omega L$
$Z_{12} = j\omega M$
$Z_{13} = j\omega M$

## ·4 – Diagonalización de matrices circulantes, simétricas, de orden 3.

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_{12} & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_1 & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{12} & Z_1 \end{bmatrix}$$

→ Valores propios de $[Z]$.

·4.1 Para encontrar los autovalores de $[Z]$

$$0 = \det\left([Z] - \lambda [I]\right) = \det \begin{bmatrix} Z_1-\lambda & Z_{12} & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_1-\lambda & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{12} & Z_1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\boxed{(Z_1-\lambda)^3 + 2Z_{12}^3 - 3Z_{12}^2(Z_1-\lambda) = 0}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= Z_1 + 2Z_{12} \\ \lambda_2 = \lambda_3 &= Z_1 - Z_{12} \end{aligned}\right\} \text{raíces}$$

$\lambda_1$: $$(\cancel{Z_1} - \cancel{Z_1} - 2Z_{12})^3 + 2Z_{12}^3 - 3Z_{12}^2(\cancel{Z_1} - \cancel{Z_1} - 2Z_{12}) =$$

$$-8Z_{12}^3 + 2Z_{12}^3 + 6Z_{12}^3 \equiv 0$$

$\lambda_2$: $$(\cancel{Z_1} - \cancel{Z_1} + Z_{12})^3 + 2Z_{12}^3 - 3Z_{12}^2(\cancel{Z_1} - \cancel{Z_1} + Z_{12}) = Z_{12}^3 + 2Z_{12}^3 - 3Z_{12}^3 = 0$$

$$\left[\lambda - (Z_1 + 2Z_{12})\right]\left[\lambda - (Z_1 - Z_{12})\right]^2 =$$

$$= \left[\lambda - (Z_1 + 2Z_{12})\right]\left[\lambda^2 + (Z_1 - Z_{12})^2 - 2\lambda(Z_1 - Z_{12})\right] =$$

$$= \lambda^3 + (Z_1 - Z_{12})^2\lambda - 2\lambda^2(Z_1 - Z_{12}) - (Z_1 + 2Z_{12})\lambda^2 +$$

$$\to (Z_1 - \lambda)(Z_1^2 + \lambda^2 - 2Z_1\lambda) + 2Z_{12}^3 - 3Z_1Z_{12}^2 + 3Z_{12}^2\lambda = 0$$

$$Z_1^3 + \lambda^2 Z_1 - 2Z_1^2\lambda - Z_1^2\lambda - \lambda^3 + 2Z_1\lambda^2 + 2Z_{12}^3 - 3Z_1Z_{12}^2 + 3Z_{12}^2\lambda = 0$$

$$\boxed{-\lambda^3 + 3Z_1\lambda^2 + 3(Z_{12}^2 - Z_1^2)\lambda + (Z_1^3 + 2Z_{12}^3 - 3Z_1Z_{12}^2) = 0}$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $-1$ | $3Z_1$ | $3(Z_{12}^2 - Z_1^2)$ | $Z_1^3 + 2Z_{12}^3 - 3Z_1Z_{12}$ |
| $Z_1 + 2Z_{12}$ | | $-Z_1 - 2Z_{12}$ | $2Z_1^2 - \cancel{2Z_1Z_{12}} + \cancel{4}Z_1Z_{12}^2 - 4Z_{12}^2$ | $-Z_1^3 + \cancel{2Z_1^2Z_{12}} - Z_1Z_{12}^2 - \cancel{2Z_1^2Z_{12}} + 4Z_1Z_{12}^2 - 2Z_{12}^3$ |
| | $-1$ | $2Z_1 - 2Z_{12}$ | $-Z_1^2 + 2Z_1Z_{12} - Z_{12}^2$ | $0$ |

La eq. característica (polinomio característico) queda:

$$-\left[\lambda - (Z_1+2Z_{12})\right]\Big[\underbrace{\lambda^2 - 2(Z_1-Z_{12})\lambda + (Z_1-Z_{12})^2}_{\left[\lambda-(Z_1-Z_{12})\right]^2}\Big] = 0.$$

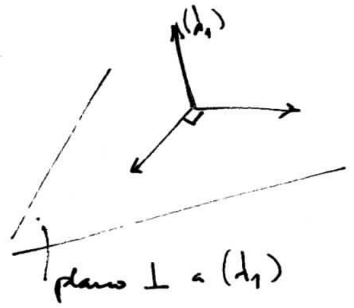
Por lo cual se tiene

$\lambda_1 = Z_1 + 2Z_{12}$ raíz simple.

$\lambda_2 = \lambda_3 = Z_1 - Z_{12}$ raíz doble.

---

En este caso se va a tener un conjunto <u>infinito</u> de vectores propios: Todo conjunto linealmente independiente de 2 vectores en un plano ortogonal (a $\lambda_1$) al vector propio asociado a $\lambda_1$, junto con dicho vector, constituye una base válida de vectores propios.-




Si queremos tener una base ortonormal para que la matriz de transformación sea unitaria u ortogonal, basta elegir 2 vectores ortogonales en ese plano.

En la práctica esto significa que existe una infinidad de transformaciones posibles, todas coinciden en la definición de la componente homopolar, (a menos de una cte) pero la elección de las otras dos componentes es en definitiva <u>libre</u>.

Puede mostrarse que todas las transformaciones en este caso responden a la forma general

$$[T] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2-\beta_2 & \alpha_3-\beta_3 \end{bmatrix}$$

con $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_3} \neq \dfrac{\beta_2}{\beta_3}$ para que la matriz sea no singular.

Si además se desea conservar la invariancia de la potencia, deberán agregarse las condiciones de ortogonalidad o "unitariedad".

De uso práctico :

[F]: FORTESCUE $(d, i, h)$ (No conserva la invariancia de la potencia)
$(1, -1, 0)$

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{V}_h \\ \vec{V}_i \\ \vec{V}_d \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \vec{V}_h \\ \vec{V}_i \\ \vec{V}_d \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_h \\ \vec{V}_i \\ \vec{V}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + 2Z_{12} & 0 & 0 \\ 0 & Z_1 - Z_{12} & 0 \\ 0 & 0 & Z_1 - Z_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I}_h \\ \vec{I}_i \\ \vec{I}_d \end{bmatrix} \qquad [\vec{V}] = F[\vec{V}_c]$$

FORTESCUE normalizada : $[F_1] = \frac{1}{\sqrt{3}} [F]$

[C]: EDITH CLARKE $(\alpha, \beta, 0)$
h.

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 1 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{V}_0 \\ \vec{V}_\alpha \\ \vec{V}_\beta \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \vec{V}_0 \\ \vec{V}_\alpha \\ \vec{V}_\beta \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{V}_1 \\ \vec{V}_2 \\ \vec{V}_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_0 \\ \vec{V}_\alpha \\ \vec{V}_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + 2Z_{12} & & \\ & Z_1 - Z_{12} & \\ & & Z_1 - Z_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I}_0 \\ \vec{I}_\alpha \\ \vec{I}_\beta \end{bmatrix} \qquad [\vec{V}] = [C][\vec{V}_c]$$

CLARKE normalizada : CONCORDIA.

$$[C_1] = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1/\sqrt{2} & \sqrt{3/2} \\ 1 & -1/\sqrt{2} & \sqrt{3/2} \end{bmatrix} \qquad [C_1]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3/2} & -\sqrt{3/2} \end{bmatrix}$$