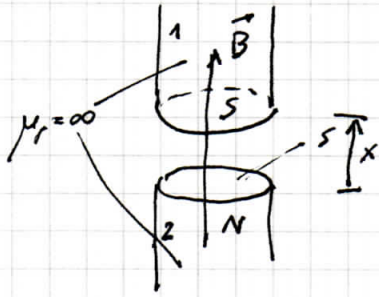


Algunas observaciones acerca de las fuerzas de origen magnético

1) Fuerza entre los polos de un imán



Hip: • Dos piezas de $\mu_r = \infty$ separadas por un entrehierro x .

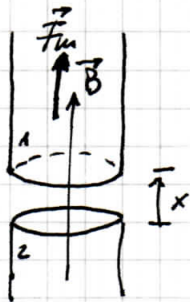
- Las piezas son de igual sección recta S .
- Están recorridas por un flujo \vec{B} (el circuito magnético se cierra por partes no representadas en el esquema: las líneas de inducción \vec{B} están siempre cerradas sobre sí mismas)
- El entrehierro x es lo suficientemente pequeño como para poder suponer sin gran error que el campo \vec{B} ($= \mu_0 \vec{H}$) en el entrehierro es uniforme.

Se calculará la fuerza entre ambas piezas ("polos") aplicando al principio de los trabajos virtuales y conservación de la energía.

Obs: Con el sentido de flujo adoptado por Lipietz: \vec{B} dirigido de la pieza 2 a la pieza 1, la pieza 2 es un polo N (Norte) y la 1 un polo S (Sur). (Las líneas de campo magnético "salen" de los polos N y "entran" en los polos S).

Para aplicar los resultados de convertidores de energía deducidos anteriormente supondremos además:

- Parte 2 es fija, Parte 1 móvil. $\therefore x$ es la coordenada de posición de 1.



- La fuerza \vec{F}_m de origen magnético está aplicada sobre la pieza 1 (móvil), en el sentido de la figura ($F_m > 0$ en igual sentido que $x > 0$), de modo de tener la misma convención de signos que en los convertidores EM.

$$F_m = - \left. \frac{\partial W_s}{\partial x} \right|_{\psi = \text{cte}}$$

No se puede aplicar la expresión con la co-energía W_s porque no conocemos la corriente.

$$W_s = \left(\frac{\partial W}{\partial \text{Vol}} \right) \text{Vol} = \left(\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \right) \cdot Sx$$

Vol de entrehierro

$$\psi = B \cdot S \quad \text{si } \begin{cases} B = \text{cte} \\ S = \text{cte} \end{cases} \Leftrightarrow \text{Campo uniforme} \Rightarrow \psi = \text{cte}$$

$$F_m = - \left. \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \right) \cdot Sx \right] \right|_{\psi = \text{cte}} = - \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \cdot S < 0$$

$F_m < 0 \rightarrow$ Es una fuerza de atracción de 1 hacia 2. (Coincidiendo con la intuición).

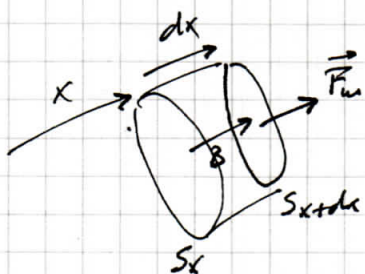
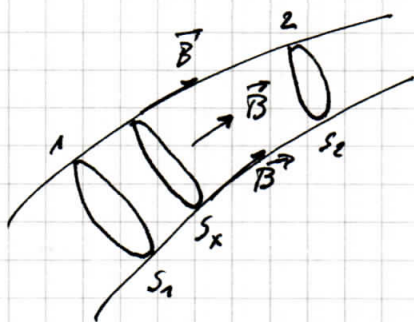
Por principio de acción y reacción, si 2 ejerce sobre 1 \vec{F}_{m1} , 1 ejerce sobre 2 \vec{F}_{m2}
 $\vec{F}_{m2} = -\vec{F}_{m1}$



\Rightarrow Es una fuerza de atracción en ambas partes, de valor absoluto $= \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} S$

Obs: F_m no depende de x ! \Rightarrow Resultado de suponer un campo \vec{B} uniforme para cualquier valor de x . (Válido sólo si x pequeño!)

2) Presión ^{magnética} longitudinal en un tubo de inducción.



Consideremos una sección S_x de un tubo de inducción magnética en un material de μ_r

Queremos determinar la fuerza de origen magnético que el tubo de inducción aplica sobre la sección S_x . Para eso consideramos un desplazamiento virtual $x \rightarrow x+dx$ de esa sección dentro del tubo de inducción.

Si $dx \rightarrow 0$, admitiremos $S_{x+dx} = S_x$ y como hay conservación de flujo dentro del tubo de inducción, si la sección S_x es lo suficientemente pequeña, admitiremos \vec{B} uniforme en el volumen $S_x \cdot dx$

El trabajo necesario para desplazar dx la sección S_x en el sentido indicado

$$dW_m = F_m \cdot dx \quad (\text{con } F_m \text{ y } dx \text{ de los sentidos indicados})$$

La variación de energía magnética almacenada en el tubo de inducción por el desplazamiento dx sería $dW_s = \left(\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu_r} \right) \cdot S_x dx$

Si no hay ninguna energía externa aportada para ese desplazamiento:

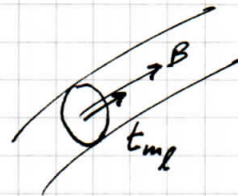
$$dW_m + dW_s = 0 \Rightarrow F_m \cdot dx + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu_r} S_x dx = 0$$

$$\boxed{F_m = - \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu_r} \cdot S_x} < 0$$

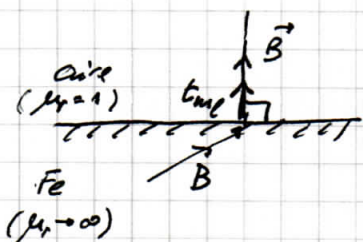
Nuevamente, esta fuerza magnética tiende a "acortar" los tubos de inducción.

F_{mag} es el resultado de una tensión o presión de origen magnético. En este caso se trata de una tensión longitudinal (en la misma dirección de las líneas de inducción o flujo).

$$|t_{mag}| = \left| \frac{F_{mag}}{S_x} \right| = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu_r}$$



Así, en una interfaz aire-hierro (o material ferromagnético de $\mu_r \rightarrow \infty$), donde no existan corrientes en la superficie:

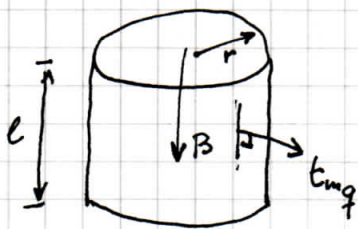


t_{mag} , longitudinal con \vec{B} , es normal a la interfaz. (Ley de Snell de refracción de \vec{B} , $\vec{B} \perp$ superficie).

$$t_n = t_{mag} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad \text{con } B \text{ medido en el aire.}$$

t_n : presión normal ejercida sobre el Fe.

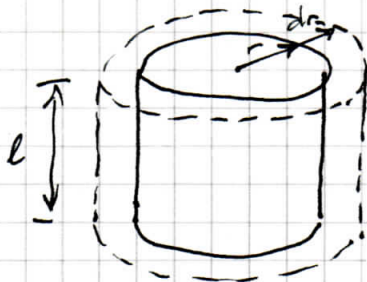
3) Presión magnética transversal en un tubo de inducción



Ahora consideramos un tramo de tubo de inducción de longitud l , y vamos a calcular la presión o tensión de origen magnético t_{mag} que la inducción B aplica sobre la superficie lateral del tubo de inducción.

Para simplificar consideramos un volumen de tubo de inducción lo suficientemente pequeño como para suponer \vec{B} un campo uniforme dentro del tubo.

Además supondremos que es de sección circular, de radio r , y de longitud l (tubo cilíndrico).



Para el cálculo del esfuerzo normal t_{mag} sobre una generatriz del cilindro consideramos el desplazamiento virtual consistente en pasar la superficie lateral del tubo, de radio r a $r+dr$.

Supondremos que el flujo correspondiente al tubo de inducción inicial (de radio r) permanece igual para la expansión a $r+dr$. (Sigues siendo el mismo tubo de inducción, confinando el mismo flujo).

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= B \cdot S = B \cdot \pi r^2 \\ &\approx B \cdot \pi (r+dr)^2 \end{aligned} \right\} B = \frac{\Phi}{\pi r^2}$$

$$W_s = \left(\frac{\partial W_s}{\partial \text{Vol}} \right) \text{Vol} = \left(\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu_r} \right) \cdot \pi r^2 l$$

$$W_{s_r} = \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{\Phi^2}{\pi^2 r^4} \right) \cdot \pi r^2 l = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{\mu_0 \mu_r} \cdot \frac{l}{\pi r^2}$$

$$W_{s_{r+dr}} = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{\mu_0 \mu_r} \frac{l}{\pi (r+dr)^2}$$

La variación de energía magnética dueenada a $\Phi = \text{cte}$:

$$dW_s = W_{s_{r+dr}} - W_{s_r} = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{\mu_0 \mu_r} \cdot \frac{l}{\pi} \left(\frac{1}{(r+dr)^2} - \frac{1}{r^2} \right)$$

$$\frac{1}{(r+dr)^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{r^2 - (r+dr)^2}{r^2 (r+dr)^2} \approx \frac{r^2 - r^2 - 2rdr - dr^2}{r^2 (r+dr)^2} \approx - \frac{2rdr}{r^4} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ dr \ll r \end{matrix}$$

$$dW_s \approx - \frac{\Phi^2}{\mu_0 \mu_r} \cdot \frac{l}{\pi} \frac{dr}{r^3}$$

El trabajo mecánico realizado por la presión (tensión) transversal t_{mg}

$$dW_m = \underbrace{t_{mg} \cdot (2\pi r \cdot l)}_{\substack{\text{Sup. lateral} \\ \text{Fuerza total}}} \cdot \underbrace{dr}_{\text{desplazamiento}}$$

Como no hay aporte de energía externa, $\boxed{dW_m + dW_s = 0}$

$$dW_m + dW_s = t_{mg} \cdot 2\pi l r dr - \frac{\Phi^2}{\mu_0 \mu_r} \cdot \frac{l}{\pi} \frac{dr}{r^3} = 0$$

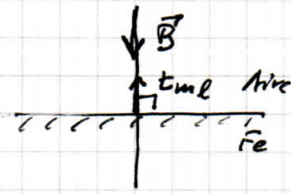
$$\Rightarrow t_{mg} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{\Phi^2}{2\pi^2 r^4}, \quad \text{como } \Phi = B \cdot \pi r^2$$

$$\Rightarrow \boxed{t_{mg} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu_r}}$$

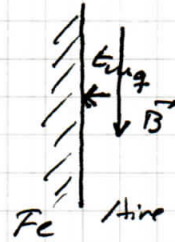
$$|t_{mg}| = |t_{mg}| = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu_r}$$

Pero se observa que la fuerza longitudinal en el tubo de inducción es de compresión (atracción) mientras que la fuerza transversal es de expansión ("repulsión" de las líneas de flujo).

Entonces:



$\vec{B} \perp \vec{F}_e$
Sólo actúa t_{mg}



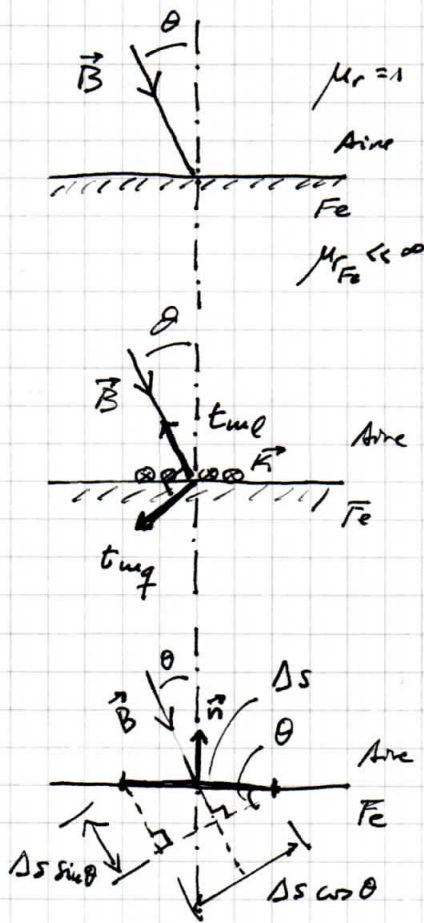
$\vec{B} \parallel \vec{F}_e$
Sólo actúa t_{mg}
 $t_{mg} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$

Situación común de incidencia del campo magnético en el Fe

$$t_{mg} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

Esta situación puede darse p.ej. para el flujo de fugas de un transformador, en torno a una columna de Fe.

4) Presión magnética ejercida para incidencia en ángulo cualquiera.



Excluido el caso de $\vec{B} \parallel \vec{F}_e$, que es un modelado aproximado de algunos casos de fugas, para que $\theta \neq 0$ tendría que ser:

- $\mu_{r, Fe}$ muy baja (≈ 10 a 100), posible sólo en caso de fuerte saturación
- J densidad de corriente \vec{K} (A/m) en la interfaz de separación Air-Fe

Entonces sobre el Fe actúan las dos componentes, t_{mg} y t_{ml} . Para el cálculo de la fuerza (tensión) aplicada sobre el Fe, consideramos un elemento Δs de superficie de la interfaz.

Sobre Δs se aplican 2 fuerzas \perp :

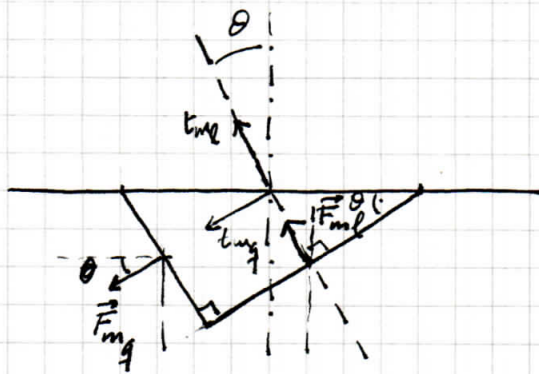
$$\vec{F}_n \perp \vec{F}_e$$

$$\vec{F}_t \parallel \vec{F}_e$$

$$|\vec{F}_n| = \underbrace{(t_{ml} \cdot \Delta s \cos \theta)}_{\substack{\text{Fuerza longitudinal} \\ \text{sobre } \Delta s \cos \theta \\ (\text{área } \perp \vec{B})}} \cos \theta - \underbrace{(t_{mg} \cdot \Delta s \sin \theta)}_{\substack{\text{Fuerza transversal} \\ \text{sobre } \Delta s \sin \theta \\ (\text{área } \parallel \vec{B})}} \sin \theta$$

↑ proyectada según \vec{n}

$$|\vec{F}_t| = \underbrace{(t_{ml} \cdot \Delta s \cos \theta)}_{F_{ml}} \sin \theta + \underbrace{(t_{mg} \cdot \Delta s \sin \theta)}_{F_{mg}} \cos \theta$$



$$|\vec{F}_n| = F_{mg} \cos \theta - F_{mg} \sin \theta$$

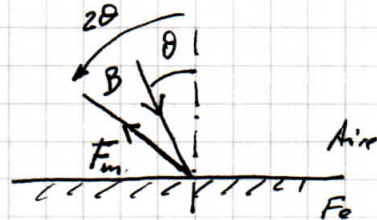
$$|\vec{F}_t| = F_{mg} \sin \theta + F_{mg} \cos \theta$$

$$\Rightarrow t_n = \frac{F_n}{\Delta s}, \quad t_t = \frac{F_t}{\Delta s}$$

$$t_n = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad ; \quad t_t = \frac{B^2}{\mu_0} \sin \theta \cos \theta$$

$$t_n = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \cos 2\theta$$

$$t_t = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \sin 2\theta$$



El ángulo de aplicación de la fuerza F_m de origen magnético es 2θ , si el ángulo de incidencia del campo magnético en el aire es θ (campo $\vec{B} \cdot \vec{H}$)

Si $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ en el aire, se puede identificar las componentes normal y tangencial de \vec{B} y \vec{H} en la interfaz Aire-Fe

$$\begin{aligned} B_n &= B \cos \theta & H_n &= H \cos \theta \\ B_t &= B \sin \theta & H_t &= H \sin \theta \end{aligned}$$

Entonces:

$$t_n = \frac{1}{2} (B_n \cdot H_n - B_t \cdot H_t)$$

$$t_t = B_n \cdot H_t = B_t \cdot H_n$$

← Estas expresiones son también las que resultan de aplicación del Tensor de Maxwell en la interfaz Aire-Fe

$$\begin{aligned} \text{Si } \left. \begin{aligned} B &= 1 \text{ T} \\ \theta &= 0^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow t_n &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi \cdot 10^7} \text{ J/m}^3 \approx 4 \cdot 10^5 \text{ J/m}^3 \\ &= 4 \cdot 10^5 \text{ Nm/m}^3 = 4 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \\ &= 40 \text{ N/cm}^2 = 4 \text{ kg/cm}^2 = 40 \text{ ton/m}^2 \end{aligned}$$