Ju., 9/V

CAP. 4 - Fundamentos de la Conversión Electromecánica de la energía

xej 1 encendedor piezoeléctrico (?): se acciona mecánicamente y produce electricidad

Electromagnética ⟷ mecánica

Nos interesarán los dispositivos con energía magn. almacenada.

$$\frac{\partial W_m}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}$$

$$\frac{\partial W_e}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

$\mu = \mu_0 \mu_r$; $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ (H/m) ?

$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$; $\varepsilon_0 \cong 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ (F/m) ?

→ Energía magnética

a) aire, conductores $\mu_r = 1$

$B = 1T$ (razonable)

$$\frac{\partial W_m}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{1^2}{4\pi 10^{-7}} = 3{,}98 \cdot 10^5 \ J/m^3 \approx \boxed{4 \cdot 10^5 \ J/m^3}$$

b) Hierro, mat. ferromagnéticos

$\mu_r = 2000$

Tendré < densidad de energ. magn. en el Fe q' en el aire.

$$\frac{\partial W_m}{\partial \tau} \leq 2 \cdot 10^2 \ J/m^3$$

→ Energía eléctrica

Es difícil fabricar B intensos, no así E intensos.

" " encontrar materiales q' soporten " " (x aislantes, se rompen); en 1 conductor se → en seguida a ΔPotencial = 0

a) aire $E_{max} \simeq 32$ Kv/cm (orden de la ruptura dieléctrica)

$= 32 \cdot 10^3 \cdot 10^2$ V/m $= 3{,}2 \cdot 10^6$ V/m

Tomo un $E = 10$ Kv/cm (1/3 del ant.) $= 10^6$ V/m

$\varepsilon_r = 1$

$$\frac{\partial W_e}{\partial \tau} = \frac{1}{2} 8{,}8 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{12} = \boxed{4{,}4 \ J/m^3}$$

→ comparando con $4 \cdot 10^5 \ J/m^3$ veo q' el otro es >>. (energ. magnét.)

mica: $E_{máx} \simeq 600$ KV/cm ; $\varepsilon_r = 5$

$= 6 \cdot 10^7$ V/m

$$\frac{\partial W_e}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\cdot 5 \cdot 8{,}8\cdot 10^{-12}\,(2\cdot 10^{7})^{2} = 88\cdot 10^{2} \simeq 8{,}8\cdot 10^{3} \simeq 10^{4}\ J/m^{3}$$

↑ tomo 1/3 Emáx

↳ Es 1 poco mayor pero aún es chico (aunque comparable)

Supongo entonces q' la energía está almacenada en el aire en forma magnética: $\boxed{\frac{\partial W_e}{\partial \tau} \ll \frac{\partial W_m}{\partial \tau}}$ ← x unidad de volumen

Vimos la energía almacenada en el aislante.

a) en los conductores

$\rho = 2\cdot 10^{-8}\ \Omega m$

$j = (\leq)\ 10\ A/mm^{2} = 10^{7} A/m^{2}$ (gralm. $3 A/mm^{2}$ refrigerado por aire, $5\ A/mm^{2}$ refr. x agua o aire forzado)

↳ cota superior.

Ley de Ohm: $E = \rho \cdot j = 2\cdot 10^{-8}\cdot 10^{7}\ \Omega m \frac{A}{m^{2}} = 0{,}2\ V/m$

Comparado con $10^{6}\ V/m$ (anterior)!

$\Rightarrow \frac{\partial W_e}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\cdot 8{,}8\cdot 10^{-12}\,(0{,}2)^{2} = 18\cdot 10^{-14} = 1{,}8\cdot 10^{-13}\ J/m^{3} \Rightarrow$ el $\vec{E}$ no juega.

→ Densidad de pérdidas Joule en los conductores.

$\rho j^{2} = 2\cdot 10^{-8}\cdot (10^{7})^{2} = 2\cdot 10^{6}\ W/m^{3}$ (watt = ΩA^{2})

$\Omega\cdot m \quad \frac{A^{2}}{m^{4}} \qquad \cong 2 MW/m^{3} \rightarrow$ es importante ($\cong 1$ MW/m)

(aunque en realidad $10^{7} = j$ es 1 máx, es menor en realidad)

$\Rightarrow$ esto limita el hacer máquinas grandes. Hay q' evacuar el calor y la refrigeración es 1 problema.

$\frac{Vuelts}{Sg} = \frac{2\pi\ rd}{S}$

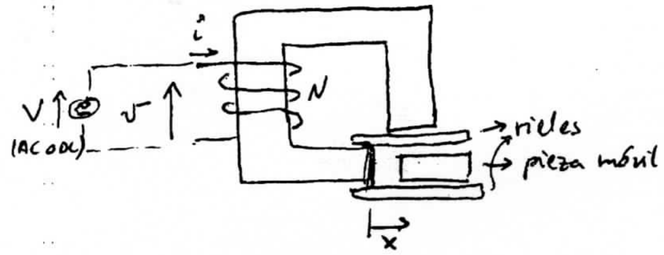
Trabajo en 1 vuelta: $F.(2\pi\, r) = 2\pi\cdot C$

$P = (Trabajo/V)\cdot(V/s) = 2\pi C \cdot 2\pi/s$

La energía eléctrica de las líneas de A.T. va x el aire. Los conductores le dan forma al campo E.M. (⇒ pérdidas, se verifican los ppios. termod.!). Luego llega al trafo, q'no es conveniente q' tenga e.h: su energ. no está en el Fe ni en los conductores (donde?). La energ. está almacenada en los aislantes

Si el e.h. es grande ⇒ I > (A vuelta) ⇒ muchas espiras, + volumen de Fe ⇒ + pérd.
o I elevadas (↑ pérd. Joule)
⇒ el e.h. debe ser chico, para no tener I grandes.
El Fe garantiza una $\vec{B}$ alta dentro del Fe, q' enfilo a un e.h (donde me interesa), le doy "forma" al campo.
$\vec{B}$ alta en el Fe ⇒ las $\vec{F}$ se ejercen sobre éste, y no sobre los conductores.

→ Conservación de la energía.



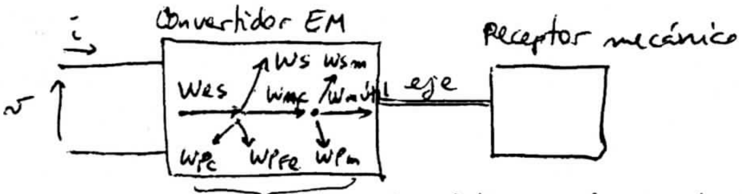
conv. electromagnética ⟷ mecánica
$W_{es_{ource}}$: En. eléctrica tomada de la fuente
W_{pcond}: En disipada p/efecto Joule.
W_{pFe}: " " en el hierro {histéresis, corriente de Foucault}
W_{stored}: " almacenada en el {hierro ↳ (pequeña, 1000 veces < q' en el aire, x'o está) / campo magnético}

W_{mc}: En. convertida en mecánica (conservación de la energía)

$$\boxed{W_{es} = \underbrace{W_{pc} + W_{pFe}}_{disip.} + \underbrace{W_s}_{almac.} + \underbrace{W_{mc}}_{q' \to mec.}}$$

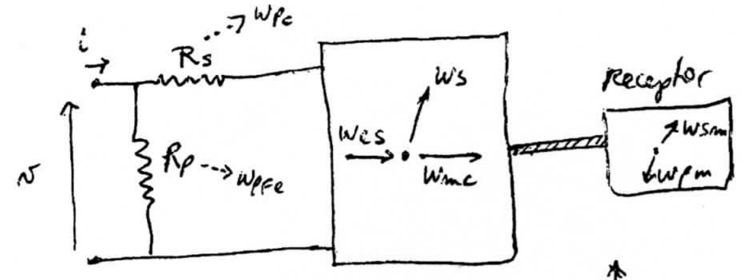
$$\boxed{W_{mc} = \underbrace{W_{Pmec}}_{pérd} + \underbrace{W_{sm}}_{almac} + \underbrace{W_{m\,útil}}_{\to cinética\ x\ ej}}$$

almac (asociada a la posición de la pieza (respecto a los campos; gravedad y otros)



pérdidas (no interesan demasiado ⇒ considero: (H) convertidor EM conservativo)

> coloco las pérdidas fuera del convertidor.



Puedo colocar toda la masa, el momento de inercia, del lado del receptor (representa la wmec. útil (?))

$\Rightarrow W_{es} = W_s + W_{mc}$ $\Rightarrow$ $\boxed{dW_e = dW_s + dW_m}$

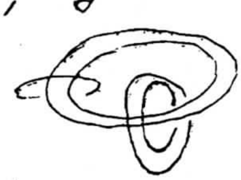
energ. eléctr. — almacenada en $\vec{B}$. — energ. mec. (la considerada saliente (+)) ?

Puedo gralizarlo con varias entradas eléctricas, y varias utilizaciones mecánicas de la energía.

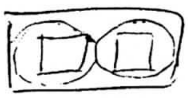
$$\sum_{i=1}^{m} dW_{ei} = dW_s + \sum_{k=1}^{n} dW_{mk}$$

$\hookrightarrow$ todas las entradas eléctricas y magnéticas están vinculadas por 1 solo $\vec{B}$. (no es Σ)

No hay fuentes puntuales de $\vec{B}$, hay tubos de inducción, "enganchados" con las corrientes:

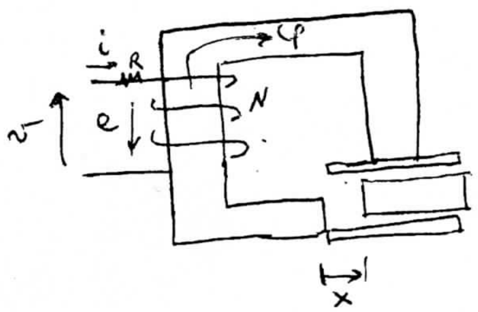


Puedo tener 2 tubos yuxtapuestos: ∞



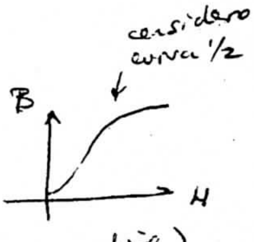
pero no enganchados como 1 cadena

$\Rightarrow$ Solo tendré un $\vec{B}$, donde ver los efectos de todas las entradas eléctricas y salidas mecánicas.



Hip.: Fe: • No tiene fugas

• No lineal →



• No hay pérdidas (conservativo) ni en el Fe ni en el Cu.

• Bobinado y núcleo magnético indeformables.

• $\partial W_e \ll \partial W_m$ (desprecio efectos de $\vec{E}$)

$v(t) = R . i(t) - e(t)$ → flujo total enlazado

$e(t) = -\frac{d\Psi}{dt}$, $\Psi = N\varphi$ → flujo enlazado en el núcleo.

$v(t) = R . i(t) + N\frac{d\varphi}{dt}$

$P_e = \frac{dW_e}{dt} = -e(t)\,i(t) = +\frac{d\Psi}{dt}\,i(t)$

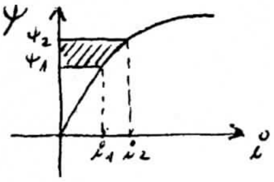
$dW_e = i\,d\Psi$.

$\begin{cases} p = v(t) . i(t) = \text{entregada p/ fuente} \\ p_e = -e(t) . i(t) = \text{entra al convertidor conservativo.} \end{cases}$ $= \frac{d\Psi}{dt} . i(t)$

$\boxed{dWe = p_e . dt = i(t)\,d\Psi} = N\,i(t)\,d\varphi = \mathcal{R} . \varphi\,d\varphi$

Ley Hopkinson (recta) : $\underset{\sum Hl}{\underbrace{\mathcal{R}\varphi}} = Ni$

Energía y Co-energía en el campo magnético



$\Delta We_{1\to 2} = \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} i\,d\Psi$ (consumida, q' entra al convertidor)

Si inmovilizo la parte móvil : $x = x_0$ fijo

⇒ no tengo Δenerg. mec.

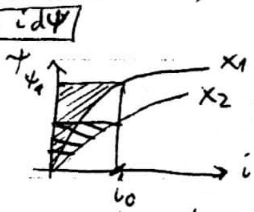
El x ⇒ cuál es la curva

se achata con + e.h.

Entonces, inmovilizo x ⇒ $dWe = dWs$. (eléctrica)

Sup. $v(t) = v_0$ fija $\qquad \boxed{\underset{\text{almacenada}}{dWs} = i\,d\Psi}$

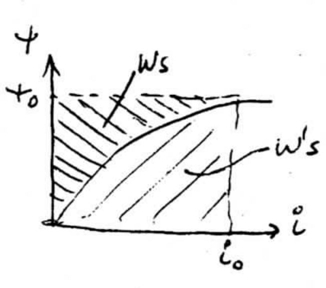
$i = \frac{v_0}{R}$ (parte móvil fija)



i_0 → no la puedo modificar cuando llego al equilibrio final ($i = \frac{v_0}{R}$)

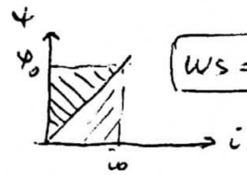
Co-energía

$\boxed{dW's \underset{\text{def.}}{=} \Psi\,di}$

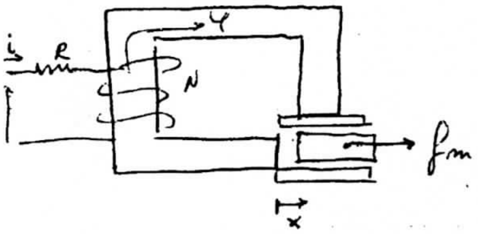


$\boxed{W's = \int_0^{i_0} \Psi\,di}$

réf. lineal : (no hay saturación) ⇒ 1 recta :



$\boxed{Ws = W's}$



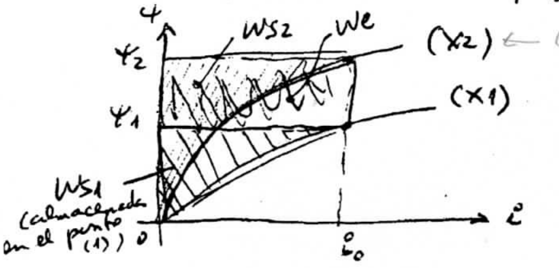
$dW_m = f_m \cdot dx$

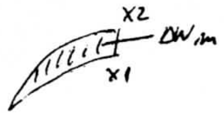
$\boxed{dW_e = dW_s + dW_m}$

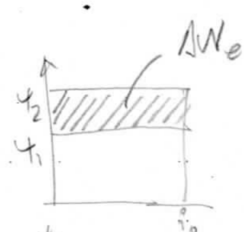
$f_m = \dfrac{dW_m}{dx}$

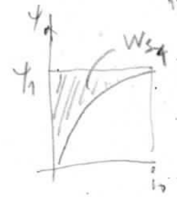
Descompongo el movimiento en 2 casos hipotéticos:

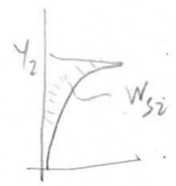
1) Desplazamiento a corriente cte. (es 1 (H), no puedo mover la parte móvil (varía flujo, $v\frac{d\varphi}{dt}$) sin variar la corriente)









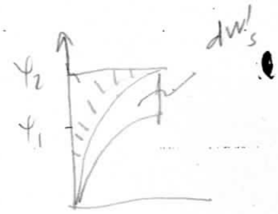


$F_m =$ fuerza media durante el desplazamiento $= \dfrac{\Delta W_m}{(x_2 - x_1)} = \dfrac{\Delta W_e - \Delta W_s}{x_2 - x_1}$

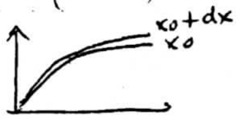
$$\Delta W_e = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} i \, d\varphi = i_0 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = i_0 (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$\Delta W_s = W_{s2} - W_{s1}$

$F_m = \dfrac{\Delta W_e + W_{s1} - W_{s2}}{(x_2 - x_1)} = \dfrac{\Delta W'_s}{(x_2 - x_1)}$ variac. de co-energía almacenada

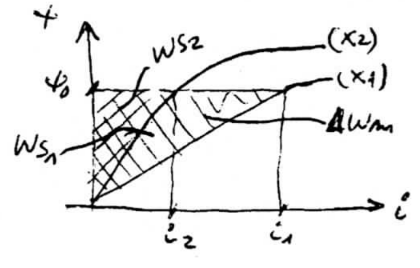


Puedo considerar:



Paso al límite ⇒ $\boxed{f_m = \dfrac{dW'_s}{dx}}$ (f. instantánea) $\underline{i = cte}$

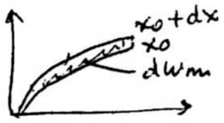
2) Desplazamiento a flujo cte.



$F_m = \dfrac{\Delta W_m}{x_2 - x_1} = \dfrac{\Delta W_e - \Delta W_s}{x_2 - x_1}$

$dW_e = i\,d\Psi \Rightarrow$ no hay energ. eléctrica consumida, con Ψ cte.

$\Rightarrow \Delta W_e = 0 \Rightarrow F_m = -\dfrac{\Delta W_S}{(x_2 - x_1)} = -\dfrac{W_{S2} - W_{S1}}{(x_2 - x_1)}$



$$f_m = \left(-\frac{dW_S}{dx}\right)_{\Psi = cte}$$

Tengo : $W_S(i, \Psi, x) = W_S(i(\Psi, x), \Psi, x)$

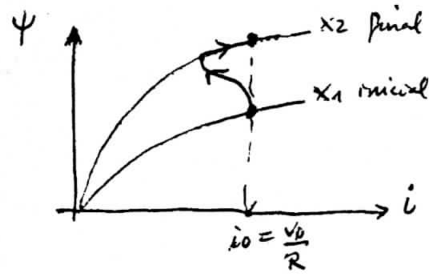
$W'_S(i, \Psi, x) = W'_S(i, \Psi(i, x), x)$

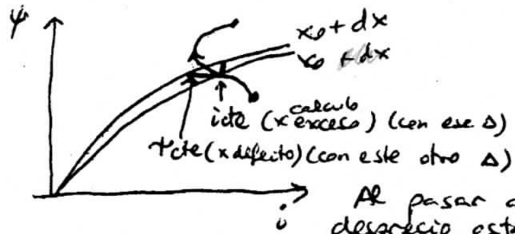
Solo 2 variables pueden ser indep., la otra estará vinculada.

Al fijar $x \Rightarrow$ fijo 1 curva $\Rightarrow$ para una $i \Rightarrow \Psi$ y viceversa.

$$\boxed{f_m = \left(\frac{\partial W'_S}{\partial x}\right)_{i = cte} = -\left(\frac{\partial W_S}{\partial x}\right)_{\Psi = cte}}$$

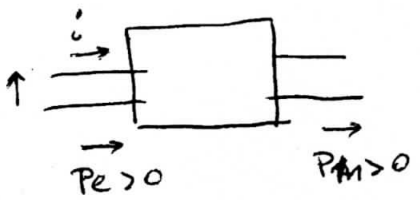
El mov. real no es con i cte o Ψ cte, es + complicado.





Al pasar al límite desprecio estas pequeñas diferencias.

MA, 14/V



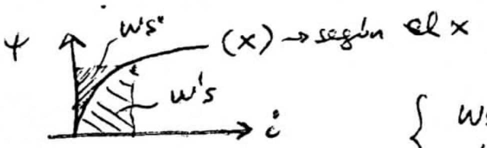
→ consideramos esta convención.

$$\boxed{dW_e = dW_s + dW_m}$$

f_m ($\vec{F}_{mec.}$) se ejerce en el sentido del movimiento

$P_m = f_m \cdot v$ ($v = \frac{dx}{dt}$)

dado $x \Rightarrow$



$$\begin{cases} W_s = W_s(i, \psi, x) \\ W'_s = W'_s(i, \psi, x) \end{cases}$$

⇒ Puedo escribirlas como funciones de 2 variables indep.:

$$\begin{cases} W_s = W_s(i, \psi(i,x), x) \\ W'_s = W'_s(\psi, i(\psi,x), x) \end{cases} \quad \Bigg\| \quad \begin{matrix} W_s(i(\psi,x), \psi, x) \\ W'_s(i, \psi(i,x), x) \end{matrix}$$

Si inmovilizada la parte móvil tenía: $dW_e = dW_s = i\,d\psi$ ($x = x_0$ fijo)

Tb.: $\boxed{dW_m} = P_m \cdot dt = \boxed{f_m \cdot dx}$

Siempre: $\boxed{dW_e = i\,d\psi}$ Conservación

Entonces: $dW_s = dW_e - dW_m = \boxed{i\,d\psi - f_m dx = dW_s}$ (siempre)

$$\boxed{i = \left(\frac{\partial W_s}{\partial \psi}\right)_{x = cte}} \qquad \boxed{f_m = -\left(\frac{\partial W_s}{\partial x}\right)_{\psi = cte}}$$

$$dW_s = \frac{\partial W_s}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial W_s}{\partial i} di$$

$$\boxed{dW_s = \underbrace{\frac{\partial W_s}{\partial x}}_{-f_m} dx + \frac{\partial W_s}{\partial \psi} d\psi}$$

$W'_s = W'_s(i, \psi(i,x), x)$

$W'_s = W'_s(i(\psi,x), \psi, x)$

$W'_s = W'_s(i, x)$

Siempre tengo: $W_s + W'_s = i\psi$ (ver gráfica, x def.)

$\Rightarrow dW_s + dW'_s = i\,d\psi + \psi\,di$

$\Rightarrow dW'_s = i\,d\psi + \psi\,di - dW_s = \cancel{i\,d\psi} + \psi\,di - \cancel{i\,d\psi} + f_m dx$

$\Rightarrow \boxed{dW'_s = \psi\,di + f_m dx}$

Tb: $dW'_s = \left(\frac{\partial W'_s}{\partial i}\right)_{x = cte} di + \left(\frac{\partial W'_s}{\partial x}\right)_{i = cte} dx$

$\Rightarrow$ $\boxed{\Psi = \left(\dfrac{\partial W'_s}{\partial i}\right)_{x=cte}}$ $\boxed{f_m = \left(\dfrac{\partial W'_s}{\partial x}\right)_{i=cte}}$

→ + fácil usar i que Ψ, pues es 1 var. externa, + fácil de controlar. (+ fácil escribir las ecuac. en f. (i)).

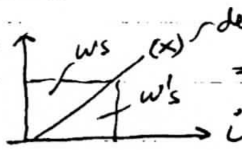
Si se trata de 1 mov. de <u>rotación</u>:

$$P_m = \overset{\text{par}}{\Gamma_m} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$dW_m = P_m \cdot dt = \Gamma_m \cdot d\theta$$

$$\Gamma_m = \left(\frac{\partial W_s}{\partial \theta}\right)_{\Psi=cte} , \quad \Gamma_m = \left(\frac{\partial W'_s}{\partial \theta}\right)_{i=cte}$$

En los <u>sistemas lineales</u>:



$\Rightarrow$ <u>$W_s = W'_s$</u> $\forall$ pto. de func.

$$\Psi = ki = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coef. de autoinducción}}}{L} i$$

(para estos sistemas en q' tengo 1 sola entrada eléctrica)

$$W_s = W'_s \Rightarrow dW'_s = dW_s = i\,d\Psi = i.\overset{\text{cte. q' dep. de x (de la curva)}}{L(x)}\,di$$

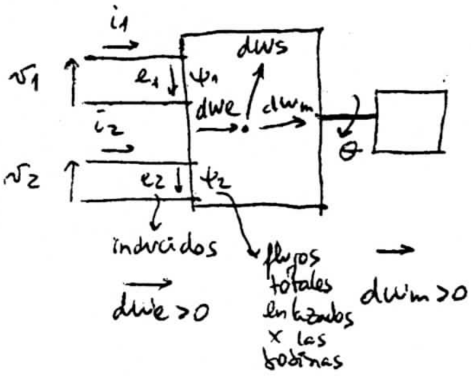
$$\Rightarrow W'_s = W_s = \int_0^i i\,L(x)\,di = \frac{1}{2} L(x)\, i^2$$

$$f_m = \left(\frac{\partial W'_s}{\partial x}\right)_{i=cte} = \boxed{\frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx} = f_m}$$

Si fuera una var. angular: $\boxed{\Gamma_m = \dfrac{1}{2} i^2 \dfrac{dL}{d\theta}}$

$\Rightarrow$ para q' haya fuerza (f_m) o par (Γ_m) debe $\exists$ir una variación de L con la posición (x o θ)

<u>Sistemas de doble excitación</u>:



Considero el convertidor conservativo (coloco las pérdidas fuera, en forma de R, etc, o en el receptor mecánico)

$$\boxed{dW_e = dW_s + dW_m}$$

Ahora: $dW_e = i_1\,d\Psi_1 + i_2\,d\Psi_2$

Tenía: $dW_e = v_1 i_1\,dt + v_2 i_2\,dt =$
$= (-e_1) i_1\,dt + (-e_2) i_2\,dt$

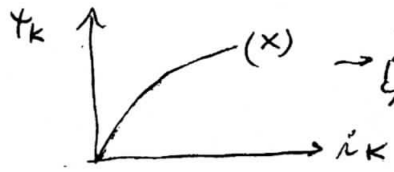
$$dW_e = \frac{d\psi_1}{dt} i_1 dt + \frac{d\psi_2}{dt} i_2 dt \Rightarrow dW_e = d\psi_1 \cdot i_1 + d\psi_2 \, i_2$$

$$e_1 = -\frac{d\psi_1}{dt} \quad , \quad e_2 = -\frac{d\psi_2}{dt}$$

$\underline{x = x_0 \text{ fijo}}$ $\Rightarrow dW_s = dW_e \Rightarrow W_s = \int dW_e = \int (i_1 d\psi_1 + i_2 d\psi_2)$

Las var. indep. serán: x y las i o bien x y los ψ

Para sistema de K excitaciones:



→ para x fija

Puedo considerar:

$$W'_s : \begin{cases} W'_s + W_s = i_1\psi_1 + i_2\psi_2 \\ dW'_s = \psi_1 di_1 + \psi_2 di_2 \end{cases} \text{ 2 def. alternativas (es lo mismo)}$$

$$W'_s = \int(\psi_1 di_1 + \psi_2 di_2)$$

$$dW_m = \Gamma_m d\theta$$

$$dW_s = dW_e - dW_m = i_1 d\psi_1 + i_2 d\psi_2 - \Gamma_m d\theta$$

$$W_s = W_s(\psi_1, \psi_2, i_1(\psi_1, \psi_2, \theta), i_2(\psi_1, \psi_2, \theta), \theta)$$

$$\Rightarrow dW_s = \left(\frac{\partial W_s}{\partial \psi_1}\right)_{\substack{\theta = cte \\ \psi_2 = cte}} \cdot d\psi_1 + \left(\frac{\partial W_s}{\partial \psi_2}\right)_{\substack{\theta = cte \\ \psi_1 = cte}} \cdot d\psi_2 + \left(\frac{\partial W_s}{\partial \theta}\right)_{\substack{\psi_1 = cte \\ \psi_2 = cte}} \cdot d\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma_m = -\left(\frac{\partial W_s}{\partial \theta}\right)_{\text{flujos constantes}}}$$

$$W'_s : \quad W'_s + W_s = i_1\psi_1 + i_2\psi_2$$

$$\Rightarrow dW'_s = -dW_s + i_1 d\psi_1 + \psi_1 di_1 + i_2 d\psi_2 + \psi_2 di_2$$

$$= -\cancel{i_1 d\psi_1} - \cancel{i_2 d\psi_2} + \Gamma_m d\theta + \cancel{i_1 d\psi_1} + \psi_1 di_1 + \cancel{i_2 d\psi_2} + \psi_2 di_2$$

$$= \Gamma_m d\theta + \psi_1 di_1 + \psi_2 di_2$$

Considero $W'_s = W'_s(\psi_1(i_1, i_2, \theta), \psi_2(i_1, i_2, \theta), i_1, i_2, \theta)$

$$\Rightarrow dW'_s = \left(\frac{\partial W'_s}{\partial i_1}\right)_{\substack{\theta = cte \\ i_2 = cte}} di_1 + \left(\frac{\partial W'_s}{\partial i_2}\right)_{\substack{\theta = cte \\ i_1 = cte}} di_2 + \left(\frac{\partial W'_s}{\partial \theta}\right)_{\substack{i_1 = cte \\ i_2 = cte}} \cdot d\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma_m = +\left(\frac{\partial W'_s}{\partial \theta}\right)_{\text{corrientes constantes}}}$$

Esto se gralizа. para n sistema con n puertos eléctricos (entradas).

$$\Rightarrow \begin{cases} \Gamma_m = -\left(\dfrac{\partial W_s(\psi_1,\dots,\psi_m,\theta)}{\partial \theta}\right)_{\psi_1,\dots,\psi_m = ctes.} \\ \Gamma_m = \left(\dfrac{\partial W'_s(i_1,\dots,i_m,\theta)}{\partial \theta}\right)_{i_1,\dots,i_m = ctes.} \end{cases}$$

$$dW'_s = [\psi]^t d[i] = \psi_1 di_1 + \psi_2 di_2 + \dots$$
$$dW'_s = ([L][i])^t d[i] = [i]^t [L]^t d[i]$$
$$d([L][i]) = [L][di] \quad \text{si } L = cte$$

Sist. lineales de doble excitación:

$$\psi_1 = L_1 . i_1 + M_{12} i_2$$
$$\psi_2 = M_{21} i_1 + L_2 i_2$$
$$M_{12} = M_{21} = M$$

Como tengo las i como var. indep. $\Rightarrow$ calculo W'_s.

$$dW'_s = \psi_1 di_1 + \psi_2 di_2 = (L_1 . i_1 + M i_2) di_1 + (M i_1 + L_2 i_2) di_2 =$$
$$= L_1 i_1 di_2 + L_2 i_2 di_2 + M \underbrace{(i_2 di_1 + i_1 di_2)}_{d(i_1 i_2)} \Rightarrow$$

← sist. lineal (pues si no no podría integrar así, las L no serían ctes.)

$$\Rightarrow W'_s = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_2 i_1$$

$$\Rightarrow \boxed{W'_s = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2}$$

← ojo es W'_s y no W_s (en un sist. lineal es igual)

Si el sist. es lineal, $W'_s = W_s$

$$\begin{cases} i_1 = a_{11}\psi_1 + a_{12}\psi_2 \\ i_2 = a_{21}\psi_1 + a_{22}\psi_2 \end{cases}$$

$$a_{11} = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} \qquad a_{22} = \frac{L_1}{L_1 L_2 - M^2} \qquad a_{21} = a_{12} = \frac{-M}{L_1 L_2 - M^2}$$

$$dW_s = i_1 d\psi_1 + i_2 d\psi_2 = (a_{11}\psi_1 + a_{12}\psi_2) d\psi_1 + (a_{21}\psi_1 + a_{22}\psi_2) d\psi_2$$

$$\Rightarrow \boxed{W_s = (W'_s) = \frac{1}{2} a_{11}\psi_1^2 + a_{12}\psi_1\psi_2 + \frac{1}{2} a_{22}\psi_2^2}$$

Se puede escribir como una forma cuadrática en el vector de corrientes o flujos.

$$[i] = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_m \end{bmatrix} \qquad [\psi] = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_m \end{bmatrix}$$

$$[\psi] = [L][i] \qquad [L] = \begin{bmatrix} L_1 & L_{12} & \cdots & L_{1m} \\ L_{21} & L_2 & \ddots & \\ \vdots & & & \\ L_{m1} & & & L_m \end{bmatrix}$$

(simétrica si el circuito es pasivo
circulante si se trata de 1 máq. eléct.)

$W_s + W_s' = \qquad = 2W_s' = 2W_s'$ (porque en lineal $W_s = W_s'$)

$= [i]^t[\psi] = [\psi]^t[i]$

$2W_s' = [i]^t[L][i]$

$\boxed{W_s' = \frac{1}{2}[i]^t[L][i]}$

$W_s = \frac{1}{2}[\psi]^t[i]$

$\boxed{W_s = \frac{1}{2}[\psi]^t[L]^{-1}[\psi]}$

$[\psi] = [L][i]$

$[L]^{-1}[\psi] = [i]$

$$W_s' = \frac{1}{2}[i]^t[L][i] \quad ; \quad W_s = \frac{1}{2}[\psi]^t[L]^{-1}[\psi]$$

Para sist. lineales: $[L] = [L(\theta)]$: depende de la posición solo, pero no de las corrientes, es cte.

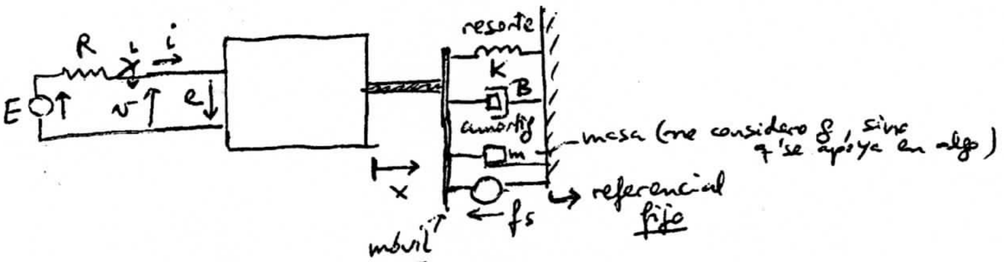
$$\Gamma_m = \left(\frac{\partial W_s'}{\partial \theta}\right)_{i=cte} \qquad \boxed{\Gamma_m = \frac{1}{2}[i]^t \frac{\partial}{\partial \theta}[L(\theta)] \cdot [i]}$$

(puede tener ff. $i(t)$, $L(\theta, t)$)

$\Rightarrow$ lo importante es q' L varíe con la posición, si no, no hay forma de tener un par o una fuerza de origen magnético.

Ecs. dinámicas de los convertidores. (caso particular)

conv. de simple excit., conservativo



$$\left.\begin{array}{l} v = E - Ri \\ v = -e \\ e = -\frac{d\psi}{dt} \\ \psi = L(x)\, i \end{array}\right\} \Rightarrow E = Ri + v = Ri + \frac{d}{dt}\left(L(x)\, i\right) = Ri(t) + \frac{d}{dt}\left(L(x)\right) i(t) + L(x)\frac{di(t)}{dt}$$

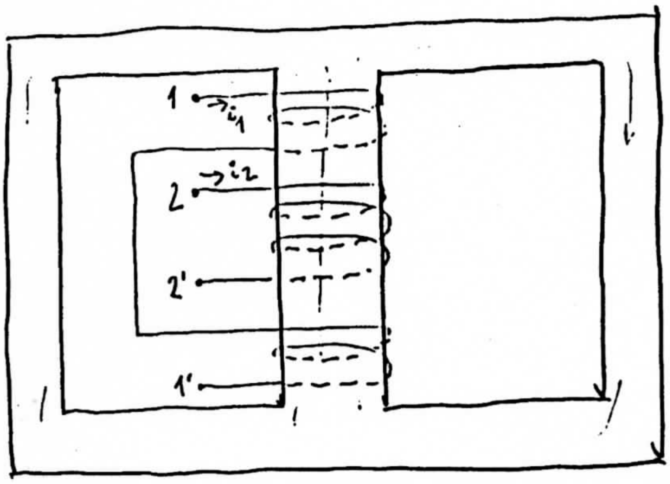
$$\Rightarrow \boxed{E = \underbrace{Ri(t)}_{\text{caída óhmica}} + \underbrace{L(x)\frac{di(t)}{dt}}_{\text{caída inductiva (con las M si fuera excitac. múltiple)}} + \frac{dL(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot i(t)} \quad \text{ec. eléctrica}$$

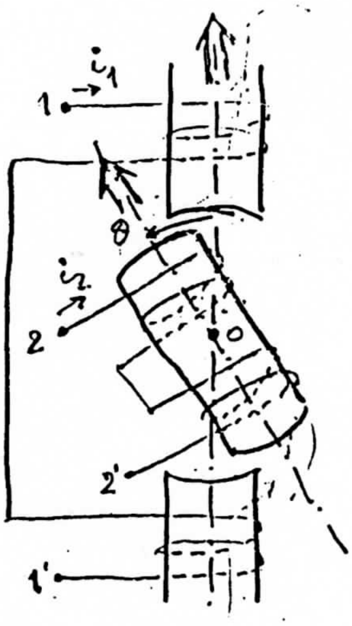
para q' sea $\neq 0$
1) $\frac{dL}{dx} \neq 0$, si no no hay fuerza $\Rightarrow$ f
2) $\dot{x} \neq 0$, debe haber movimiento $\Rightarrow f \cdot \dot{x} = P_m$ hay conversión de energía (eléctrica a mecánica)
3) $i \neq 0$

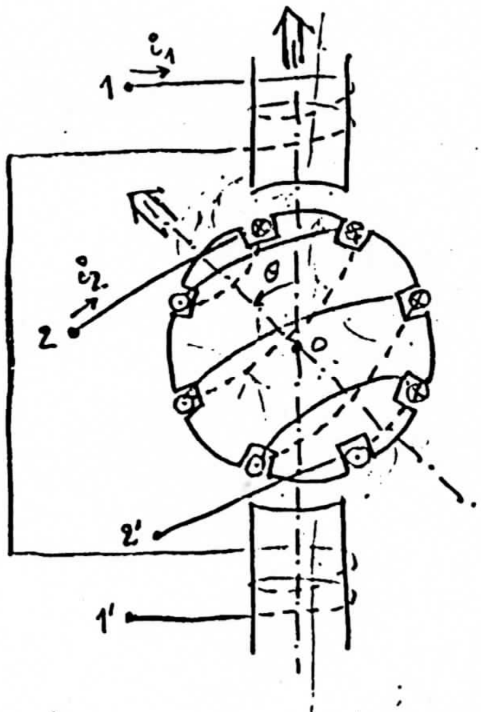
$$f_m(x,i) = \left(\frac{\partial W_s'}{\partial x}\right)_{i=cte}$$

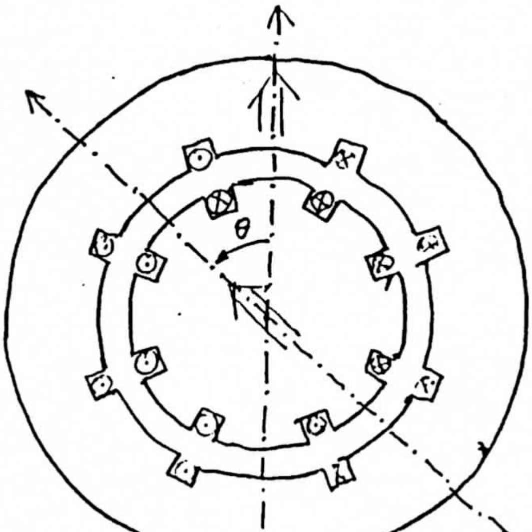
$$\boxed{f_m(x,i) = K(x - x_0) + B\frac{dx}{dt} + m\frac{d^2x}{dt^2} + f_m} \quad \text{ec. mecánica}$$

Si no hay conversión xq' no hay movim. ($\dot{x} = 0$) o bien $\frac{dL}{dx} = 0$ ($f = 0$). El 3er término es entonces una fuerza "contra electromotriz" (signo contrario a E). Quiero q' sea el + grande ($\Rightarrow$ energ. convertida). Ri despreciaré siempre. $L\frac{di}{dt}$ son inevitables.


1
i_1
2
i_2
2'
1'


i_1
1
θ
i_2
2
O
2'
1'


i_1
1
i_2
2
θ
O
2'
1'


θ

Al cerrar la llave, puedo tener $\frac{dL(x)}{dx}$, pero no $\frac{dx}{dt}$ (si no, serían $\vec{a} = \infty$)

Tengo los órdenes: 1% (1^{er} térm.), 20% (2^{do} térm.), 79% (3^{ero})

$\Rightarrow$ si no tengo el 3^{er} térm. en el arranque $\Rightarrow$ la I es muy alta pues no la está limitando x ese 3^{er} térm. (F contra e.m.)

Idem si en el motor se frena la parte móvil.

(I muy alta, se quema el motor)

Ver diapos: el trafo no hace conversión e.m. (no tiene parte móvil)

Si yo corto la parte del 1/2, los flujos se deforman

En los 2 ej: en 1 enrollo sobre el núcleo, en el otro hago pasar las espiras x las ranuras.

1^{er} caso: hay 1 posición (vertical, $\theta = 0; 180°$) de mínima reluctanc → mínimo e. h (parte de aire)

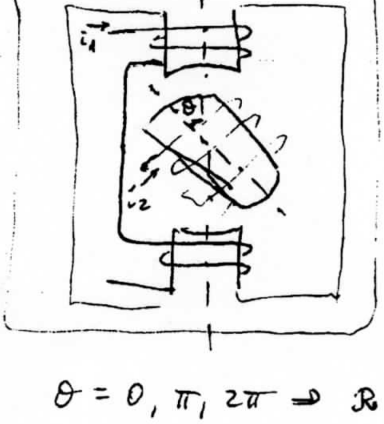
2^{do} " : Si miro desde la bobina 1 (con la 2 desenergizada) no hay posición preferencial.

Sí si miro desde la bobina 2

Luego: distribuyo el bobinado 1 del 2^{do} caso tb. x ranuras.

$\Rightarrow$ la $\mathcal{R}$ es siempre la misma, en cualquier posición (despreciando el efecto de ranurado). $\Rightarrow$ la L es la misma.

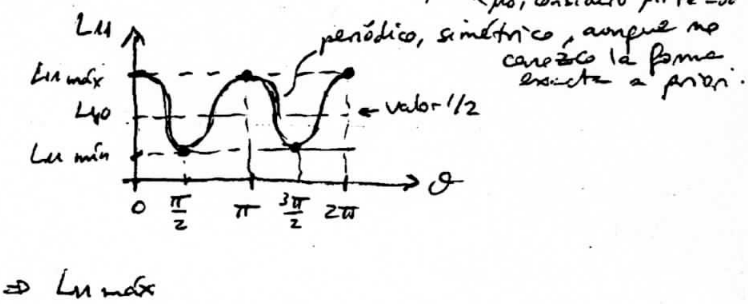
La M dependerá del θ formado entre los 2 flujos q' ambas tienden a crear en cierta dirección.



$L_{11}(\theta)$, es periódica, para determinar L_{11} considero $i_1 \neq 0$, $i_2 = 0$

$$L_{11} = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}}, \quad \mathcal{R} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{l}{S} = \mathcal{R}(\theta)$$

← μ_0, considero $\mu_{rFe} = \infty$



$\theta = 0, \pi, 2\pi \Rightarrow \mathcal{R}_{mín} \Rightarrow L_{11\,máx}$

$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \mathcal{R}_{máx} \Rightarrow L_{11\,mín}$

$$\boxed{L_{11}(\theta) = L_{110} + L_{11_2} \cos(2\theta)}$$

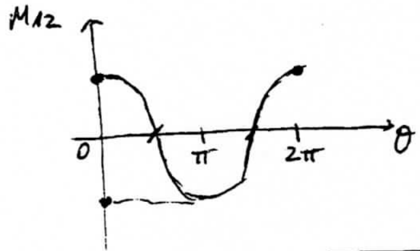
fundamental 2^{do} armónico

Para determinar $L_{22}(\theta)$ (propia de la bob.-2) : $i_1 = 0$, $i_2 \neq 0$ (para "medir" L_{22})

$L_{22} = \frac{n_2^2}{\mathcal{R}_0}$. El circuito magnético es el mismo, la $\mathcal{R}_0$ mín y máx. ...

$$\boxed{L_{22}(\theta) \simeq L_{220} + L_{222}\cos(2\theta)}$$

$M_{12}(\theta) = M_{21}(\theta)$



0, π → en 1 caso los flujos son aditivos, en el otro en oposición ⇒ signo ≠.

π/2, 3π/2 → en cuadratura ⇒ $M = 0$.

$$\Rightarrow \boxed{M_{12}(\theta) = M_{121}\cos\theta}$$

↑fundamental (me quedo con el 1.er término del desarrollo en serie)

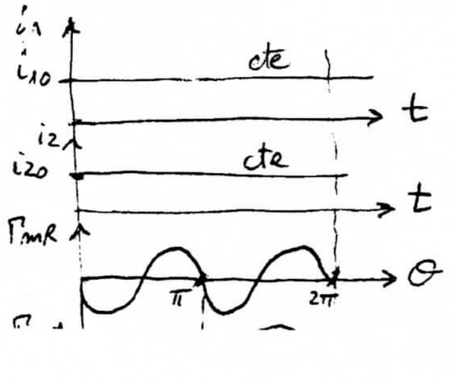
$$L(\theta) = \begin{bmatrix} L_{11}(\theta) & M_{12}(\theta) \\ M_{21}(\theta) & L_{22}(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_m = \frac{1}{2}[i]^t \frac{\partial}{\partial\theta}[L(\theta)][i]$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}[L(\theta)] = \begin{bmatrix} -2L_{112}\sin 2\theta & -M_{121}\sin\theta \\ -M_{211}\sin\theta & -2L_{222}\sin 2\theta \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_m = \frac{1}{2}[i_1\ i_2]\frac{\partial}{\partial\theta}[L(\theta)]\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Se llega a : $\boxed{\Gamma_m = \underbrace{-(L_{112}i_1^2 + L_{222}i_2^2)\sin 2\theta}_{\Gamma_{mR}\text{ (par de reluctancia)}} \underbrace{- M i_1 i_2 \sin\theta}_{\Gamma_{mM}\text{ (de ind. mutua)}}}$



sumo :

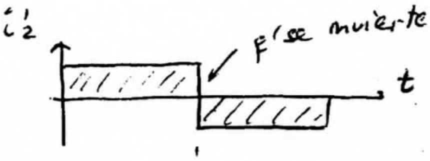
→ simétrica con esta forma.

(sí como relé, electroimán, etc)
no sirve como motor

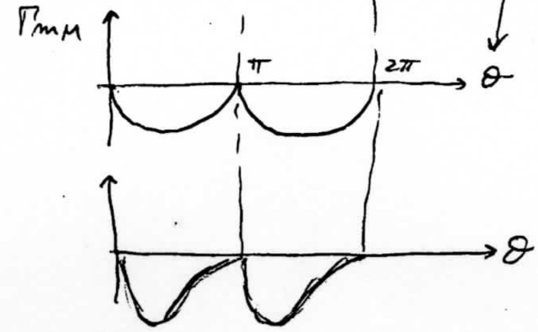
$dW_m = \Gamma_m \, d\theta$

$\Rightarrow W_m = \int_0^{2\pi} \Gamma_m \, d\theta = 0$ → este dispositivo no da trabajo. En 1 ciclo

Si yo tuviera :



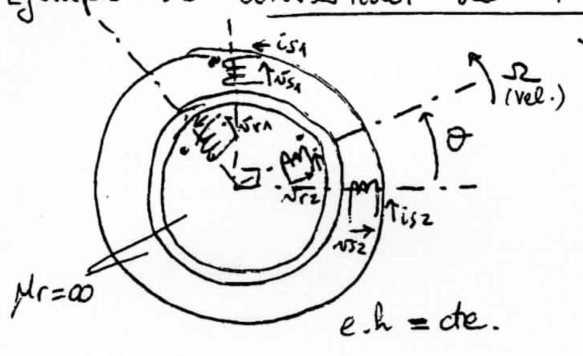
Γ_{mR} no cambia, pues depende de i^2



Ahora sí : $W_m = \int_0^{2\pi} \Gamma_m \, d\theta \neq 0$ → sí sirve como motor, puede trabajar en forma continua, da trabajo $\neq 0$ en 1 ciclo.

Ju, 16/V

Ejemplo de convertidor de 4 excitaciones.



Tengo 2 bobinas en cuadratura en el estator y otras 2 bb. en cuadratura en el rotor, formando un áng. θ con las otras.

La inductancia propia (de c/bobina) × la simetría f ∃ no depende de la posición del rotor.

$$\begin{cases} L_{s1} = L_{s2} = L_s = \text{cte } f(\theta) & (\text{no dep. de } \theta) \\ L_{r1} = L_{r2} = L_r = \text{cte } f(\theta) \end{cases}$$

iguales, y a 90°

$$\begin{cases} M_{s1s2} = 0 \quad , \quad M_{r1r2} = 0 \quad (\text{están a } 90°) \\ M_{s1r1} = M_{sr} \cos\theta = M_{r1s1} \\ M_{s2r2} = M_{sr} \cos\theta = M_{r2s2} \\ M_{s1r2} = M_{sr} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = M_{sr} \operatorname{sen}\theta = M_{r2s1} \\ M_{s2r1} = M_{sr} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -M_{sr} \operatorname{sen}\theta = M_{r1s2} \end{cases}$$

Como $\mu r = \infty \Rightarrow$ sist. lineal (L y M ctes. en función del flujo, no así en f(θ), si no no habría par)

Tengo entonces:

$$[\Psi] = [L(\theta)][i]$$

↖ matriz de inductancias

$$\begin{bmatrix} \Psi_{s1} \\ \Psi_{s2} \\ \Psi_{r1} \\ \Psi_{r2} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} L_s & 0 & (M_{sr}\cos\theta) & (M_{sr}\sin\theta) \\ 0 & L_s & (-M_{sr}\sin\theta) & (M_{sr}\cos\theta) \\ \hline (M_{sr}\cos\theta) & (-M_{sr}\sin\theta) & L_r & 0 \\ (M_{sr}\sin\theta) & (M_{sr}\cos\theta) & 0 & L_r \end{array}\right] \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ i_{r1} \\ i_{r2} \end{bmatrix}$$

Ls cte

$$\frac{\partial}{\partial\theta}[L(\theta)] = M_{sr}\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \\ 0 & 0 & -\cos\theta & -\sin\theta \\ \hline -\sin\theta & -\cos\theta & 0 & 0 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Lr cte

Para sist. lineales tenía: $\Gamma_m = \frac{1}{2}[i]^t\left(\frac{\partial}{\partial\theta}[L(\theta)]\right)\cdot[i]$

$$\Gamma_m = \frac{1}{2}M_{sr}\left\{[i_{s1}\ i_{s2}\ i_{r1}\ i_{r2}]\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \\ 0 & 0 & -\cos\theta & -\sin\theta \\ \hline -\sin\theta & -\cos\theta & 0 & 0 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ i_{r1} \\ i_{r2} \end{bmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \Gamma_m = \frac{1}{2}M_{sr}\left\{[i_{s1}\ i_{s2}\ i_{r1}\ i_{r2}]\begin{bmatrix} -i_{r1}\sin\theta + i_{r2}\cos\theta \\ -i_{r1}\cos\theta - i_{r2}\sin\theta \\ -i_{s1}\sin\theta - i_{s2}\cos\theta \\ i_{s1}\cos\theta - i_{s2}\sin\theta \end{bmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \Gamma_m = \frac{1}{2}M_{sr}\left\{i_{s1}(-i_{r1}\sin\theta + i_{r2}\cos\theta) - i_{s2}(i_{r1}\cos\theta + i_{r2}\sin\theta) - i_{r1}(i_{s1}\sin\theta + i_{s2}\cos\theta) + i_{r2}(i_{s1}\cos\theta - i_{s2}\sin\theta)\right\}$$

$$\Rightarrow \Gamma_m = \frac{1}{2}M_{sr}\left\{-\sin\theta(i_{s1}i_{r1} + i_{s2}i_{r2} + i_{r1}i_{s1} + i_{r2}i_{s2}) + \cos\theta(i_{s1}i_{r2} - i_{s2}i_{r1} - i_{r1}i_{s2} + i_{r2}i_{s1})\right\}$$

$$\Rightarrow \Gamma_m = \frac{1}{2}M_{sr}\left\{-2\sin\theta(i_{s1}i_{r1} + i_{s2}i_{r2}) + \cancel{2}\cos\theta(i_{s1}i_{r2} - i_{s2}i_{r1})\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma_m = M_{sr}\left[\cos\theta\,(i_{s1}i_{r2} - i_{s2}i_{r1}) - \text{sen}\,\theta\,(i_{s1}i_{r1} + i_{s2}i_{r2})\right]}$$

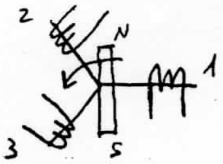
Con las i_{DC} (ctes) $\Rightarrow \Gamma_m = f(\sin, \cos) \Rightarrow$ en 1 ciclo, su valor ½ $= 0$.

Entonces: coloco i sinusoidales

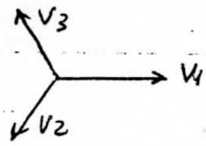
Elijo:

$$\begin{cases} i_{s1} = \sqrt{2}\, I_s \cos\theta_s \ , & \boxed{\theta_s = w_s t + \alpha_s} \text{ (origen de t)} \\ i_{s2} = \sqrt{2}\, I_s \cos(\theta_s + \pi/2) = -\sqrt{2}\, I_s \sin\theta_s \\ i_{r1} = \sqrt{2}\, I_r \cos\theta_r \ , & \boxed{\theta_r = w_r t + \alpha_r} \\ i_{r2} = \sqrt{2}\, I_r \cos(\theta_r + \pi/2) = -\sqrt{2}\, I_r \sin\theta_r \end{cases}$$

Tenía q' si hacía girar un electroimán en sentido trigonométrico (+):



logrado 1 sistema directo, con los fasores en este orden:



Sist. difásico: con las 2 bobinas y tensiones desfasadas 90°.

Tengo 1 sist. difásico inverso: 1° viene la fase 2, luego la 1 (al girar con Ω). Por eso tomo $(\theta + \pi/2)$

inverso — difásico (trifás. directo era $\theta - 2\pi/3$)

$$\boxed{\theta = \Omega t + \theta_0}$$

$w_r, w_s, \Omega =$ ctes.

Sustituyo entonces estas corrientes q' consideré, en la expresión del par Γ_m:

$$\Gamma_m = M_{sr}\, 2 I_r I_s \left[\cos\theta \underbrace{\left(\cos\theta_s(-\sin\theta_r) - (-\sin\theta_s)\cos\theta_r\right)}_{\sin(\theta_s - \theta_r)} - \sin\theta \underbrace{\left(\cos\theta_s\cos\theta_r + \sin\theta_s\sin\theta_r\right)}_{\cos(\theta_s - \theta_r)}\right.$$

$\sin\theta_s \cos\theta_r - \sin\theta_r \cos\theta_s = \sin(\theta_s - \theta_r)$

$$\Rightarrow \Gamma_m = 2M_{sr} I_r I_s \left[\cos\theta \sin(\theta_s - \theta_r) - \sin\theta\cos(\theta_s - \theta_r)\right]$$

$$\Rightarrow \Gamma_m = 2M_{rs} I_r I_s \sin(\theta_s - \theta_r - \theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma_m = \Gamma_{máx} \sin(\theta_s - \theta_r - \theta)}$$

Si quiero ver $\Gamma_m = f(t)$:

$$\boxed{\Gamma_m = \Gamma_{máx} \cdot \sin\left[(w_s - w_r - \Omega)t + (\alpha_s - \alpha_r - \theta_0)\right]}$$

Quiero q' este par haga un trabajo:

$$dW = \Gamma_m d\theta \Rightarrow \underset{\text{(en 1 ciclo)}}{W} = \int_0^{2\pi} \underbrace{\Gamma_m}_{\Gamma_m(\theta)} d\theta = \int_0^T \Gamma_m(\theta(t)) \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{=\Omega = cte} dt$$

$$\Rightarrow W = \Omega \int_0^T \Gamma_m(t)\,dt = W(0,T) \text{ (en el intervalo 0-T cualquiera)}$$

Yo quiero tener un W creciente en el tiempo, con la expresión q' tengo de Γ_m, tendría un W oscilante, q' cambia de signo, pasa varias veces x 0, etc.

$\Rightarrow$ impondré q' Γ_m no dependa así de t:

condición de sincronismo: $\boxed{\omega_s - \omega_r - \Omega = 0}$

$$\Rightarrow \Gamma_m = \Gamma_{max} \sin(\alpha_s - \alpha_r - \theta_0)$$

Puedo elegir una de las ctes. $= 0$ (adecuando el origen de t)

x ej $\theta_0 = 0 \Rightarrow \boxed{\Gamma_m = \Gamma_{máx} \sin(\alpha_s - \alpha_r)}$

$\Rightarrow$ depende del desfasaje relativo entre las i del rotor y estator (podrían tb. estar en fase $\Rightarrow$ desfasaje $= 0$!)

Cuándo se cumplirá la condición de sincronismo:

$\Omega \neq 0$ (q' gire el motor!)

1) $\boxed{\omega_r = 0} \Rightarrow i_{DC}$ en el rotor $\Rightarrow \boxed{\underbrace{\omega_s}_{\text{frec. de las } i \text{ de estator}} = \underbrace{\Omega}_{\text{vel. del rotor} \to \text{vel. de sincronismo}}} \Rightarrow$ Máq. sincrónicas

Tienen 1 única frec. eléctrica (ω_s) y $\Omega = \omega_s$.

(pueden considerarse múltiplos y submúltiplos, distribuyendo convenientemente los bobinados).

Si lo hiciera girar con $\omega_s \neq \Omega \Rightarrow$ no tendría par ½.

$\Rightarrow$ solo hay conversión e.m. con $\omega_s = \Omega$

(en 1 ciclo, si no, sí la hay instantáneam., xo varía, cambia de signo, etc.)

Si ↑ carga: si le pido $\Gamma > \Gamma_{máx} \Rightarrow$ se "desengancha", sale de $\vec{v}$ de sincronismo, ...

2) $\boxed{\omega_s = 0} \Rightarrow i_{DC}$ en el estator $\Rightarrow \boxed{\omega_r = -\Omega}$

→ pulsación negativa, el campo giratorio del rotor deberá ser 1 campo inverso. → se debe hacer sincronizado con la vel para tener Γ_m ½ $\neq 0$.

Máq. DC (se rectifica luego la i_{DC} del rotor, con las escobillas, etc)

Sin rectificar = es 1 alternador invertido, solo en máq. chicas,

... dificulta mantenimiento de escobillas, etc.

Con transformaciones de coordenadas (máq. II) se ve q' cualquier máquina puede describirse con 2 dev. en cuadratura en el rotor y en el estator.

3): $w_s \neq 0$, $w_r \neq 0$, $\Omega \neq 0$, máq. de inducción

g = deslizamiento = $\dfrac{w_s - \Omega}{w_s}$

$w_s - w_r - \Omega = 0 \Rightarrow (w_s - \Omega) = w_r$

$\Rightarrow \boxed{g w_s = w_r}$

Máq. de $\vec{v}$el casi cte, pero no cte.

Gralm. w_s = red = cte

– En las máq. sincrónicas se produce un $\vec{B}$ fijo en el estator

" los alternadores (inv.) : el $\vec{B}$ es del rotor, y éste gira.

" las máq. de inducción, todo gira, pero el $\vec{B}$ del rotor y del estator giran estando fijos 1 respecto del otro (⇒ a la misma $\vec{v}$el.)