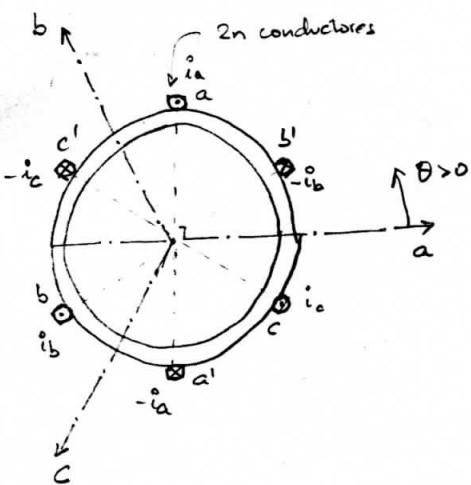


COEFICIENTE DE DISTRIBUCIÓN DEL BOBINADO ("Coeficiente de bobinado")

En las hipótesis usuales del análisis de máquinas eléctricas, se hace de moshac que si en lugar de concentrar las $2n$ espiras del bobinado de cada fase en 1 ranura diametral, lo cual daría una f.v.m. $E_1(\theta, t) = \frac{3}{2} \frac{4}{\pi} \sqrt{2} I n \cos(\omega t - \theta - \varphi)$ (si la corriente de la fase a es: $i_a(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t - \varphi)$), se distribuyen los $2n$ conductores en m ranuras diametrales; cada ranura con $\frac{2n}{m}$ conductores, se obtendría una f.v.m.:

$$E_m(\theta, t) = k_d \cdot E_1(\theta, t) \quad \text{con } k_d \leq 1, \text{ coef. de distribución del bobinado.}$$

- Resumen: Si se tiene:
- máquina trifásica. ($q=3$)
 - 1 par de polos ($p=1$)
 - 1 ranura diametral por polo y por fase ($m=1$)
 - $2n$ conductores/polo/fase.
 - Entrehierro constante.



$$i_a(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t - \varphi)$$

$$i_b(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t - \varphi - \frac{2\pi}{3})$$

$$i_c(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t - \varphi - \frac{4\pi}{3})$$

$$E_a(\theta, t) = \frac{4}{\pi} n i_a(t) \cos \theta$$

$$E_b(\theta, t) = \frac{4}{\pi} n i_b(t) \cos(\theta - \frac{2\pi}{3})$$

$$E_c(\theta, t) = \frac{4}{\pi} n i_c(t) \cos(\theta - \frac{4\pi}{3})$$

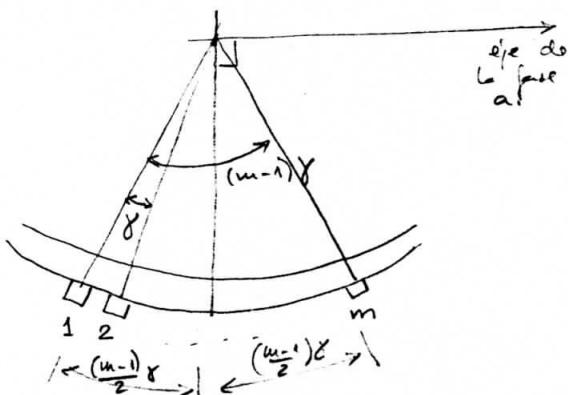
Conservando sólo el término fundamental de la f.v.m.

$$E_1(\theta, t) = E_a(\theta, t) + E_b(\theta, t) + E_c(\theta, t) = \text{campo giratorio resultante del bobinado con espiras diametrales concentradas.}$$

$$E_1(\theta, t) = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{\pi} n \sqrt{2} I \cos(\omega t - \theta - \varphi)$$

Caso $m \neq 1$

$w = \text{Nº de ranuras/polo/fase.}$



Hip.:

- Cada ranura tiene $\frac{2n}{m}$ conductores.
- (Admitiremos para simplificar que $\frac{2n}{m}$ es un número entero).
- Las ranuras están equi-espaciadas de un ángulo γ entre sí.
- $p=1$ ó ragonamiento en ángulos eléctricos.

Cada corriente de fase da m contribuciones al término respectivo: $E_{a_m}(\theta, t)$, $E_{b_m}(\theta, t)$, $E_{c_m}(\theta, t)$.

Se tiene: (Siempre adoptando la aproximación de f.m.m sinusoidal para cada ranura).

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{a_m}(\theta, t) = \frac{4}{\pi} \frac{n}{m} i_a(t) \left\{ \cos \left[\theta - \left(\frac{m-1}{2} \right) \gamma \right] + \cos \left[\theta - \left(\frac{m-1}{2} \right) \gamma + \gamma \right] + \dots + \cos \left[\theta - \left(\frac{m-1}{2} \right) \gamma + (m-1) \gamma \right] \right\} \\ E_{b_m}(\theta, t) = \frac{4}{\pi} \frac{n}{m} i_b(t) \left\{ \cos \left[\theta - \left(\frac{m-1}{2} \right) \gamma - \frac{2\pi}{3} \right] + \cos \left[\theta - \left(\frac{m-1}{2} \right) \gamma + \gamma - \frac{2\pi}{3} \right] + \dots + \cos \left[\theta - \left(\frac{m-1}{2} \right) \gamma + (m-1) \gamma - \frac{2\pi}{3} \right] \right\} \\ E_{c_m}(\theta, t) = \frac{4}{\pi} \frac{n}{m} i_c(t) \left\{ \cos \left[\theta - \left(\frac{m-1}{2} \right) \gamma - \frac{4\pi}{3} \right] + \cos \left[\theta - \left(\frac{m-1}{2} \right) \gamma + \gamma - \frac{4\pi}{3} \right] + \dots + \cos \left[\theta - \left(\frac{m-1}{2} \right) \gamma + (m-1) \gamma - \frac{4\pi}{3} \right] \right\} \end{array} \right.$$

El campo giratorio total es:

$$E_m(\theta, t) = E_{a_m}(\theta, t) + E_{b_m}(\theta, t) + E_{c_m}(\theta, t).$$

Desarrollando los cálculos, es fácil ver que la k -ésima ranura de cada fase, cuando se agrupan los términos de las 3 fases, da la k -ésima contribución al campo giratorio total (f.m.m. de anteladero giratorio)

$$E_m(\theta, t) = \frac{4}{\pi} \sqrt{2} I \frac{n}{m} \cdot \frac{3}{2} \left\{ \underbrace{\cos [wt - \theta - \varphi - \left(\frac{m-1}{2} \right) \gamma]}_{1^{\text{er}} \text{ ranura}} + \underbrace{\cos [wt - \theta - \varphi - \left(\frac{m-1}{2} \right) \gamma + \gamma]}_{2^{\text{da}} \text{ ranura}} + \dots + \underbrace{\cos [wt - \theta - \varphi - \left(\frac{m-1}{2} \right) \gamma + (k-1) \gamma]}_{k\text{-ésima ranura}} + \dots + \underbrace{\cos [wt - \theta - \varphi - \left(\frac{m-1}{2} \right) \gamma + (m-1) \gamma]}_{m\text{-ésima ranura}} \right\}$$

$$\mathcal{E}_m(\theta, t) = \operatorname{Re} \left(\frac{4}{\pi} \sqrt{2} I \frac{n}{m} \frac{3}{2} e^{j(\omega t - \theta - \varphi)} e^{-j\left(\frac{m-1}{2}\right)\gamma} \left[1 + e^{j\gamma} + \dots + e^{j(m-1)\gamma} \right] \right).$$

Así como al campo giroscópico $\mathcal{E}_1(\theta, t) = \frac{3}{2} \frac{4}{\pi} n \sqrt{2} I \cos(\omega t - \theta - \varphi)$

asociábamos un factor $\vec{\mathcal{E}}_1 = \frac{3}{2} \frac{4}{\pi} n \sqrt{2} I \angle_{-\varphi} = \frac{3}{2} \frac{4}{\pi} n \sqrt{2} I e^{-j\varphi}$

o decir $\mathcal{E}_1(\theta, t) \Big|_{\text{para } \omega t - \theta = 0} = \operatorname{Re}(\vec{\mathcal{E}}_1)$; ahora asociaremos un factor $\vec{\mathcal{E}}_m$

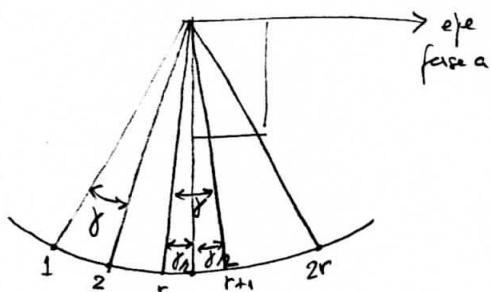
al campo giroscópico $\mathcal{E}_m(\theta, t)$ haciendo $\omega t - \theta = 0$, y tal que $\mathcal{E}_m(\theta, t) \Big|_{\omega t - \theta = 0} = \operatorname{Re}(\vec{\mathcal{E}}_m)$.

$$\boxed{\vec{\mathcal{E}}_m = \frac{3}{2} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{n}{m} \sqrt{2} I e^{-j\varphi} e^{-j\left(\frac{m-1}{2}\right)\gamma} \left[1 + e^{j\gamma} + \dots + e^{j(m-1)\gamma} \right].}$$

Vamos a mostrar que $\boxed{\vec{\mathcal{E}}_m = k_d \cdot \vec{\mathcal{E}}_1}$, con $k_d = \text{coeficiente de distribución del bobinado}$.

para eso : 1) $e^{-j\left(\frac{m-1}{2}\right)\gamma} \left[1 + e^{j\gamma} + \dots + e^{j(m-1)\gamma} \right]$ es real puro.

En efecto; 1a) Si m es par : $\boxed{m = 2r}$, $r = 1, 2, 3, \dots$



$$\begin{aligned}
 & e^{-j\left(\frac{m-1}{2}\right)\gamma} \underbrace{\left[1 + e^{j\gamma} + \dots + e^{j(m-2)\gamma} + e^{j(m-1)\gamma} \right]}_{\text{Nº par de términos}} = \\
 & = e^{-j\left(\frac{m-1}{2}\right)\gamma} \left[1 + e^{j(m-1)\gamma} \right] + e^{-j\left(\frac{m-1}{2}\right)\gamma} \left[e^{j\gamma} + e^{j(m-2)\gamma} \right] + \dots + \\
 & + \dots + e^{-j\left(\frac{m-1}{2}\right)\gamma} \left[e^{j(r-1)\gamma} + e^{jr\gamma} \right].
 \end{aligned}$$

Cada uno de los términos precedentes es un real puro:

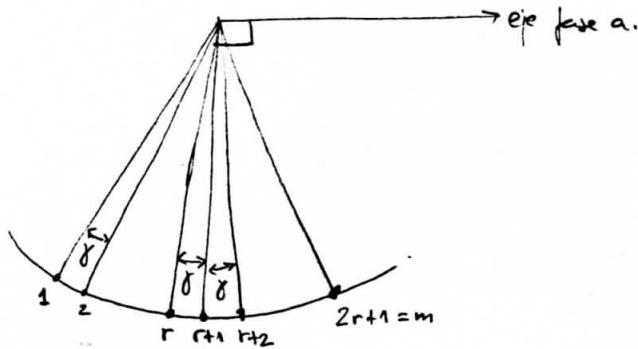
$$e^{-j\left(\frac{m-1}{2}\right)\gamma} [1 + e^{j(m-1)\gamma}] = e^{-j\left(\frac{m-1}{2}\right)\gamma} + e^{+j\left(\frac{m-1}{2}\right)\gamma} \in \mathbb{R}.$$

$$\dots$$

$$e^{-j\left(\frac{m-1}{2}\right)\gamma} [e^{j(r-1)\gamma} + e^{jr\gamma}] = e^{-j\frac{\gamma}{2}} + e^{+j\frac{\gamma}{2}} \in \mathbb{R}.$$

$$\cancel{e^{-j\left(\frac{r-1}{2}\right)\gamma} [e^{j(r-1)\gamma} + e^{jr\gamma}]} =$$

1b) Si m es impar : $m = 2r+1$



Se pueden agrupar por pares los términos correspondientes a las ramas:

$$1 \text{ y } 2r+1$$

$$2 \text{ y } 2r \quad (= 2r+1-1)$$

...

$$k \text{ y } 2r+2-k \quad (= 2r+1-(k-1))$$

...

$$r \text{ y } r+2.$$

$$e^{-j\left(\frac{m-1}{2}\right)\gamma} [e^{j(k-1)\gamma} + e^{j(2r+1-k)\gamma}] = e^{+j\gamma\left(\frac{2k-2-m+1}{2}\right)} + e^{+j\gamma\left(\frac{2m-2k-m+1}{2}\right)}$$

contribución de la
rama k. de la
rama 2r+2-k.

$$= e^{-j\gamma\left(\frac{m+1-2k}{2}\right)} + e^{+j\gamma\left(\frac{m+1-2k}{2}\right)} \in \mathbb{R}.$$

y queda un término central, correspondiente a la rama $r+1$, que no se puede agrupar, pero:

$$e^{-j\left(\frac{m-1}{2}\right)\gamma} [e^{j(r+1-1)\gamma}] = e^{-j\left(\frac{2r+1-1}{2}\right)\gamma} e^{jr\gamma} = e^{j0} = 1 \in \mathbb{R}.$$

En consecuencia $\vec{E}_m = (\text{Número real}) e^{-j\varphi} \Rightarrow \vec{E}_m = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nº real}}}{k_d} \cdot \vec{E}_1$

$$2) k_d = \frac{|\vec{\epsilon}_m|}{|\vec{\epsilon}_1|} = \frac{\left| \frac{3}{2} \frac{4}{\pi} \sqrt{2} I \frac{n}{m} e^{-j\varphi} e^{-j\left(\frac{m-1}{2}\right)\gamma} [1 + e^{j\gamma} + \dots + e^{j(m-1)\gamma}] \right|}{\left| \frac{3}{2} \frac{4}{\pi} \sqrt{2} I n e^{-j\varphi} \right|}$$

$$k_d = \frac{1}{m} \underbrace{|e^{-j\left(\frac{m-1}{2}\right)\gamma}|}_{=1} \left| 1 + e^{j\gamma} + \dots + e^{j(m-1)\gamma} \right|$$

pero $1 + e^{j\gamma} + \dots + e^{j(m-1)\gamma} = \frac{e^{jm\gamma} - 1}{e^{j\gamma} - 1}$

suma de m términos de la serie geométrica
de razón $e^{j\gamma}$.

$$\Rightarrow k_d = \frac{1}{m} \frac{|e^{jm\gamma} - 1|}{|e^{j\gamma} - 1|} = \frac{1}{m} \frac{\sqrt{(\cos m\gamma - 1)^2 + \sin^2 m\gamma}}{\sqrt{(\cos \gamma - 1)^2 + \sin^2 \gamma}} = \frac{1}{m} \frac{\sqrt{1 - \cos m\gamma}}{\sqrt{1 - \cos \gamma}}$$

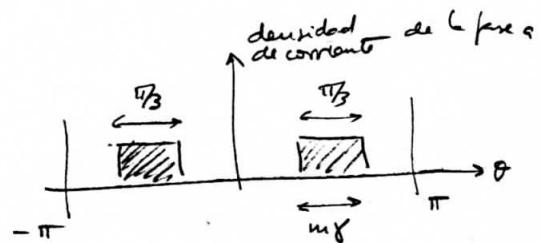
$$\frac{1}{2} \frac{\sqrt{-2 \sin m\gamma + 2}}{\sqrt{-2 \cos \gamma + 2}} = \frac{\sin^2 \frac{m\gamma}{2}}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \cos 2\gamma}{2}$$

$$\boxed{k_d = \frac{1}{m} \cdot \frac{\sin \frac{m\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}}$$

k_d indica cuánto se reduce la forma de
entreliadro por distribuir el bobinado, en
lugar de ubicar las $2n$ espiras
concentradas en 1 sola ranura.

En el caso límite de distribución del bobinado, de distribución continua,
uniforme de la corriente, ocupando $\frac{1}{3}$ de la periferia del entreliadro
para cada fase, se tiene $\gamma \rightarrow 0$, $m\gamma \rightarrow \frac{\pi}{3}$.

$$\lim_{\substack{\gamma \rightarrow 0 \\ m\gamma \rightarrow \frac{\pi}{3}}} k_d = \frac{\sin \frac{m\gamma}{2}}{m \sin \frac{\gamma}{2}} \xrightarrow{\substack{\gamma \rightarrow 0 \\ m\gamma \rightarrow \frac{\pi}{3}}} \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{\pi} = 0,955$$



Generalizaciones:

$$\text{Si } p \neq 1 \Rightarrow \boxed{\theta_e = p \theta_m}$$

↓ ↓
ángulo ángulo
eléctrico mecánico.

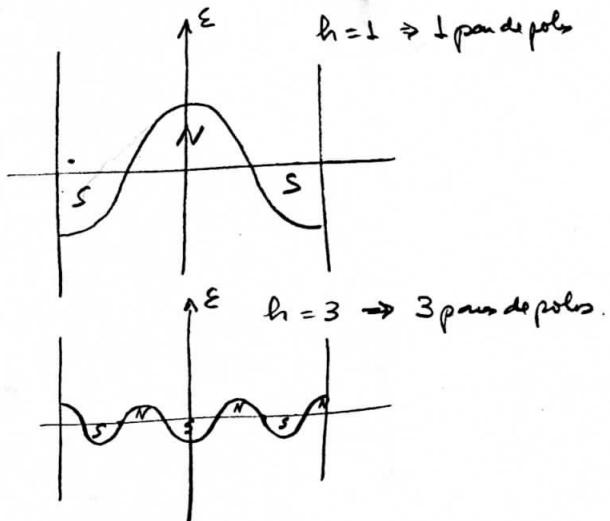
El razonamiento precedente es válido si $\gamma = \text{ángulo eléctrico}$ entre ranuras.

Si $\gamma_m = \text{ángulo mecánico o geométrico (o real) entre ranuras}$

$$\Rightarrow \gamma_e = \gamma = p \gamma_m$$

$$\Rightarrow k_d = \frac{\sin \frac{m p \gamma_m}{2}}{m \sin \frac{p \gamma_m}{2}}$$

Se puede emplear la fórmula precedente para calcular el coeficiente de distribución de los f.m.u. armónicos. En efecto, el N° de pares de polos para cada armónico de espacio de la f.m.u., es igual al rango h del armónico.



Sei si $p = \text{N}^{\circ}$ de pares de polos de la máquina (para el campo fundamental)

$\gamma_m = \text{ángulo geométrico entre ranuras.}$ (Cada armónico de espacio es un campo de ($h.p$) pares de polos.

$$k_{dp,h} = \frac{\sin \left(\frac{m h p \gamma_m}{2} \right)}{m \sin \left(\frac{h p \gamma_m}{2} \right)}$$

Coeficiente de distribución de los campos armónicos. Se puede calcular y ver que son menores que el k_d del campo fundamental.