Máquinas de reluctancia → Par de reluctancia

Solo interesa:

Bobinado en el estator. Polos salientes en el rotor.

$$\mathcal{E}_s(\theta_s,t) = H_s(\theta_s,t)\cdot e(\theta_s)$$

$$\boxed{\mathcal{E}_s(\theta_s,t) = \mathcal{E}_{s\,max}\cos(\omega_s t - p_s\theta_s - \varphi_s)}$$

Hipótesis: fuerza de entrehierro $\mathcal{E}(\theta,t)$ sinusoidal. ("Campo giratorio circular")

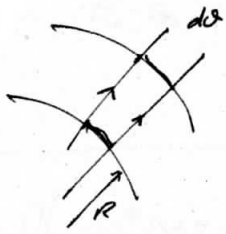
$$\boxed{H_s(\theta_s,t) = \frac{1}{e(\theta_s)}\,\mathcal{E}_{s\,max}\cos(\omega_s t - p_s\theta_s - \varphi_s)}$$

$$w_m = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 = \frac{1}{2}\mu_0\left(\frac{\mathcal{E}_s(\theta_s,t)}{e(\theta_s)}\right)^2$$

Notación:

$$W_m = \int_{Vol} w_m\, dvol = \frac{1}{2}\mu_0\, L\int_0^{2\pi}\left(\frac{\mathcal{E}_s(\theta_s,t)}{e(\theta_s)}\right)^2 e(\theta_s)\cdot R\,d\theta_s$$

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}\mu_0 R L\int_0^{2\pi}\frac{\mathcal{E}_s^2(\theta_s,t)}{e(\theta_s)}\,d\theta_s}$$



Reluctancia del entrehierro en θ_s

$$\mathcal{R}(\theta_s) = \frac{1}{\mu_0}\frac{e(\theta_s)}{LR\,d\theta_s}$$

reluctancia por unidad de arco

$$\mathcal{r}(\theta_s) = \frac{1}{\mu_0}\cdot\frac{e(\theta_s)}{LR}$$

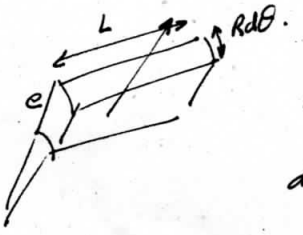
$$\mathcal{P}(\theta_s) = \frac{1}{\mathcal{R}(\theta_s)} = \mu_0 LR\frac{d\theta_s}{e(\theta_s)}$$

$$\mathcal{p}(\theta_s) = \frac{1}{\mathcal{r}(\theta_s)}$$

permeancia por unidad de arco

def $\boxed{\mathcal{P}(\theta_s) = \left(\frac{1}{\mu_0}\frac{e(\theta_s)}{LR}\right)^{-1}}$ "Permeancia del entrehierro en θ_s".

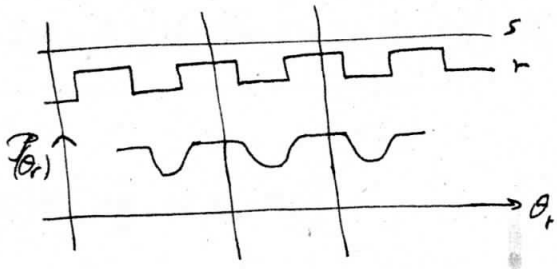
$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathcal{P}(\theta_s)\,\mathcal{E}_s^2(\theta_s,t)\,d\theta_s}$$



$$d\mathcal{R} = \frac{1}{\mu_0}\frac{e(\theta)}{LR\,d\theta}$$ elemento de reluctancia

$$d\mathcal{P} = \mu_0 LR\frac{d\theta}{e(\theta)}$$

$$\mathcal{P}(\theta_r) = \mathcal{P}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n \cos nZ\theta_r$$



$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T} = \frac{2\pi}{\left(\frac{2\pi}{Z}\right)} = Z$$

$$\theta_r = \theta_s - \Omega_m t - (\theta_{s_0} - \theta_{r_0})$$

$$\mathcal{P}(\theta_s) = \mathcal{P}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n \cos nZ\left[\theta_s - \Omega_m t - (\theta_{s_0} - \theta_{r_0})\right]$$

$$\boxed{\mathcal{P}(\theta_s) = \mathcal{P}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n \cos\left[nZ\theta_s - nZ\Omega_m t - nZ(\theta_{s_0} - \theta_{r_0})\right]}$$

$$\mathcal{E}_s(\theta_s, t) = \mathcal{E}_{max} \cos(\omega_s t - p_s\theta_s - \varphi_s)$$

$$W_m = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathcal{E}_s^2(\theta_s, t)\, \mathcal{P}(\theta_s)\, d\theta_s$$

$$W_m = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{s_{max}}^2 \left[\int_0^{2\pi} \mathcal{P}_0 \cos^2(\omega_s t - p_s\theta_s - \varphi_s)\, d\theta_s + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n \int_0^{2\pi} \cos\left[nZ\theta_s - nZ\Omega_m t - nZ(\theta_{s_0} - \theta_{r_0})\right] \cos^2(\omega_s t - p_s\theta_s - \varphi_s)\, d\theta_s \right]$$

pero $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$

$$\Rightarrow W_m = W_0 + \sum_{n=1}^{\infty} W_n.$$

$$\boxed{W_0} = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{s_{max}}^2 \mathcal{P}_0 \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2(\omega_s t - p_s\theta_s - \varphi_s)}{2}\, d\theta_s}_{\pi} = \boxed{\frac{\pi}{2}\mathcal{P}_0 \mathcal{E}_{s_{max}}^2}$$

$$W_n = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{s_{max}}^2 \mathcal{P}_n \int_0^{2\pi} \cos\left[nZ\theta_s - nZ\Omega_m t - nZ(\theta_{s_0} - \theta_{r_0})\right] \frac{1 + \cos 2(\omega_s t - p_s\theta_s - \varphi_s)}{2}\, d\theta_s$$

$\underline{\partial/s}$: $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos\left[nZ\theta_s \cdots\right] d\theta_s = 0$

$$W_n = \frac{1}{4}\mathcal{E}_{S_{max}}^2 \mathcal{P}_n \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos\left[nZ\theta_s - nZ\Omega_m t - nZ(\theta_{s0}-\theta_{r0})\right]\cos\left(2\omega_s t - 2p_s\theta_s - 2\varphi_s\right)}\, d\theta_s$$

$$\frac{1}{2}\Big\{\cos\left[(nZ-2p_s)\theta_s + (2\omega_s - nZ\Omega_m)t - 2\varphi_s - nZ(\theta_{s0}-\theta_{r0})\right] +$$

$$+ \cos\left[(nZ+2p_s)\theta_s - (nZ\Omega_m + 2\omega_s)t + 2\varphi_s - nZ(\theta_{s0}-\theta_{r0})\right]\Big\}$$

$\left.\begin{array}{l} n \geq 1 \\ Z > 0 \\ p_s \geq 1 \end{array}\right\} k = nZ + 2p_s > 0 \Rightarrow$ 2do término $\int_0^{2\pi} \cos(k\theta_s + \alpha)\, d\theta_s = 0$.

entero

$\boxed{nZ - 2p_s = 0}$ dados p_s y Z, $\exists$ $\boxed{n_r = \frac{2p_s}{Z}}$

Mejor dicho, n_r siempre estará definido por esa relación, pero además debe ser entero, para poder ser un término del desarrollo en serie de Fourier.
Es decir, que según p_s y Z, puede no existir

Si $\exists$ n_r entero, t.q. $\boxed{n_r = \frac{2p_s}{Z}}$ Si $Z = 2p_s \Rightarrow \underline{n_r = 1}$: Contribución del par de reluctancia al fundamental.

$$W_{n_r} = \frac{1}{8}\mathcal{E}_{S_{max}}^2 \mathcal{P}_{n_r} \int_0^{2\pi} \cos\Big[\big(2\omega_s - \underset{2p_s}{\underset{\shortparallel}{n_r Z}}\Omega_m\big)t - \big(2\varphi_s + \underset{2p_s}{\underset{\shortparallel}{n_r Z}}(\theta_{s0}-\theta_{r0})\big)\Big]\, d\theta_s$$

$$\boxed{W_{n_r} = \frac{\pi}{4}\mathcal{E}_{S_{max}}^2 \mathcal{P}_{n_r} \cos 2\Big[(\omega_s - p_s\Omega_m)t - \big(\varphi_s + p_s\underbrace{(\theta_{s0}-\theta_{r0})}_{\xi_0}\big)\Big]},$$

Si $\frac{2p_s}{Z} \neq$ entero $W_n = 0$ $\forall n$.

$W_m = W_0 + W_{n_r}$

Par electromagnético

$$\Gamma = \left(\frac{\partial W_s'}{\partial \theta_m}\right)_{i=cte} \Rightarrow \Gamma = \left(\frac{\partial W_s}{\partial \theta_m}\right)_{\mathcal{E}_{max}=cte}$$

donde θ_m debe ser el ángulo que forman los ejes magnéticos de los campos giratorios.

$W' = W$ (Sist. lineal)

$$\Gamma_m = -2\cdot\frac{\pi}{4}\mathcal{E}_{s_{max}}^2\,\mathcal{P}_{n_r}\,\sin 2\Big[(\omega_s-p_s\Omega_m)t - p_s\underbrace{\Big(\xi_0+\frac{\varphi_s}{p_s}\Big)}_{\theta_m}\Big](-p_s)$$

$$\Gamma_m = 2\cdot\frac{\pi}{4}p_s\mathcal{E}_{s_{max}}^2\,\mathcal{P}_{n_r}\,\sin 2\Big[(\omega_s-p_s\Omega_m)t - p_s\underbrace{\Big(\xi_0+\frac{\varphi_s}{p_s}\Big)}_{\theta_m}\Big]$$

"Condición de permanencia" para la existencia de par:

$$\omega_s = p_s\Omega_m \Rightarrow \boxed{\Omega_m = \frac{\omega_s}{p_s} = \Omega_s}$$

Velocidad mecánica de rotación = velocidad de sincronismo.

$$\Rightarrow \Gamma_m = \underbrace{\frac{\pi}{2}\mathcal{E}_{s_{max}}^2\,\mathcal{P}_{n_r}\cdot p_s}_{\Gamma_{máx}}\,\sin 2\Big[-\underbrace{p_s\theta_m}_{\theta_e}\Big]$$

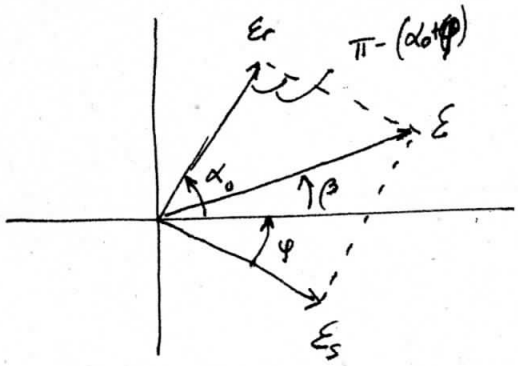
$$\boxed{\Gamma_m = -\Gamma_{máx}\sin 2p_s\theta_m}$$

Los signos están bien, porque esto es equivalente a tomar $\varphi_r = 0$. No hay corriente alterna en el rotor (ni ninguna corriente), y por lo tanto la corriente rotórica no desfasa el campo respecto a la dirección privilegiada que es el eje magnético de cada devanado del rotor.

Estos valores del par dependen en los pares aplicados por el "campo magnético" "sobre la parte móvil". (Por analogía con el convertidor elemental de doble excitación

Aquí el campo "fijo" sería el del estator y el "móvil" el del rotor, que está claro que puede oscilar alrededor de la posición de la del estator.

$p = 1$
ϑ ángulo eléctrico.



$$\begin{cases} \mathcal{E}_s = \mathcal{E}_{s\,max} \cos(\omega t - \theta - \varphi_s) \\ \mathcal{E}_r = \mathcal{E}_{r\,max} \cos(\theta - \alpha) \quad , \qquad \alpha = \Omega t + \alpha_0 \end{cases}$$

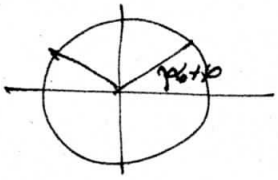
$$\mathcal{E}_r = \mathcal{E}_{r\,max} \cos(\theta - \Omega t - \alpha_0)$$

Sólo hay par si se verifica (la condición de sincronismo $\boxed{\Omega = \omega}$ también llamada condición de frecuencia) Aparece como sincronismo cuando se expresan los 2 campos en coordenadas del estator.

$$\mathcal{E}_r = \mathcal{E}_{r\,max} \cos(\omega t - \theta + \alpha_0) \Rightarrow \boxed{\vec{\mathcal{E}}_r = \mathcal{E}_{r\,max} \angle \alpha_0 \Big|_{\theta=0}}$$

$$\mathcal{E}_s = \mathcal{E}_{s\,max} \cos(\omega t - \theta - \varphi_s) \Rightarrow \boxed{\vec{\mathcal{E}}_s = \mathcal{E}_{s\,max} \angle -\varphi_s \Big|_{\theta=0}}$$

$$\mathcal{E}_{tot} = \mathcal{E} = \mathcal{E}_r(\theta, t) + \mathcal{E}_s(\theta, t)$$



algebra:

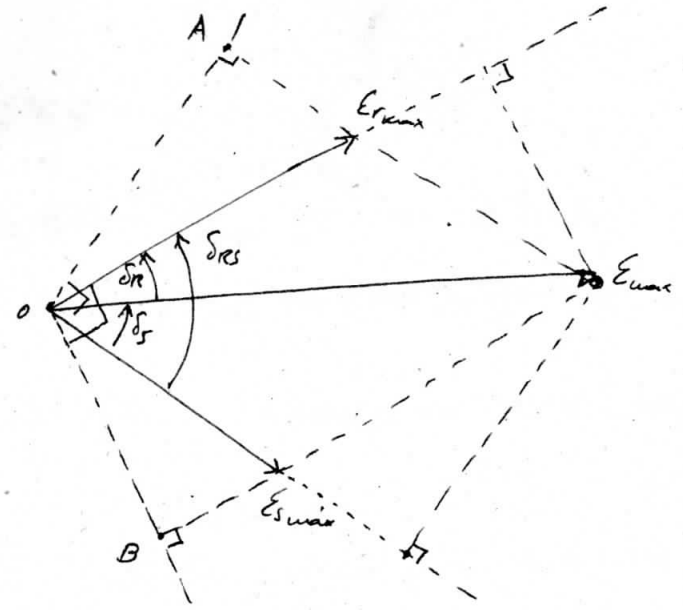
$$\Rightarrow \vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_{max} \angle \beta$$

$$\mathcal{E}_{max}^2 = \mathcal{E}_{r\,max}^2 + \mathcal{E}_{s\,max}^2 - 2\,\mathcal{E}_{r\,max}\,\mathcal{E}_{s\,max} \underbrace{\cos(\pi - (\alpha_0 + \varphi))}_{= -\cos(\alpha_0 + \varphi)}$$

$$= \mathcal{E}_{r\,max}^2 + \mathcal{E}_{s\,max}^2 + 2\,\mathcal{E}_{r\,max}\,\mathcal{E}_{s\,max} \cos(\alpha_0 + \varphi)$$

$\alpha_0 + \varphi = \delta_{RS}$

$$\Gamma = \frac{\partial W_s'}{\partial \delta_{RS}}\Big|_{i = cte} = \frac{\partial W}{\partial \delta_{RS}}\Big|_{\mathcal{E}_{max} = cte} = \boxed{-\frac{\mu_0 \pi R L}{e}\,\mathcal{E}_{r\,max}\,\mathcal{E}_{s\,max} \sin \delta_{RS}}$$



Calculons $\begin{cases} \mathcal{E}_{r_{max}} \sin \delta_{RS} \\ \mathcal{E}_{s_{max}} \sin \delta_{RS} \end{cases}$

(1) $\mathcal{E}_{r_{max}} \sin \delta_{RS} = OA = \mathcal{E}_{max} \sin \delta_S$

(2) $\mathcal{E}_{s_{max}} \sin \delta_{RS} = OB = \mathcal{E}_{max} \sin \delta_R$

$$\boxed{\begin{aligned} \Gamma &= -\mu_0 \frac{\pi r L}{e} \mathcal{E}_{max} \mathcal{E}_{s_{max}} \sin \delta_S \\ \Gamma &= -\mu_0 \frac{\pi r L}{e} \mathcal{E}_{max} \mathcal{E}_{r_{max}} \sin \delta_R \end{aligned}}$$