ECUACIONES E IMPEDANCIAS OPERACIONALES - REACTANCIAS Y CONSTANTES DE TIEMPO

Para funcionamiento a velocidad constante, la transformación de Park conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes.
En esas ecuaciones podemos sustituir el operador p por la variable s de la transformada de Laplace a condición que los valores iniciales de las variables sean nulos.
En caso de condiciones iniciales no nulas las ecuaciones son válidas para los incrementos de las variables alrededor de los valores de reposo.
Luego de aplicar la transformada de Laplace a las ecuaciones de Park deduciremos las impedancias operacionales según los ejes directo y en cuadratura. Estas impedancias permiten determinar las constantes de tiempo y las reactancias que intervienen en todos los regímenes transitorios.

1. ECUACIONES E IMPEDANCIAS OPERACIONALES.

En las ecuaciones de Park no consideramos la ecuación correspondiente a la componente homopolar por estar desacoplada de las otras y asumimos $v_{kd} = v_{kq} = 0$.
Llamaremos p a la variable s de Laplace. Aplicando Laplace a las ecuaciones de Park resulta:

$$\left[\begin{array}{cc:c:c:c} r_s+L_d p & -\omega L_q & M_F p & M_{KD} p & -\omega M_{KQ} \\ \omega L_d & r_s+L_q p & \omega M_F & \omega M_{KD} & M_{KQ} p \\ \hdashline M_F p & 0 & r_f+L_{fd} p & L_{fkd} p & 0 \\ M_{KD} p & 0 & L_{fkd} p & r_{kd}+L_{kd} p & 0 \\ \hdashline 0 & M_{KQ} p & 0 & 0 & r_{kq}+L_{kq} p \end{array}\right] \begin{bmatrix} I_d \\ I_q \\ \hdashline I_f \\ I_{kd} \\ \hdashline I_{kq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_d \\ V_q \\ \hdashline V_F \\ 0 \\ \hdashline 0 \end{bmatrix}$$

$I_f = \mathcal{L}(i_f)$; $V_F = \mathcal{L}(v_f)$ transf. de la tensión real de campo ; $V_d = \mathcal{L}(v_d)$;
$V_q = \mathcal{L}(v_q)$; $I_d = \mathcal{L}(i_d)$; $I_q = \mathcal{L}(i_q)$; $I_{kd} = \mathcal{L}(i_{kd})$; $I_{kq} = \mathcal{L}(i_{kq})$.

De las tres últimas ecuaciones se despejan I_f, I_{kd} e I_{kq} en función de I_d, I_q y V_F.
Se sustituyen luego I_f, I_{kd} e I_{kq} por las expresiones recién obtenidas en las dos primeras ecuaciones, resultando así dos ecuaciones que nos dan V_d y V_q en función de I_d, I_q y V_F.
Para realizar este cálculo en forma matricial definimos 15 sub-matrices de acuerdo a las líneas punteadas. Se tiene:

$$\begin{bmatrix} [A] & [B] & [C] \\ [D] & [F] & [0] \\ [H] & [0] & [J] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I_1] \\ [I_2] \\ [I_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [V_1] \\ [V_2] \\ [0] \end{bmatrix}$$

$$[A]\,[I_1] + [B]\,[I_2] + [C]\,[I_3] = [V_1] \quad (1)$$
$$[D]\,[I_1] + [F]\,[I_2] = [V_2] \quad (2)$$
$$[H]\,[I_1] + [J]\,[I_3] = [0] \quad (3)$$

En (2) $\Rightarrow$ $[I_2] = -[F]^{-1}\,[D]\,[I_1] + [F]^{-1}\,[V_2]$ (4)

En (3) $\Rightarrow$ $[I_3] = -[J]^{-1}\,[H]\,[I_1]$ (5)

Sustituyendo (4) y (5) en (1):

$$[A]\,[I_1] - [B]\,[F]^{-1}\,[D]\,[I_1] + [B]\,[F]^{-1}\,[V_2] - [C]\,[J]^{-1}\,[H]\,[I_1] = [V_1]$$

Ordenando

$$\left\{[A] - [B]\,[F]^{-1}\,[D] - [C]\,[J]^{-1}\,[H]\right\}\,[I_1] = [V_1] - [B]\,[F]^{-1}\,[V_2]$$

Desarrollamos los cálculos anteriores, para lo cual definimos:

$$Z_F = r_f + L_{fd}\,p$$
$$Z_{KD} = r_{kd} + L_{kd}\,p$$
$$Z_{KQ} = r_{kq} + L_{kq}\,p$$

Cálculos matriciales:

$$\boxed{F^{-1}} = \begin{bmatrix} Z_F & L_{fkd}\,p \\ L_{fkd}\,p & Z_{KD} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} Z_{KD} & -L_{fkd}\,p \\ -L_{fkd}\,p & Z_F \end{bmatrix} \qquad \Delta = Z_F Z_{KD} - L_{fkd}^2\,p^2$$

$$\boxed{B}\;\boxed{F^{-1}}\;\boxed{D} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} M_F\,p & M_{KD}\,p \\ \omega M_F & \omega M_{KD} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_{KD} & -L_{fkd}\,p \\ -L_{fkd}\,p & Z_F \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_F\,p & 0 \\ M_{KD}\,p & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} M_F\,p & M_{KD}\,p \\ \omega M_F & \omega M_{KD} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_{KD}M_F\,p - L_{fkd}M_{KD}\,p^2 & 0 \\ -L_{fkd}M_F\,p^2 + Z_F M_{KD}\,p & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} p^2\left[Z_{KD}M_F^2 + Z_F M_{KD}^2 - 2M_F L_{fkd} M_{KD}\,p\right] & 0 \\ \omega p\left[Z_{KD}M_F^2 + Z_F M_{KD}^2 - 2M_F L_{fkd} M_{KD}\,p\right] & 0 \end{bmatrix}$$

Expresiones de $\Psi d(p)$ y $\Psi q(p)$.

$\Psi d(p)$ y $\Psi q(p)$ son las transformadas de Laplace de $\Psi d(t)$ y $\Psi q(t)$.

De Park se tiene:
$$v d(t) = r_s\, i d(t) - \omega \Psi q(t) + \frac{d}{dt}\Psi d(t)$$
$$v q(t) = r_s\, i q(t) + \omega \Psi d(t) + \frac{d}{dt}\Psi q(t)$$

Aplicando la transformada de Laplace resulta:
$$Vd(p) = r_s\, Id(p) + p\,\Psi d(p) - \omega \Psi q(p) \quad (6)$$
$$Vq(p) = r_s\, Iq(p) + p\,\Psi q(p) + \omega \Psi d(p) \quad (7)$$

Si desarrollamos las ecuaciones operacionales recién obtenidas se tiene:

$$Vd(p) = r_s\, Id(p) + p\left[Ld(p)\, Id(p) + G(p)\, V_F(p)\right] - \omega\, Lq(p)\, Iq(p) \quad (8)$$
$$Vq(p) = r_s\, Iq(p) + p\left[Lq(p)\, Iq(p)\right] + \omega\left[Ld(p)\, Id(p) + G(p)\, V_F(p)\right] \quad (9)$$

Resulta comparando (8) con (6) y (9) con (7):

$$\Psi d(p) = Ld(p)\, Id(p) + G(p)\, V_F(p)$$
$$\Psi q(p) = Lq(p)\, Iq(p)$$

Interpretación de $G(p)$: Si $Id(p) = Iq(p) = 0 \Rightarrow \Psi d(p) = G(p)\, V_F(p)$ y $\Psi q(p) = 0$

O sea que $G(p)$ es la transferencia que nos da el flujo que atraviesa los arrollamientos estatóricos conocida V_F para la máquina funcionando en vacío.

Además si $Id(p) = Iq(p) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{aligned} Vd(p) &= p\, G(p)\, V_F(p) \\ Vq(p) &= \omega\, G(p)\, V_F(p) \end{aligned}$$ Tensiones de vacío de la máquina.

$$\boxed{C}\;\boxed{J^{-1}}\;\boxed{H} = \frac{1}{z_{kQ}}\begin{bmatrix} -M_{kQ}\,\omega \\ M_{kQ}\,p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & M_{kQ}\,p \end{bmatrix} = \frac{1}{z_{kQ}}\begin{bmatrix} 0 & -M_{kQ}^2\,\omega p \\ 0 & M_{kQ}^2\,p^2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{B}\;\boxed{F^{-1}} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} M_F p & M_{kD} p \\ M_F \omega & M_{kD}\omega \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_{kD} & -L_{fkd}\,p \\ -L_{fkd}\,p & z_F \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} z_{kD} M_F p - L_{fkd} M_{kD} p^2 & -L_{fkd} M_F p^2 + z_F M_{kD} p \\ z_{kD} M_F \omega - L_{fkd} M_{kD}\omega p & -L_{fkd} M_F \omega p + z_F M_{kD}\omega \end{bmatrix}$$

Resulta entonces:

$$\begin{bmatrix} r_s + L_d p - \dfrac{p^2\left[z_{kD} M_F^2 + z_F M_{kD}^2 - 2 M_F L_{fkd} M_{kD}\,p\right]}{z_F z_{kD} - L_{fkd}^2 p^2} & -\omega\left[L_q - \dfrac{M_{kQ}^2\,p}{z_{kQ}}\right] \\ \omega\left[L_d - \dfrac{p\left[z_{kD} M_F^2 + z_F M_{kD}^2 - 2 M_F L_{fkd} M_{kD}\,p\right]}{z_F z_{kD} - L_{fkd}^2 p^2}\right] & r_s + L_q p - \dfrac{M_{kQ}^2\,p^2}{z_{kQ}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_d \\ I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_d - \dfrac{z_{kD} M_F p - L_{fkd} M_{kD} p^2}{z_F z_{kD} - L_{fkd}^2 p^2}\,V_F \\ V_q - \dfrac{z_{kD} M_F \omega - L_{fkd} M_{kD}\omega p}{z_F z_{kD} - L_{fkd}^2 p^2}\,V_F \end{bmatrix}$$

$$r_s + p\left[L_q - \frac{M_{kQ}^2\,p}{z_{kQ}}\right]$$

Estas ecuaciones pueden ponerse en forma más condensada:

$$\begin{bmatrix} V_d - p\,G(p)\,V_F \\ V_q - \omega\,G(p)\,V_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s + p\,L_d(p) & -\omega\,L_q(p) \\ \omega\,L_d(p) & r_s + p\,L_q(p) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_d \\ I_q \end{bmatrix}$$

ECUACIONES OPERACIONALES DE LA MÁQUINA SINCRÓNICA

definiendo:

$$\boxed{L_d(p) = L_d - \frac{p\left[z_{kD} M_F^2 + z_F M_{kD}^2 - 2 M_F L_{fkd} M_{kD}\,p\right]}{z_F z_{kD} - L_{fkd}^2 p^2}}$$

INDUCTANCIA OPERACIONAL DE EJE DIRECTO

$$\boxed{L_q(p) = L_q - \frac{M_{kQ}^2\,p}{z_{kQ}}}$$

INDUCTANCIA OPERACIONAL DE EJE EN CUADRATURA

$$\boxed{G(p) = \frac{z_{kD} M_F - L_{fkd} M_{kD}\,p}{z_F z_{kD} - L_{fkd}^2 p^2}}$$

Sustituyendo z_{kD}, z_F y z_{kQ} por sus expresiones, las inductancias operacionales y $G(p)$ resultan:

$$\boxed{L_d(p) = L_d - \frac{p^2\left(L_{kd} M_F^2 + L_{fd} M_{kD}^2 - 2 M_F L_{fkd} M_{kD}\right) + p\left(r_{kd} M_F^2 + r_f M_{kD}^2\right)}{\left(L_{fd} L_{kd} - L_{fkd}^2\right)p^2 + \left(r_f L_{kd} + r_{kd} L_{fd}\right)p + r_f r_{kd}}}$$

$$\boxed{L_q(p) = L_q - \frac{M_{kQ}^2\,p}{r_{kq} + L_{kq}\,p}}$$

$$\boxed{G(p) = \frac{\left(L_{kd} M_F - L_{fkd} M_{kD}\right)p + r_{kd} M_F}{\left(L_{fd} L_{kd} - L_{fkd}^2\right)p^2 + \left(r_f L_{kd} + r_{kd} L_{fd}\right)p + r_f r_{kd}}}$$

Inductancias y reactancias subtransitorias: si despreciamos las resistencias del rotor ($r_f = r_{kd} = r_{kq} = 0$) las inductancias operacionales no dependen de p y se denominan inductancias subtransitorias.

$$L_d(p)\Big|_{\text{si } r_f = r_{kd} = 0} = L_d - \frac{L_{kd} M_F^2 + L_{fd} M_{kD}^2 - 2 M_F L_{fkd} M_{kD}}{L_{fd} L_{kd} - L_{fkd}^2} \triangleq L''_d$$

inductancia subtransitoria de eje directo.

$$L_q(p)\Big|_{\text{si } r_{kq} = 0} = L_q - \frac{M_{kQ}^2}{L_{kq}} \triangleq L''_q$$

inductancia subtransitoria de eje en cuadratura.

Se definen las reactancias:

$$x''_d = \omega L''_d$$
$$x''_q = \omega L''_q$$

Inductancias y reactancias transitorias: para despreciar la influencia de los amortiguadores en las expresiones de L''_d y L''_q se hace tender $L_{kd} \to \infty$; $L_{kq} \to \infty$ y $L_{fkd} \to 0$, las inductancias resultantes se denominan transitorias:

$$L'_d \triangleq \lim_{\substack{L_{kd} \to \infty \\ L_{fkd} \to 0}} L''_d = L_d - \frac{M_F^2}{L_{fd}}$$

inductancia transitoria de eje directo

$$L'_q \triangleq \lim_{L_{kq} \to \infty} L''_q = L_q$$

inductancia transitoria de eje en cuadratura

Se definen las reactancias

$$x'_d = \omega L'_d$$
$$x'_q = \omega L_q$$

Inductancias y reactancias sincrónicas: para despreciar la influencia del inductor en las expresiones de $L'd$ y $L'q$ se hace tender $Lfd \to \infty$; las inductancias resultantes se denominan sincrónicas.

$$L_{ds} \triangleq \lim_{Lfd \to \infty} L'd = Ld$$ inductancia sincrónica de eje directo

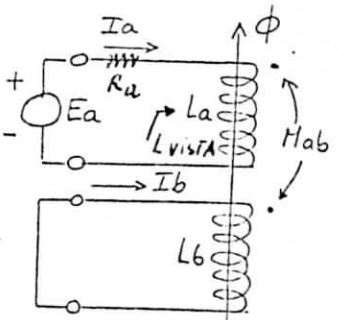
$$L_{qs} \triangleq \lim_{Lfd \to \infty} L'q = Lq$$ inductancia sincrónica de eje en cuadratura

Las reactancias:

$$X_d = \omega L_d$$
$$X_q = \omega L_q$$

Se observa que $L'q = L_{qs} = L_q$.

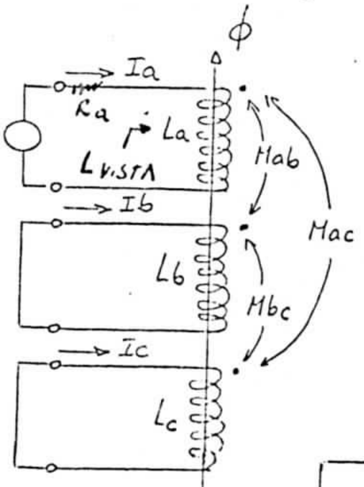
3. CONSTANTES DE TIEMPO. Consideraciones previas:



$$Ea = La\,s\,Ia + Mab\,s\,Ib$$
$$0 = Mab\,s\,Ia + Lb\,s\,Ib \implies Ib = \frac{-Mab}{Lb} Ia$$
$$Ea = \left(La - \frac{M^2ab}{Lb}\right) s\,Ia = La\left(1 - \frac{M^2ab}{LaLb}\right) s\,Ia$$

$$\boxed{Ta = \frac{La}{Ra}\left(1 - \frac{M^2ab}{LaLb}\right)}$$

CONSTANTE DE TIEMPO DEL DEVANADO a ESTANDO EL DEVANADO b EN CORTOCIRCUITO



$$Ea = La\,s\,Ia + Mab\,s\,Ib + Mac\,s\,Ic$$
$$0 = Mab\,s\,Ia + Lb\,s\,Ib + Mbc\,s\,Ic$$
$$0 = Mac\,s\,Ia + Mbc\,s\,Ib + Lc\,s\,Ic$$

$$Lb\,Ib + Mbc\,Ic = -Mab\,Ia$$
$$Mbc\,Ib + Lc\,Ic = -Mac\,Ia$$

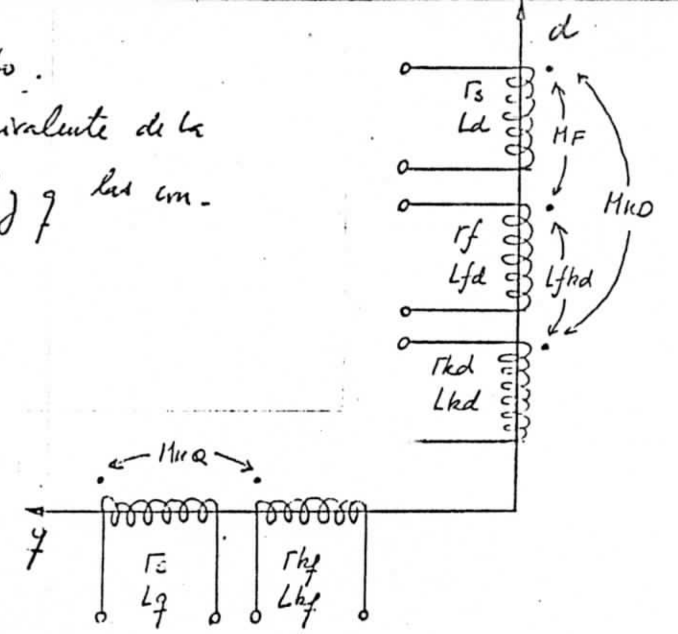
$$Ib = \frac{Mac\,Mbc - Mab\,Lc}{LbLc - M^2bc} Ia$$
$$Ic = \frac{Mbc\,Mab - Mac\,Lb}{LbLc - M^2bc} \cdot Ia$$

$$Ea = \left[La + \frac{Mab(Mac\,Mbc - Mab\,Lc) + Mac\,(Mbc\,Mab - Mac\,Lb)}{Lb\,Lc - M^2bc}\right] s\,Ia$$

$$\boxed{T'a = \frac{La}{Ra}\left(1 - \frac{Lb\,M^2ac + Lc\,M^2ab - 2Mab\,Mbc\,Mac}{La\,(LbLc - M^2bc)}\right)}$$

CONSTANTE DE TIEMPO DEL DEVANADO a ESTANDO LOS DEVANADOS b y c EN CORTOCIRCUITO.

Definición de las constantes de tiempo.
Aplicaremos al esquema circuital equivalente de la máquina sincrónica según los ejes d y q las consideraciones previas:



EJE d

1. CONSTANTES DE TIEMPO DEL INDUCTOR

	fd	kd	d
T'_{do}	VISTO DE	ABIERTO	ABIERTO
T'_{d}	VISTO DE	ABIERTO	¢¢

CTE. DE TIEMPO TRANSITORIA DE EJE d EN CIRCUITO ABIERTO
" " " " " " " EN CORTOCIRCUITO
(influye fd y no kd ∴ transitoria) ✓

2. CONSTANTES DE TIEMPO DEL AMORTIGUADOR DE EJE d

	kd	fd	d
T''_{do}	VISTO DE	¢¢	ABIERTO
T''_{d}	VISTO DE	¢¢	¢¢

CTE. DE TIEMPO SUBTRANSITORIA DE EJE d EN CIRCUITO ABIERTO
" " " " " " " EN CORTOCIRCUITO
(influye kd ∴ subtransitoria) ✓

EJE q

CONSTANTES DE TIEMPO DEL AMORTIGUADOR DE EJE q.

	kq	q
T''_{qo}	VISTO DE	ABIERTO
T''_{q}	VISTO DE	¢¢

CTE. DE TIEMPO SUBTRANSITORIA DE EJE q EN CIRCUITO ABIERTO
" " " " " " " EN CORTOCIRCUITO

(influye kq ∴ subtransitoria

+ TKD CTE DE TIEMPO DE FUGAS DEL AMORTIGUADOR DE EJE DIRECTO

$$T'_{do} = \frac{L_{fd}}{r_f} \quad ; \quad T'_d = \frac{L_{fd}}{r_f}\left(1 - \frac{M_F^2}{L_d L_{fd}}\right)$$

$$T''_{do} = \frac{L_{kd}}{r_{kd}}\left(1 - \frac{L^2_{fkd}}{L_{fd} L_{kd}}\right)$$

$$T''_d = \frac{L_{kd}}{r_{kd}}\left(1 - \frac{L_d L^2_{fkd} + L_{fd} M^2_{kD} - 2 M_F L_{fkd} M_{kD}}{L_{kd}\left(L_d L_{fd} - M_F^2\right)}\right)$$

$$T''_{qo} = \frac{L_{kq}}{r_{kq}} \quad ; \quad T''_q = \frac{L_{kq}}{r_{kq}}\left(1 - \frac{M^2_{kQ}}{L_q L_{kq}}\right)$$

$$T_{kD} = \frac{L_{kd}}{r_{kd}}\left(1 - \frac{L_{fkd} M_{kD}}{M_F L_{kd}}\right)$$

Expresión de $L_d(p)$ en función de las constantes de tiempo.

$$L_d(p) = L_d - \frac{p^2\left(L_{kd} M_F^2 + L_{fd} M^2_{kD} - 2 M_F L_{fkd} M_{kD}\right) + p\left(r_{kd} M_F^2 + r_f M^2_{kD}\right)}{\left(L_{fd} L_{kd} - L^2_{fkd}\right)p^2 + \left(r_f L_{kd} + r_{kd} L_{fd}\right)p + r_f r_{kd}}$$

$$L_d(p) = \frac{p^2\left[L_d L_{fd} L_{kd} - L_d L^2_{fkd} - L_{kd} M_F^2 - L_{fd} M^2_{kD} + 2 M_F L_{fkd} M_{kD}\right] + p\left[r_f\left(L_{kd} L_d - M^2_{kD}\right) + r_{kd}\left(L_{fd} L_d - M_F^2\right)\right] + L_d r_f r_{kd}}{p^2\left(L_{fd} L_{kd} - L^2_{fkd}\right) + p\left(r_f L_{kd} + r_{kd} L_{fd}\right) + r_f r_{kd}}$$

$$L_d(p) = L_d \frac{1 + p\left[\frac{L_{fd}}{r_f}\left(1 - \frac{M_F^2}{L_d L_{fd}}\right) + \frac{L_{kd}}{r_{kd}}\left(1 - \frac{M^2_{kD}}{L_d L_{kd}}\right)\right] + p^2 \frac{L_{kd}\left(L_d L_{fd} - M_F^2\right) - \left(L_d L^2_{fkd} + L_{fd} M^2_{kD} - 2 M_F L_{fkd} M_{kD}\right)}{L_d r_f r_{kd}}}{1 + p\left(\frac{L_{kd}}{r_{kd}} + \frac{L_{fd}}{r_f}\right) + p^2 \frac{L_{fd}}{r_f}\frac{L_{kd}}{r_{kd}}\left(1 - \frac{L^2_{fkd}}{L_{fd} L_{kd}}\right)}$$

Definiendo: $\boxed{T_2 \triangleq \frac{L_{kd}}{r_{kd}}}$ y $\boxed{T_5 \triangleq \frac{L_{kd}}{r_{kd}}\left(1 - \frac{M^2_{kD}}{L_d L_{kd}}\right)}$ $\Rightarrow$ $\boxed{L_d(p) = L_d \frac{1 + p\left(T'_d + T_5\right) + p^2 T'_d T''_d}{1 + p\left(T'_{do} + T_2\right) + p^2 T'_{do} T''_{do}}}$

En la práctica se verifican las siguientes relaciones:

$\underline{T_5 << T'_d}$; $\underline{T''_d << T'_d}$ $\Rightarrow$ $T'_d + T_5 \approx T'_d \approx T'_d + T''_d$

$$1 + p\left(T'_d + T_5\right) + p^2 T'_d T''_d \cong 1 + p\left(T'_d + T''_d\right) + p^2 T'_d T''_d = \left(1 + T'_d p\right)\left(1 + T''_d p\right)$$

$\underline{T_2 << T'_{do}}$; $\underline{T''_{do} << T'_{do}}$ $\Rightarrow$ $T'_{do} + T_2 \approx T'_{do} \approx T'_{do} + T''_{do}$

$$1 + p\left(T'_{do} + T_2\right) + p^2 T'_{do} T''_{do} \approx 1 + p\left(T'_{do} + T''_{do}\right) + p^2 T'_{do} T''_{do} = \left(1 + T'_{do} p\right)\left(1 + T''_{do} p\right)$$

O sea que $L_d(p)$ será: $\boxed{L_d(p) \cong L_d \frac{\left(1 + T'_d p\right)\left(1 + T''_d p\right)}{\left(1 + T'_{do} p\right)\left(1 + T''_{do} p\right)}}$

Expresión de $L_q(p)$ en función de las constantes de tiempo:

$$L_d(p) = L_q - \frac{M_{kQ}^2\, p}{r_{kq} + L_{kq}\, p} = \frac{(r_{kq} + L_{kq}\, p)L_q - M_{kQ}^2\, p}{r_{kq} + L_{kq}\, p} = L_q \frac{r_{kq} + \left(L_{kq} - \frac{M_{kQ}^2}{L_q}\right)p}{r_{kq} + L_{kq}\, p} = L_q \frac{1 + \frac{L_{kq}}{r_{kq}}\left(1 - \frac{M_{kQ}^2}{L_q L_{kq}}\right)p}{1 + \frac{L_{kq}}{r_{kq}}\, p}$$

$$\boxed{L_q(p) = L_q \frac{1 + T''_q\, p}{1 + T''_{qo}\, p}}$$

Expresión de $G(p)$ en función de las constantes de tiempo.

$$G(p) = \frac{r_{kd} M_F + (L_{kd} M_F - L_{fkd} M_{kD})\, p}{r_f r_{kd} + (r_f L_{kd} + r_{kd} L_{fd})p + (L_{fd} L_{kd} - L_{fkd}^2)p^2} = \frac{M_F}{r_f} \frac{1 + \frac{L_{kd}}{r_{kd}}\left(1 - \frac{L_{fkd} M_{kD}}{L_{kd} M_F}\right)p}{1 + \left(\frac{L_{kd}}{r_{kd}} + \frac{L_{fd}}{r_f}\right)p + \frac{L_{fd}}{r_f}\frac{L_{kd}}{r_{kd}}\left(1 - \frac{L_{fkd}^2}{L_{fd} L_{kd}}\right)p^2}$$

el denominador es el mismo de $L_d(p)$ por lo tanto:

$$\boxed{G(p) = \frac{M_F}{r_f} \frac{1 + T_{kd}\, p}{1 + p(T'_{do} + T_2) + p^2 T'_{do} T''_{do}}} \quad \text{ó} \quad \boxed{G(p) \cong \frac{M_F}{r_f} \frac{(1 + T_{kd}\, p)}{(1 + T'_{do}\, p)(1 + T''_{do}\, p)}}$$

Relaciones entre las reactancias y las constantes de tiempo:

$$\frac{T'_{do}}{T'_d} = \frac{1}{1 - \frac{M_F^2}{L_d L_{fd}}} = \frac{L_d}{L_d - \frac{M_F^2}{L_{fd}}} = \frac{L_d}{L'_d} \Rightarrow \boxed{\frac{T'_{do}}{T'_d} = \frac{L_d}{L'_d} = \frac{X_d}{X'_d}}$$

$$\frac{T''_{do}}{T''_d} = \frac{L_{fd} L_{kd} - L_{fkd}^2}{L_{fd} L_{kd}} \; \frac{L_{kd}(L_d L_{fd} - M_F^2)}{L_{kd} L_d L_{fd} - L_{kd} M_F^2 - L_d L_{fkd}^2 - L_{fd} M_{kD}^2 + 2 M_F L_{fkd} M_{kD}} =$$

$$= \left(L_d - \frac{M_F^2}{L_{fd}}\right) \frac{1}{\frac{L_d(L_{kd} L_{fd} - L_{fkd}^2) - (L_{kd} M_F^2 + L_{fd} M_{kD}^2 - 2 M_F L_{fkd} M_{kD})}{L_{fd} L_{kd} - L_{fkd}^2}} =$$

$$= \left(L_d - \frac{M_F^2}{L_{fd}}\right) \frac{1}{L_d - \frac{L_{kd} M_F^2 + L_{fd} M_{kD}^2 - 2 M_F L_{fkd} M_{kD}}{L_{fd} L_{kd} - L_{fkd}^2}} = \frac{L'_d}{L''_d} = \frac{X'_d}{X''_d} \Rightarrow \boxed{\frac{T''_{do}}{T''_d} = \frac{L'_d}{L''_d} = \frac{X'_d}{X''_d}}$$

$$\frac{X_d}{X''_d} = \frac{X_d}{X'_d}\frac{X'_d}{X''_d} = \frac{T'_{do}}{T'_d}\frac{T''_{do}}{T''_d} \Rightarrow \boxed{\frac{X_d}{X''_d} = \frac{T'_{do}}{T'_d}\frac{T''_{do}}{T''_d}}$$

$$\frac{T''_q}{T''_{qo}} = 1 - \frac{M_{kQ}^2}{L_q L_{kq}} = \frac{L_q - \frac{M_{kQ}^2}{L_{kq}}}{L_q} = \frac{L''_q}{L_q} = \frac{X''_q}{X_q} \Rightarrow \boxed{\frac{T''_q}{T''_{qo}} = \frac{L''_q}{L_q} = \frac{X''_q}{X_q}}$$

Ordenes de magnitud de las reactancias y constantes de tiempo:

Datos para máquinas de media y de gran potencia de construcción normal. Las reactancias están expresadas en valores por unidad a la velocidad nominal,

$X(pu) = X(\Omega)\dfrac{I_n}{V_n}$ siendo I_n = corriente nominal de la máquina

V_n = tensión nominal de la máquina

	POLOS SALIENTES	ROTOR LISO
X_d	0.8 - 1.5	1.5 - 2.5
X'_d	0.25 - 0.40	0.2 - 0.35
X''_d	0.15 - 0.25	0.15 - 0.25
X_q	0.5 - 1.1	1.5 - 2.5
X''_q	0.15 - 0.25	0.15 - 0.25

(S)	POLOS SALIENTES	ROTOR LISO
T'_{do}	4 - 8	8 - 12
T''_{do}	0.03 - 0.06	0.03 - 0.06
T'_d	1.5 - 3	1 - 2
T''_d	0.02 - 0.05	0.02 - 0.05
T''_{qo}	0.03 - 0.06	0.03 - 0.06
T''_q	0.02 - 0.05	0.02 - 0.05
T_{kD}	0.01 - 0.03	0.01 - 0.03