

$$\alpha(t) = \Omega(t) \cdot t + \alpha_0 \quad \underline{M}$$

$$\Omega(t) = \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} \cdot t + \Omega(t)$$

Hay que ordenar  
con mayor precisión  
el orden



Si funciona a vel. sinusoidal:

$$\alpha(t) = \Omega_s t + \alpha_0$$

En general, estamos considerando perturbaciones en la velocidad de rotación.

$$\text{En general } \Omega = \Omega(t) = \frac{d\alpha}{dt}$$

Estas perturbaciones se considerarán como superpuestas a la vel. de giro

$$\alpha(t) = \Omega_s t + \delta(t) + \alpha_0$$

Hip.  $\left[ \begin{array}{l} V_s = \text{cte} \\ f = \text{cte} \end{array} \right] \Rightarrow \omega \text{ cte.} \Rightarrow$   
Campo giratorio a vel. cte.

$$\Omega(t) \neq \Omega_s \text{ cte, pero}$$

$$\Omega(t) \approx \Omega_s$$

$$\Omega(t) = \frac{d\alpha}{dt} = \Omega_s + \dot{\delta}(t)$$

$$(1) \quad \boxed{J \frac{d\Omega}{dt} = \tau_m - \tau_r}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \ddot{\delta}$$

(1)  $\rightarrow$  (2) multiplicado por  $\Omega(t)$

$$J \Omega(t) \frac{d\Omega}{dt} = \tau_m - \tau_r$$

Aprox.  $\Omega(t) \approx \Omega_s$ , luego, en función de las variaciones por se encuentran, se justifica esta suposición. Si además se escribe para el caso de un alternador

$$\Rightarrow (3) \quad \boxed{J \Omega_s \ddot{\delta} = \tau_m - \frac{3V_s E}{X_s} \sin \delta}$$

Variaciones en torno a un punto de equilibrio

$$\text{En } t = t_0 : \quad \begin{array}{l} \tau_m = \tau_{m0} \\ \tau_r = \tau_{r0} = \frac{3V_s E}{X_s} \sin \delta_0 \end{array}$$

Hip adicional  $\rightarrow E = \text{cte}$   
(Behn-Ehrlich  $\rightarrow X_s = \text{cte}$ )

(3)  $\rightarrow$  (4) en equilibrio eq. perm.:

$$\tau_{m0} = \frac{3V_s E}{X_s} \sin \delta_0$$

$$I_m = I_{m_0} + \Delta P_m$$

$$\delta = \delta_0 + \Delta \delta$$

$$\ddot{\delta} = \ddot{\Delta \delta}$$

$$(3) \Rightarrow J \Omega_s \ddot{\delta} = I_{m_0} + \Delta P_m - \frac{3V_s E}{x_s} \sin(\delta_0 + \Delta \delta)$$

"  $\sin \delta_0 + \cos(\delta_0) \cdot \Delta \delta + \dots$  "

$$(3) \Rightarrow (5) \quad \underbrace{J \Omega_s}_{M_s} \ddot{\delta} \approx \underbrace{\left( I_{m_0} + \frac{3V_s E}{x_s} \sin \delta_0 \right)}_0 + \Delta P_m - \frac{3V_s E}{x_s} \cos(\delta_0) \cdot \Delta \delta$$

$$(5) \quad M_s \ddot{\Delta \delta} \approx \Delta P_m - \underbrace{\frac{3V_s E}{x_s} \cos \delta_0}_{P_s(\delta_0)} \cdot \Delta \delta$$

con  $\left| P_s(\delta) = \frac{3V_s E}{x_s} \cos \delta \right|$   
 "potencia sincronizante"

$$(5) \quad \boxed{M_s \ddot{\Delta \delta} + P_s(\delta_0) \cdot \Delta \delta \approx \Delta P_m}$$

Ej. de pequeñas oscilaciones

$$\boxed{\ddot{\Delta \delta} + \frac{P_s(\delta_0)}{M} \Delta \delta = \frac{\Delta P_m}{M_s}}$$

1) Oscilaciones libres:  $\omega_0^2 = \frac{P_s(\delta_0)}{M_s}$  (depende de  $\delta_0$ )

$$(6) \quad \boxed{\ddot{\Delta \delta} + \omega_0^2 \Delta \delta = 0}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\dot{x} = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\ddot{x} = -A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$-A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) + A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = 0$$

linealizado: oscilaciones sinusoidales  
 pulsación natural:  $\omega_0 = \sqrt{\frac{P_s(\delta_0)}{M_s}}$

2) Oscilaciones forzadas

$$\Delta P_m(t) = \Delta P_{m_1} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \rightarrow$$

$$(7) \quad \boxed{\ddot{\Delta \delta} + \omega_0^2 \Delta \delta = \Delta P_{m_1} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)}$$

Situación general:

La proposición de 1 solución particular de la eq. con  $\omega_1 \neq 0$ , más la solución general de la eq. de oscilaciones libres.

(un cond. inic.)  $\rightarrow \begin{matrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{matrix}$

# Frecuencia natural de oscilaciones libres.

$$\boxed{\ddot{\Delta\delta} + \omega_0^2 \Delta\delta = 0}$$

$$\text{con } \omega_0 = \sqrt{\frac{P_S(\delta_0)}{M_S}}$$

$$P_S(\delta_0) = \frac{3V_S E}{X_S} \cos \delta_0$$

def "Potencia sincronizante"

No es una potencia de la máquina, pero sí tiene dimensiones de potencia, y es la pendiente de la potencia eléctrica.

$$M_S = J \Omega_s \leftarrow \text{Vel. de sincronismo.}$$

↑ momento de inercia

En lugar de J, para las máquinas se suele dar la llamada "constante de inercia = H" o "tiempo de laminamiento".

$$H \stackrel{\text{def}}{=} \frac{T_m}{S_n} = \frac{\text{Energía cinética nominal}}{\text{Potencia aparente nominal}}$$

$$H = \frac{\frac{1}{2} J \Omega_s^2}{\sqrt{3} V_n I_n} \quad [H] = \frac{\text{"MJoule"}}{\text{"MVA"}} = \text{s} \quad \leftarrow \text{"Tiempo" de laminamiento?}$$

$$\omega_0^2 = \frac{P_S(\delta_0)}{M_S} = \frac{1}{2} \frac{P_S(\delta_0) \cdot \Omega_s}{H \cdot S_n} = \frac{1}{2} \frac{\frac{3V_S E \cos \delta_0 \cdot \Omega_s}{X_S}}{H \cdot \sqrt{3} V_n I_n}$$

$$\text{Si } \left. \begin{array}{l} V_S = V_n = E \\ E_{exc} = E \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} E = c\bar{t} \\ V = c\bar{t} \end{array} \right\} \quad , \quad X_S = x_S(p.u.) \cdot \frac{V_n}{I_n}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{2} \frac{\frac{V_n E}{X_S (V_n/I_n)} \cos \delta_0 \cdot \Omega_s}{H \cdot \sqrt{3} \cdot I_n} = \frac{1}{2} \frac{E I_n \cos \delta_0 \cdot \Omega_s}{V_n \cdot H \cdot \sqrt{3} \cdot I_n}$$

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{E}{V_n} \right) \frac{\cos \delta_0}{x_S} \frac{\Omega_s}{H}}$$

Val. típicos:  $E \sim V_n \Rightarrow \frac{E}{V_n} \sim 1$

$\cos \delta_0 \sim \cos 30^\circ = 0,707$

$x_S(p.u.) \sim 1$

$\Omega_s = 314 \text{ s}^{-1}$  (bipolar, 50 Hz)

$$\Rightarrow \omega_0^2 \sim 28 \Rightarrow \omega_0 \sim 5,3 \text{ s}^{-1} \Rightarrow f_0 \sim 0,8 \text{ s}$$

$2s < H < 10s \Rightarrow H \sim 6s$

Ej. de grandes oscilaciones

(3)  $J \Omega_s \ddot{\delta} = P_m - P_e(\delta)$  también podría ser  $P_m(\delta)$

Principio:

obs):  $\frac{d}{dt}(\dot{\delta}^2) = 2\dot{\delta}\ddot{\delta}$

(8) = (3) x  $2\dot{\delta}$ :  $2 \underbrace{J \Omega_s}_{M_s} \dot{\delta} \ddot{\delta} = 2(P_m(\delta) - P_e(\delta)) \cdot \dot{\delta}$

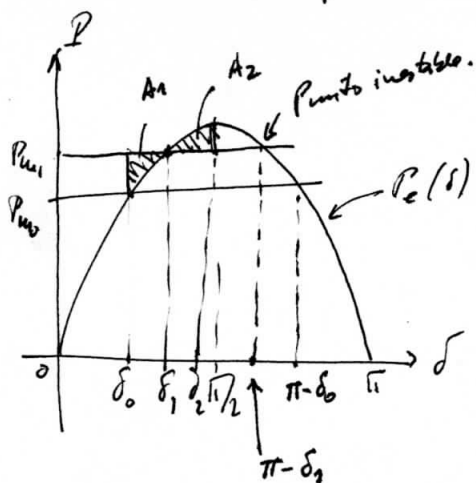
$2M_s \dot{\delta} \ddot{\delta} = 2[P_m(\delta) - P_e(\delta)] \dot{\delta}$

$\frac{d}{dt}(\dot{\delta}^2) = \frac{2[P_m(\delta) - P_e(\delta)]}{M_s} \dot{\delta}$

$\dot{\delta}^2 = \int_{t_0}^t \frac{2[P_m(\delta) - P_e(\delta)]}{M_s} \frac{d\delta}{dt} dt$

$\dot{\delta} = \pm \sqrt{\int_{\delta_0}^{\delta} \frac{2[P_m(\delta) - P_e(\delta)]}{M_s} d\delta}$

$\ddot{\delta} = \frac{P_m(\delta) - P_e(\delta)}{M_s}$



de  $\delta_0 < \delta_1$ , se va a tener  $\dot{\delta}(\delta_1) \geq 0$   
 en  $\delta_1$  se tendría  $\ddot{\delta} = 0$   
 Pero  $\dot{\delta} > 0 \Rightarrow$  sigue  $\delta$  creciendo  
 hasta  $\delta_2$  en que  $\dot{\delta}(\delta_2) = 0$   
 en  $\delta_2$ : se tiene  $\ddot{\delta} < 0$  y  
 tiene aceleración de retroceso.

Ley de las áreas: Se alcanza  $\delta_2$  cuando  $A_2 = A_1$

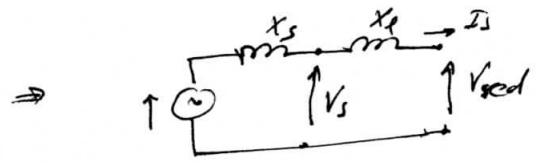
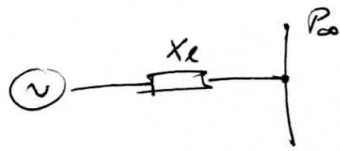
Hay estabilidad dinámica si  $\delta_2 < \pi - \delta_1$

"Ley de las áreas": El área de  $P_{elec}$  (sin) por encima de  $P_m$  debe ser  $> A_1$

( $A_1$  representa la "energía de aceleración de la MS, y tiene que haber energías de desaceleración antes de alcanzar el punto de inestabilidad en  $\pi - \delta_1$ )

# Aplicaciones de la estabilidad por ley de los Arcos -

1) Ejemplo: ~~Pérdida de un vínculo~~  
 Conexión a una red  $\infty$  a través de 2 reactancias

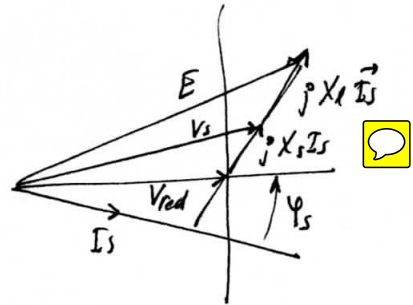


$$\vec{V}_{red} = \vec{V}_s - jX_e \vec{I}_s$$

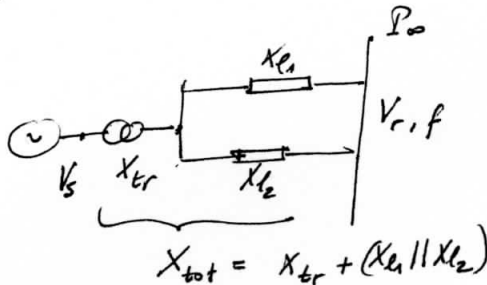
$$\vec{V}_s = E - jX_s \vec{I}_s$$

$$\vec{V}_{red} = E - j(X_s + X_e) \vec{I}_s$$

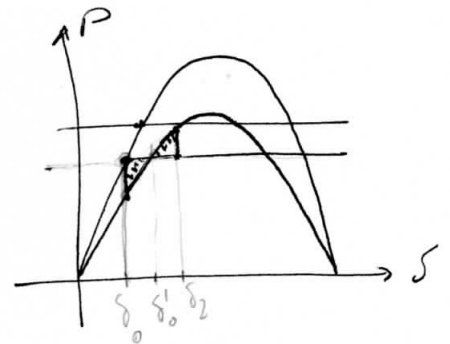
Estabilidad con  $X'_s = X_s + X_e$



2) Ejemplo: Pérdida de un vínculo

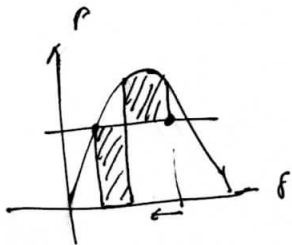
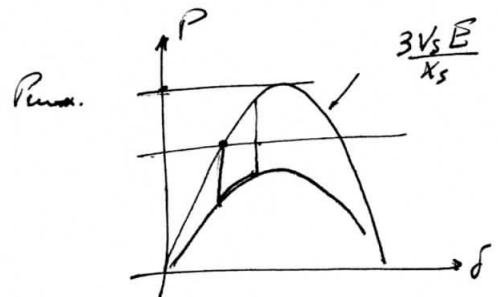
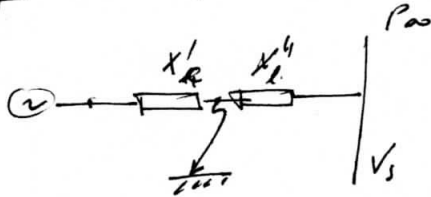


$$X_{tot} = X_{tr} + (X_{e1} || X_{e2})$$



Si  $X_{e2}$   $\nearrow$  abre  $\rightarrow X'_{tot} = X_{tr} + X_{e1} > X_{tot}$

3) Tiempo de despeje de un fault  
 Hay: CC trifásica a tierra



$$P_{max} = \frac{3V_s E}{X_s + X_e}$$

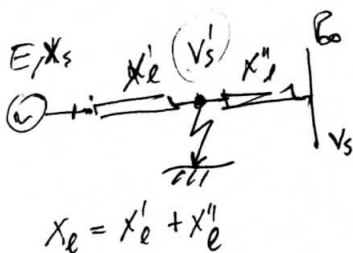
$$P_{max} = \frac{3V_s E}{X_e}$$

si CC trifásica

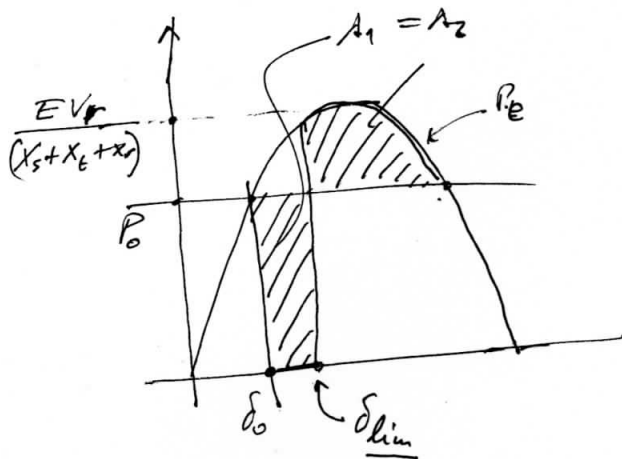
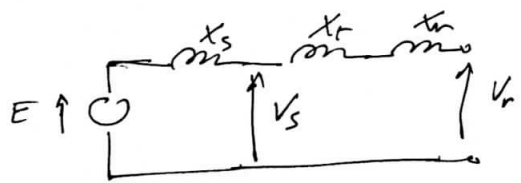
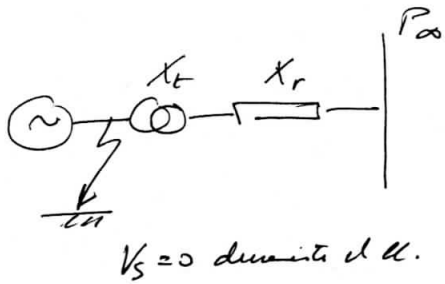
Si  $V'_s \infty$

$$P_t = \frac{3V_s E}{X_s + X_e}$$

$$P_t = \frac{3V'_s E}{X_s + X'_e}$$



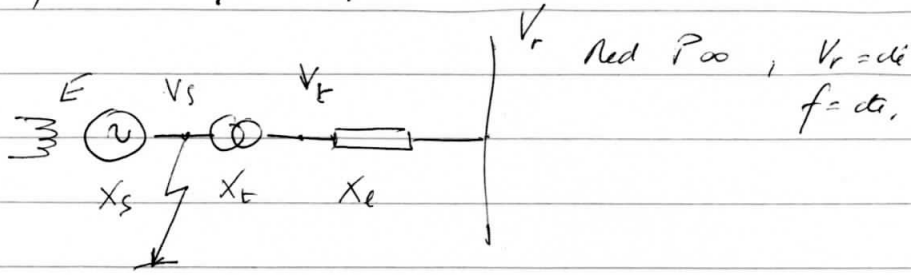
3) Caso más crítico: CC. en buses.



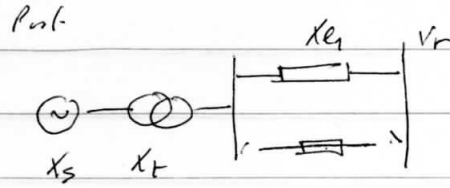
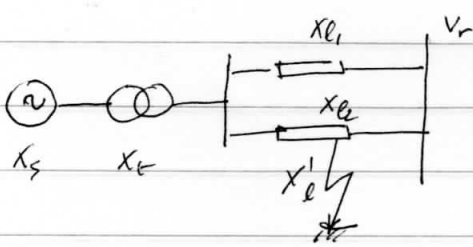
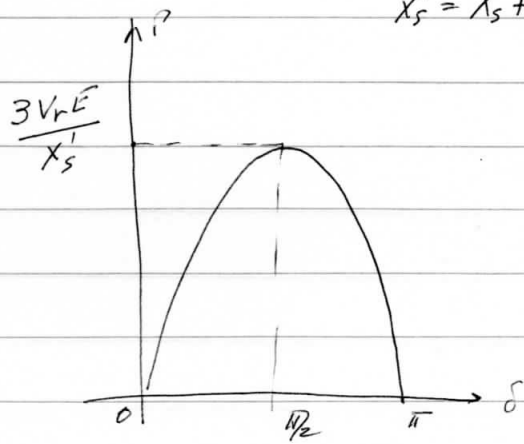
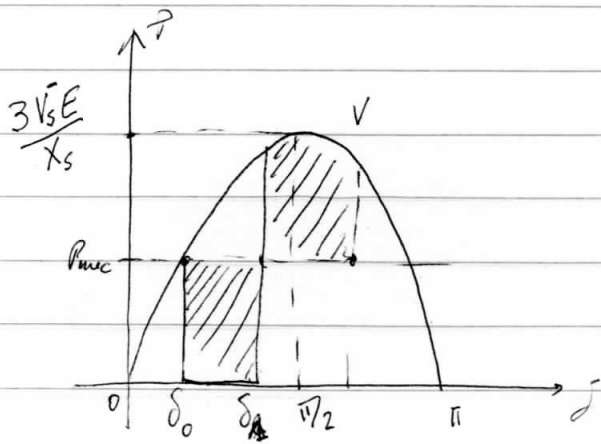
Durante el corto -  $P = 0$ .

La ley de las áreas fija el  $\delta_{lim}$  y por lo tanto el tiempo máximo que puede permanecer instalado el CC antes de ser despejado por razones de estabilidad. ✓

3) Falta y "tiempo de despeje" de una falta.

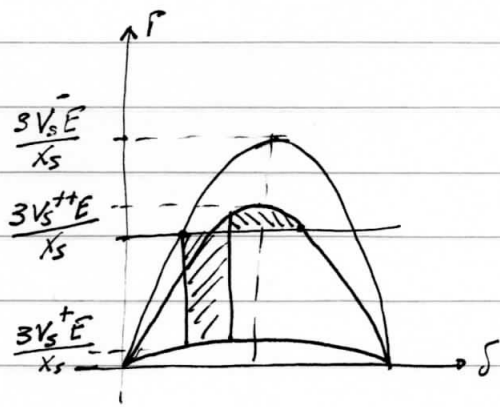
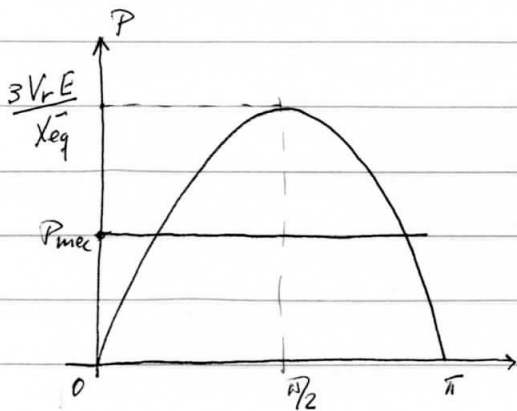
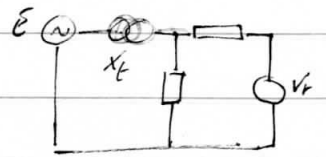


CC tripéris en barras.



$$X'_e = X_{e1} \parallel X_{e2}$$

$$X_{eq}^- = X_s + X_t + X'_e$$



op: reconstrucción poco precisa en tanto Vs  
no etc.

