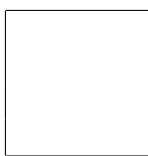


SEGUNDO PARCIAL GLOBALIZADOR
28 DE NOVIEMBRE.



No. Parcial

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

Ejercicio 1 (11 pts)

Se considera $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ transformación lineal, $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ base de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}_2 = \{1, x + 1, x^2 + x, x^3 - 1\}$ base de $\mathbb{R}_3[x]$ tal que

$${}_{\mathcal{B}_2}[T]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Determinar si T es un isomorfismo.
2. Hallar ${}_{\mathcal{C}_2}[T]_{\mathcal{C}_1}$, donde $\mathcal{C}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\mathcal{C}_2 = \{1, x + 1, x^2 + 2x + 1, x^3\}$.
3. Hallar la expresión general de T .
4. Sea $S : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $S(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (a + b + c, a + c + d, b + c + d)$. Hallar la expresión de $S \circ T$ y ${}_{\mathcal{E}}[S \circ T]_{\mathcal{B}_1}$, donde \mathcal{E} es la base canónica de \mathbb{R}^3 .

Ejercicio 2 (9 pts)

Se consideran los planos $\alpha : 2x + y + z = 1$, $\beta : -x + 3y - 2z = -3$.

1. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P tales que $d(P, \alpha) = d(P, \beta)$. Nombrese γ .
2. Probar que γ es la unión de dos planos perpendiculares γ_1 y γ_2 .
3. Sea $Q \in \gamma_1$ tal que $d(Q, \alpha) = 3$. Probar que el conjunto de los puntos Q que cumplen esta condición es una recta y además paralela a $\alpha \cap \beta$.

Ejercicio 3 (11 pts)

Sea $n \in \mathbb{N}$, se considera el conjunto $A = \{M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : \text{tr}(M) = 0\}$.

1. Mostrar que A es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.
2. Sea $T : \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(M) = \text{tr}(M)$.
 - a) Mostrar que T es lineal.
 - b) Mostrar que T no es inyectiva.
 - c) Hallar $\text{Im}(T)$ y $\text{ker}(T)$. ¿Es T sobreyectiva?
 - d) Deducir la dimensión del subespacio A .
3. ¿Es cierto que $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) = A \oplus B$, siendo $B = \{M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : \text{tr}(M) \neq 0\}$? Justificar.