Universidad de la República
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística

Geometría y Álgebra Lineal 1 - Anual
Curso 2012

Segundo Parcial Globalizador

28 de Noviembre.

No. Parcial

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

Ejercicio 1 (11 pts)

Se considera $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[x]$ transformación lineal, $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}_2 = \{1, x+1, x^2+x, x^3-1\}$ base de $\mathbb{R}_3[x]$ tal que

$$_{\mathcal{B}_2}[T]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Determinar si T es un isomorfismo.
2. Hallar $_{\mathcal{C}_2}[T]_{\mathcal{C}_1}$, donde $\mathcal{C}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\mathcal{C}_2 = \{1, x+1, x^2+2x+1, x^3\}$.
3. Hallar la expresión general de T.
4. Sea $S : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$ tal que $S(ax^3+bx^2+cx+d) = (a+b+c, a+c+d, b+c+d)$. Hallar la expresión de $S \circ T$ y $_{\mathcal{E}}[S \circ T]_{\mathcal{B}_1}$, donde $\mathcal{E}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 2 (9 pts)

Se consideran los planos $\alpha : 2x+y+z = 1$, $\beta : -x+3y-2z = -3$.

1. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P tales que $d(P,\alpha) = d(P,\beta)$. Nombrese γ.
2. Probar que γ es la unión de dos planos perpendiculares γ_1 y γ_2.
3. Sea $Q \in \gamma_1$ tal que $d(Q,\alpha) = 3$. Probar que el conjunto de los puntos Q que cumplen esta condición es una recta y además paralela a $\alpha \cap \beta$.

Ejercicio 3 (11 pts)
Sea $n \in N$, se considera el conjunto $A = \{M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : \ \mathrm{tr}(M) = 0\}$.

1. Mostrar que A es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.
2. Sea $T : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $T(M) = \ \mathrm{tr}(M)$.
   a) Mostrar que T es lineal.
   b) Mostrar que T no es inyectiva.
   c) Hallar $\mathrm{Im}(T)$ y $\ker(T)$. ¿Es T sobreyectiva?
   d) Deducir la dimensión del subespacio A.
3. ¿Es cierto que $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = A \oplus B$, siendo $B = \{M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : \ \mathrm{tr}(M) \neq 0\}$? Justificar.