Diámetro Confiabilidad de una Red

Clase 5

Pablo Romero

Miércoles 28 de octubre, Universidad Nacional de Asunción, Paraguay.

Contenidos

Agenda

1. Algoritmos
2. Resultados
3. Conclusiones

Vector F

Vector F

Si $F_i^{(K,d)}$ representa la cantidad de subgrafos con exactamente $m-i$ enlaces operativos que conectan terminales por caminos de largo d o menos, y las probabilidades de operación son idénticas, entonces:

$$R_{K,G}^{d}(p) = \sum_{i=0}^{m} F_i^{(K,d)} p^{m-i} (1-p)^i \tag{1}$$

- Si hallamos el vector F podemos evaluar la DCR (y la medida clásica también).

Interpolación: Modelo Clásico

La idea principal

Seleccionar abscisas $p_i \in [0,1]$ y hallar el polinomio $R^d_{K,G}(p)$ tal que $R^d_{K,G}(p_i) = y_i$, donde cada y_i debe ser estimado.

Herramientas

Combinaremos el método de Monte Carlo para la estimación puntual, agregado de punto de Newton para interpolación y explotaremos propiedades de espacios de Hilbert para llevar el polinomio a coeficientes enteros.

Interpolación: Modelo Clásico

Vector F

- En el modelo clásico con $K = V$, F_{m-n+1} es el número de árboles recubridores de un subgrafo.
- Tal número se puede encontrar en tiempo polinomial (Kirchhoff).
- El número de cortes de mínimo cardinal n_c se obtiene en tiempo polinomial (Ball-Provan). Luego: $F_c = \binom{m}{c} - n_c$.
- Cada F_i es un entero que cumple $0 \leq F_i \leq \binom{m}{i}$, y $F_i = 0$ si $i > m - n + 1$, $F_i = \binom{m}{i}$ si $i < c$.
- Los restantes $m - n - c$ coeficientes son duros de hallar...

Monte Carlo

Dada una muestra $\Phi_1, \ldots, \Phi_N$ de N variables i.i.d. que respetan la ley Φ, considerar

$$\overline{\Phi_N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \Phi_i .$$

El estimador $\overline{\Phi_N}$ es consistente e insesgado para $R_V(G) = E(\Phi_i)$. Si N es suficientemente grande, un intervalo de confianza a nivel α para $R_G(p)$ centrado en $\overline{\Phi_n}$ tiene radio:

$$\delta \approx \frac{\sqrt{\overline{\Phi_N}(1 - \overline{\Phi_N})} z_{\alpha/2}}{\sqrt{N}}$$

siendo $P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$ para una variable normal estándar Z.

Interpolación de Newton

Definición

Este método construye iterativamente el polinomio interpolante, incluyendo en cada iteración un nuevo punto $(x_i, g(x_i))$. Si g_i interpola los primeros i puntos, el nuevo polinomio $g_{i+1}(x) = g_i(x) + c_{i+1} \prod_{j \leq i}(x - x_j)$ respeta $g_{i+1}(x_k) = g_i(x_k)$ para todo $k \leq i$, donde c_{i+1} se elige para que $g_{i+1}(x_{i+1}) = y_{i+1}$.

Interpolación de Newton

Proposición

Si g es el polinomio interpolante de h por $\{(x_i, h(x_i))\}_{i=1,\ldots,m-n-c}$, *el error global se puede encontrar exactamente para cada punto* $x \in [x_1, x_{m-n-c}]$ *(Issacson):*

$$h(x) - g(x) = [x_1, x_2, \ldots, x_{m-n-c}, x](h) \prod_{i=1}^{m-n-c} (x - x_i),$$

donde el operador $[x_1, x_2, \ldots, x_n](f)$ *se define recursivamente mediante* $[x_1]f = f(x_1)$ *y* $[x_1, \ldots, x_k]f = \frac{[x_2,\ldots,x_k](f)-[x_1,\ldots,x_{k-1}](f)}{x_k - x_1}$.

Corolario

Un error uniforme para $R_V(p)$ *tiene orden* $\delta' = 2^{m-n-c}\delta$, *siendo* δ *el radio del intervalo de confianza.*

Algoritmo *RelInterpol*

Algoritmo 1 $R' = RelInterpol(G, x, N)$

1: $(c, n_c, \kappa) \leftarrow Hallar(G)$
2: $y \leftarrow MonteCarlo(x, N)$
3: $g \leftarrow Newton(x, y)$
4: $R^* \leftarrow Construir(g, c, n_c, l, n_l)$
5: $R' \leftarrow Hilbert(R^*)$
6: **while** **no** $CriterioFreno(R') = 1$ **do**
7: $\quad Incrementar(N)$
8: $\quad$ **Ir a Línea 2**
9: **end while**
10: **return** R'

Generalizaciones

Dos Generalizaciones

- Puesto que el objeto de estudio para la DCR es un polinomio, la interpolación es aplicable.
- En caso de conocer cortes y estados operativos, se generaliza aún más la interpolación, reduciendo el universo de muestreo.

Algoritmo $d - Interpol$

Algoritmo 2 $R = d - Interpol(G, K, d, N, x)$

for $i = 0$ a m **do**
    $y_i \leftarrow MonteCarloCrudo(x_i, N)$
end for
$y \leftarrow (y_1, \ldots, y_m)$
$g \leftarrow Newton(x, y)$
$R \leftarrow Hilbert(g)$
return R

F-MonteCarlo

F-MonteCarlo

Este algoritmo estima el vector F mediante un conteo, utilizando el método de Monte Carlo. Se sortean grafos independientes, y las cantidades $F_i^{(K,d)}$ se estiman considerando la variable aleatoria promedio.

F-MonteCarlo

Algoritmo 3 $R_K(G,d) = F - MonteCarlo(G,K,d,N)$

for $j = 0$ a m **do**
  $Sum_j \leftarrow 0$
  for $i = 1$ a N **do**
    $X_i^j \leftarrow MonteCarlo(G,K,d)$
    $Sum_j \leftarrow Sum_j + X_i^j$
  end for
  $\overline{X^j}_N \leftarrow Sum_j / N$
  $F_j^d \leftarrow \binom{m}{j} \overline{X^j}_N$
end for
$R_K(G,d) \leftarrow \sum_{i=0}^{m} F_i^{(d,K)} p^{m-i} (1-p)^i$
return $R_K(G,d)$

Agenda

Grafo Ejemplo

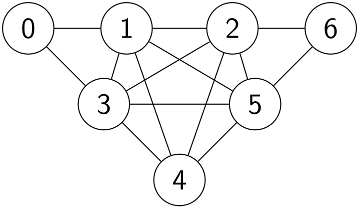

Figure: Grafo ejemplo con $n = 7$ nodos y $m = 14$ enlaces.

Su confiabilidad con todos los terminales se puede hallar exactamente:

$$R_G(p) = 720p^6 - 4136p^7 + 10741p^8 - 16356p^9 + \\ + 15894p^{10} - 10056p^{11} + 4034p^{12} - 936p^{13} + 96p^{14}$$

Resultados: *RelInterpol*

Resultados

Table: Desempeño en función del tamaño de muestra.

$N = 10^i$	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
5	720	-4020	9648	-12054	6674
6	720	-4047	9895	-12963	8477
7	720	-4113	10528	-15523	14110
8	720	-4125	10633	-15926	14957
Exacto:	720	-4136	10741	-16356	15894

$N = 10^i$	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}
5	1595	-4669	2629	-523
6	-494	-3249	2103	-441
7	-7791	2328	-230	-28
8	-8851	3118	-554	29
Exacto:	-10056	4034	-936	96

Resultados: $F - MonteCarlo$

Resultados: $F - MonteCarlo$

Table: $F - MonteCarlo$ para el grafo K_5 con $K = V$ y $d = 2$.

Tamaño de muestra (10^i)	F_0^2	F_1^2	F_2^2	F_3^2	F_4^2	F_5^2	F_6^2
3	1	10	45	120	147	45	5
4	1	10	45	120	145	43	5
5	1	10	45	120	145	42	5
6	1	10	45	120	145	42	5
Exacto:	1	10	45	120	145	42	5

Resultados F-MonteCarlo

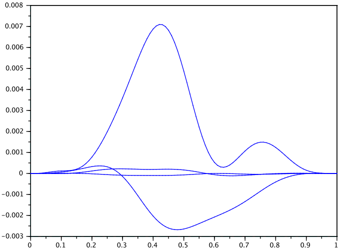

Figure: F-MonteCarlo $(H_{4,15})$

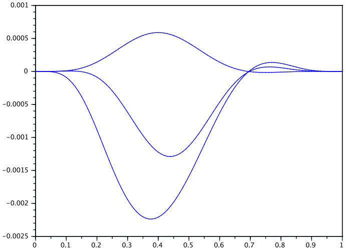

Figure: F-MonteCarlo (K_6).

Resultados Interpolación

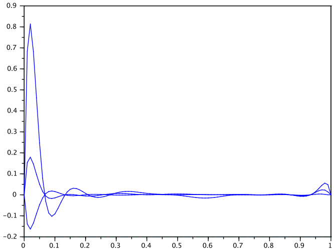

Figure: d-Interpol (K_6).

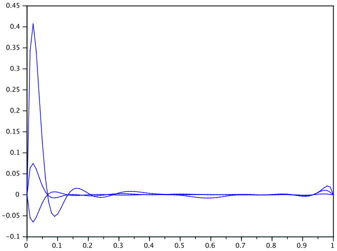

Figure: DCR-Interpol (K_6).

Agenda

Problemas Abiertos

1. Calcular la DCR de K_n cuando $K = V$ y $d = 2$.
2. Contar la cantidad de subgrafos de diámetro 2 dentro de K_n.
3. Calcular la DCR de los grafos de Halin.
4. Estabilizar técnicas basadas en interpolación polinómica.
5. Determinar si una arista es o no irrelevante.

Actividad Actual

1. Tesistas de grado y posgrado.
2. Proyecto sobre SBS arbitrarios.
3. Determinación de aristas irrelevantes.
4. Complejidad del cómputo de DCR en redes 2-nodo conexas.
5. Nuevo Curso de posgrado: “Diámetro Confiabilidad de Redes”.