Diámetro Confiabilidad de una Red

Clase 3

Pablo Romero

Viernes 23 de octubre, Universidad Nacional de Asunción, Paraguay.

Diámetro Confiabilidad de una Red (DCR)

DCR

Si $G = (V, E)$, $K \subseteq V$ son los *terminales* y d es un entero positivo llamado *diámetro*, análogamente se define $\phi(X) = 1$ si el grafo $G = (V, X)$ verifica que $d_X(u, v) \leq d$ para todo par de terminales $u, v \in K$. La *diámetro confiabilidad de una red* es $R = P(\phi(X) = 1)$.

Como la DCR generaliza el problema clásico, su cálculo de confiabilidad es un problema $\mathcal{NP}$-Difícil.

Alternativas

Alternativas

Desde que la evaluación de la DCR es un problema $\mathcal{NP}$-Difícil en general, las alternativas son las siguientes:

- Fijar casos en términos de (k, d).
- Fijar topologías de grafos.
- Desarrollar algoritmos para estimar la DCR.
- Proponer algoritmos exactos (sobrepolinomiales).

Diámetro $d = 1$

Cuando el diámetro es $d = 1$, todos los enlaces directos entre terminales debe funcionar:

$$R^1_{K,G} = \prod_{\{u,v\} \subseteq K} p(uv)$$

Este resultado vale para cualquier $K \subseteq V$.

Diámetro $d = 2$ y $k = 2$

En este caso, los terminales deben estar conectados con un enlace directo o mediante un tercer nodo:

$$R^2_{\{u,v\},G} = 1 - (1 - p(uv)) \prod_{w \in V - \{u,v\}} (1 - p(uw)p(wv))$$

Diámetro $d = 2$ y k entrada finita

1. Podemos eliminar aristas irrelevantes (que unen nodos no terminales).
2. Dados dos grafos $G_1 = (V, E_1)$ y $G_2 = (V, E_2)$ y $K \subseteq V$, $f : V \to V$ es K-*isomorfismo* de G_1 en G_2 si es un isomorfismo que fija el conjunto K.
3. Dos configuraciones operativas (pathsets) son *equivalentes* si son K-isomorfas.
4. Definimos dos vértices u y v como *gemelos* si tienen exactamente los mismos vecinos dentro de K.
5. Los gemelos definen una relación de equivalencia en G: $u \equiv v$ sii son gemelos en K^C o son el mismo vértice.
6. Consideremos la familia de grafos cocientes bajo la relación $\equiv$.

Diámetro $d = 2$ y k entrada finita

Teorema

La cantidad de configuraciones operativas que no son K-isomorfas depende solamente de k.

Prueba. Hay a lo sumo $2^{k(k-1)/2}$ maneras de unir vértices de K, y no más de 2^k vértices no gemelos en K^C. Entonces, tenemos a lo sumo $2^{\frac{k(k-1)}{2}}2^k$ configuraciones operativas que no son K-isomorfas.

Q.E.D.

Diámetro $d = 2$ y k entrada finita

Para hallar la DCR basta con recorrer los cocientes $Q \in \mathcal{O}_D^K(G)/\equiv$ y hallar la probabilidad de que un subgrafo G' tenga a Q como cociente:

$$\begin{aligned} R_K(G,2) &= \sum_{Q \in \mathcal{O}_d^K(G)/\equiv} p(\{G' : Q = (G'/\equiv)\}) \\ &= \sum_{Q \in \mathcal{O}_D^K(G)/\equiv} \sum_{G' : Q = (G'/\equiv)} p(G'). \end{aligned} \tag{1}$$

Theorem

Dado k fijo y $d = 2$, es posible hallar la DCR en tiempo polinomial en $n = |V|$.

Prueba. La idea es probar que hay una cantidad polinomial de términos en la Ecuación (1).

Q.E.D.

Dos terminales y $d \geq 3$

Lema

El conteo de cubrimiento de vértices en bipartitos es un problema $\#\mathcal{P}$-Completo.

Proposición

El cómputo de la DCR con $k = 2$ y $d \geq 3$ es $\mathcal{NP}$-Difícil.

Prueba. Sea $d' = d - 3 \geq 0$ y $P = (V(P), E(P))$ un camino simple con $V(P) = \{s, s_1, \ldots, s_{d'}\}$. A cada bipartito $G = (V, E)$ con $V = A \cup B$ y $E \subseteq A \times B$ le asociamos la red auxiliar:

$$G' = (A \cup B \cup V(P) \cup \{t\}, E \cup E(P) \cup I\}, \quad (2)$$

donde $I = \{\{s_{d'}, a\}, a \in A\} \cup \{\{b, t\}, b \in B\}$, y sus enlaces son perfectos salvo los de I, que fallan con $p = 1/2$. Sea $K = \{s, t\}$. Esta reducción del bipartito a la red es polinomial.

Dos terminales y $d \geq 3$

Cada cubrimiento de vértices $A' \cup B' \subseteq A \cup B$ se corresponde con un corte $I' = \{\{s_{d'}, a\}, a \in A'\} \cup \{\{b, t\}, b \in B'\}$. Cuando $p = 1/2$, todo corte es igualmente probable:

$$R^d_{\{s,t\},G'}(1/2) = 1 - \frac{|\mathcal{B}|}{2^{|A|+|B|}}$$

El cómputo de la DCR es al menos tan difícil como contar cubrimiento de vértices en bipartitos.

Q.E.D.

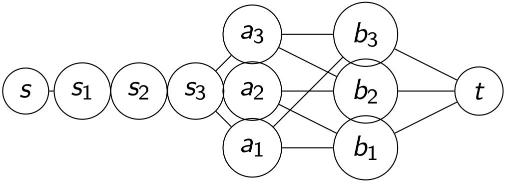

Figure: Ejemplo de red auxiliar con terminales $\{s, t\}$ y $d = 6$, para C_6.

Diámetro $d \geq 3$, $K = V$

Su intratabilidad es un corolario del resultado anterior.

Teorema

El cómputo de la DCR es $\mathcal{NP}$-Difícil cuando $k = n$ y $d \geq 3$.

Prueba. Extendemos la red anterior le agregamos enlaces perfectos en las dos porciones del bipartito. Sea G'' la nueva red, $K = V$ y $d \geq 3$. Los cortes en el nuevo escenario all-terminal coinciden con los $s - t$ cortes en G', y tienen la misma probabilidad. Luego $R^d_{V,G''} = R^d_{\{s,t\},G'}$, y el cómputo de la DCR del caso all-terminal es al menos tan difícil como contar cubrimiento de vértices en bipartitos.

Q.E.D.

Diámetro $d \geq 2$, $K = V$

Teorema

El cálculo de la DCR con $k = n$ y $d = 2$ es $\mathcal{NP}$-Difícil.

Prueba. Dado $G = (V, E)$, consideremos $G' = (V \cup \{a, b\}, E \cup \{\{x, a\}, \{x, b\}, \forall x \in V\})$, de diámetro 2, y enlaces perfectos salvo los incidentes al nodo a, con $p(ax) = 1/2$. Una configuración operativa H de mínimo cardinal en G' contiene los enlaces perfectos y algunos $\{a, x_1\}, \ldots, \{a, x_r\}$ para ciertos nodos $x_i \in V$. El diámetro de $G_H = (V, H)$ es 2 y crece tras eliminar un enlace. Sea $N_a = \{x : \{a, x\} \in H\}$. Observemos que *$a$ alcanza a cada nodo en dos pasos sii N_a es un cubrimiento de vértices de G*. Luego el conteo de pathsets de mínimo cardinal es al menos tan difícil como el cubrimiento de vértices en grafos.

Q.E.D.

Resumen

	k (fijo)		$k = n$ o libre
d	2	$3 \dots$	
2	$O(n)$	$O(n)$	$\mathcal{NP}$-Difícil
$3, \vdots, n-2$	$\mathcal{NP}$-Difícil		$\mathcal{NP}$-Difícil
$n-1, \vdots$	$\mathcal{NP}$-Difícil		$\mathcal{NP}$-Difícil

Figure: Complejidad en función del diámetro d y terminales $k = |K|$