Diámetro Confiabilidad de una Red

Clase 2

Pablo Romero

Miércoles 21 de octubre, Universidad Nacional de Asunción, Paraguay.

Contenidos

Agenda

Sistemas Binarios Coherentes Estocásticos

SBS

Un Sistema Binario Estocástico es una terna (T, ϕ, p), siendo:

1. $T = \{1, \ldots, m\}$ los m componentes del sistema,
2. $p = (p_1, \ldots, p_m)$ sus respectivas probabilidades de operación de cada componente, que son independientes, y
3. $\phi : \{0,1\}^m \to \{0,1\}$ la estructura, que determina si el sistema funciona o no.

Un SBS es monótono si ϕ es monótona creciente.
Un SBS es coherente si además $\phi(\vec{0}) = 0$, $\phi(\vec{1}) = 1$ y no presenta componentes irrelevantes. Su *confiabilidad* se define como $r = P(\phi(X) = 1) = E(\phi(X))$, donde $X = (X_1, \ldots, X_m)$ y $X_1, \ldots, X_m$ son variables aleatorias independientes de Bernoulli, con $P(X_i = 1) = p_i$.

SBS Coherente

Sistema en Corte y en Operación

Un estado $x \in \{0,1\}^m$ de un SBS es de *corte* si $\phi(x) = 0$, y es *operativo* si $\phi(x) = 1$.
Un estado operativo x es *minimal* si $\phi(y) = 0$ siempre que $y < x$.
Un estado de corte y es *minimal* si $\phi(x) = 1$ siempre que $x > y$.

Los estados de corte minimales determinan completamente a la estructura de un SBS monótono.

Medida Clásica

Medida Clásica

Si $G = (V, E)$ es una red y $K \subseteq V$ son sus *terminales*, elegimos un orden arbitrario a las aristas $E = \{1, \ldots, m\}$ y definimos $\phi(X) = 1$ si el grafo $G = (V, X)$ verifica que todo par de terminales $u, v \in K$ están comunicados. La *medida de confiabilidad clásica* es $R = P(\phi(X) = 1)$.

Diámetro Confiabilidad de una Red (DCR)

DCR

Si $G = (V, E)$, $K \subseteq V$ son los *terminales* y d es un entero positivo llamado *diámetro*, análogamente se define $\phi(X) = 1$ si el grafo $G = (V, X)$ verifica que $d_X(u, v) \leq d$ para todo par de terminales $u, v \in K$. La *diámetro confiabilidad de una red* es $R = P(\phi(X) = 1)$.

Agenda

Casos Especiales

Sea $G = (V, E)$ un grafo y $K \subseteq V$ conjunto terminal.

1. Caso general: "K-terminal".
2. "All-terminal": $K = V$
3. "Source-Terminal": $K = \{s, t\}$.

Identidades

Las siguientes identidades brindan la confiabilidad:

$$R_{K,G}(p) = \sum_{x:\phi(x)=1} P(X = x);$$

$$R_{K,G}(p) = P(\bigcup_{x:\phi(x)=1;\phi(y)=0,\forall y<x} \{X = x\});$$

$$R_{K,G} = (1 - p_e)R_{K,G-e} + p_e R_{K',G*e},$$

siendo $G * e$ la arista-contracción de G y K' el nuevo conjunto terminal.
El problema es que *las identidades implican una cantidad exponencial de operaciones*.

Confiabilidad de Grafos Elementales

Calculemos la confiabilidad all-terminal de grafos elementales:

$$R_{C_n}(p) = p^n + n(1-p)p^{n-1},$$

$$R_{P_n}(p) = p^{n-1}$$

Si T_n es un árbol de n nodos también:

$$R_{T_n}(p) = p^{n-1}$$

En algunos grafos, el cálculo de la confiabilidad es eficiente.

Confiabilidad y Combinatoria

Sea $G = (V, E)$, con $|E| = m$, $|V| = n$, $K \subseteq V$ y $p_e = p$. Consideremos la partición: $E_i = \{H \subseteq E : |H| = m - i : \phi(H) = 1\}$ y $F_i = |E_i|$. Aplicando la regla de la suma se consigue que:

$$R_{K,G}(p) = \sum_{i=0}^{m} F_i p^{m-i}(1-p)^i$$

Luego, el problema homogéneo se reduce a uno combinatorio (hallar los cardinales F_i).

Preliminar de Complejidad

Ball sintetiza en 1986 condiciones suficientes par asegurar intratabilidad de un SBS:

Teorema

El cómputo de confiabilidad de un SBS monótono es $\mathcal{NP}$-Difícil si alguna de las siguientes condiciones es cierta:

1. *El reconocimiento de configuración operativa de mínimo cardinal es $\mathcal{NP}$-Completa.*
2. *El reconocimiento de corte de mínimo cardinal es $\mathcal{NP}$-Completo.*
3. *El conteo de configuraciones operativas de mínimo cardinal es $\#\mathcal{P}$-Completo.*
4. *El conteo de cortes de mínimo cardinal es $\#\mathcal{P}$-Completo.*
5. *El cálculo general de los coeficientes F_i es $\#\mathcal{P}$-Completo.*

Veamos que la confiabilidad clásica es $\mathcal{NP}$-Difícil.

Complejidad de Confiabilidad con dos terminales

1. Hallar camino de largo mínimo (Algoritmo de Dijkstra).
2. Hallar corte mínimo (Algoritmo de Ford-Fulkerson).
3. Contar caminos de largo mínimo (Algoritmo de Ball-Provan).
4. Hallar la cantidad de cortes mínimos es $\#\mathcal{P}$-Completo (Ball-Provan, 1983).

Complejidad de Confiabilidad K-Terminal

1. Hallar $H \subseteq E$ de mínimo cardinal que comunique al conjunto K. Es el Problema de Steiner en Grafos, y pertenece a la lista inicial de 21 problemas $\mathcal{NP}$-Completos de Karp. Luego, la evaluación de la medida clásica de confiabilidad K-terminal es un problema $\mathcal{NP}$-Difícil.

Complejidad de Confiabilidad All-Terminal

1. Árbol recubridor de un grafo conexo (Kruskal).
2. Hallar el corte de mínimo cardinal (Ford-Fulkerson).
3. Contar árboles recubridores (Kirchhoff).
4. Hallar la cantidad de cortes mínimos (Ball-Provan, 1983).
5. Con vector F es posible calcular los cortes $s - t$ de mínimo cardinal. Luego, el cálculo de la confiabilidad All-Terminal es $\mathcal{NP}$-Difícil.

Agenda

Diámetro Confiabilidad de una Red (DCR)

DCR

Si $G = (V, E)$, $K \subseteq V$ son los *terminales* y d es un entero positivo llamado *diámetro*, análogamente se define $\phi(X) = 1$ si el grafo $G = (V, X)$ verifica que $d_X(u, v) \leq d$ para todo par de terminales $u, v \in K$. La *diámetro confiabilidad de una red* es $R = P(\phi(X) = 1)$.

Como la DCR generaliza el problema clásico, su cálculo de confiabilidad es un problema $\mathcal{NP}$-Difícil.

DCR - Ejemplos

1. La DCR en grafos elementales (ciclos y caminos) se calcula directamente.
2. En árboles, la DCR es el producto de las operaciones de las aristas que unen terminales (o 0 si alguno de esos caminos tiene más de d aristas).
3. Si $K = V$ y $d = 2$ en un bipartito completo, la DCR es el producto de la operación de todas las aristas.
4. Hay casos más elaborados: escaleras y abanicos (Tesis Dr. Pablo Sartor).

Pregunta: ¿Existe un modo eficiente de hallar la DCR de completos/bipartitos en general?

DCR - Preguntas

1. ¿Si fijamos $|K| = k$ y d, tendremos casos de cómputo eficiente? (Clase 3)
2. ¿Existen otras familias de grafos con cómputo eficiente de la DCR? (Clase 4)
3. ¿Podremos, al menos, hallar la DCR aproximadamente en cualquier instancia? (Clase 5)