ECUACIÓN DE LAPLACE
SEPARACIÓN DE VARIABLES EN COORDENADAS CILÍNDRICAS
(CON INDEPENDENCIA EN z)

$$\phi = \phi(\rho,\varphi,\cancel{z}) = \phi(\rho,\varphi)$$

dist. al eje z — ángulo azimutal

$$\nabla^2\phi \overset{(cil)}{=} \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right] + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \cancel{\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}} = 0$$

Buscamos soluciones en variables separables:

$$\phi(\rho,\varphi) = R(\rho)G(\varphi)$$

Entonces,

$$\frac{G(\varphi)}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right] + \frac{R(\rho)}{\rho^2}\frac{d^2G(\varphi)}{d\varphi^2} = 0$$

Dividiendo entre $R(\rho)G(\varphi)$ y multiplicando por ρ^2:

$$\underbrace{\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right]}_{(I)\ =\ \text{cte}\ =\ -C} + \underbrace{\frac{1}{G(\varphi)}\frac{d^2G(\varphi)}{d\varphi^2}}_{(II)\ =\ \text{cte}\ =\ C} = 0$$

El primer término depende sólo de ρ y el segundo depende sólo de φ. La única forma en que la ecuación vale para cualquier ρ y φ es que cada término sea igual a una constante.

Para que las soluciones $G(\varphi)$ tengan sentido físico, G debe ser periódica en 2π (univaluada al volver al mismo lugar):

$$G(\varphi) = G(\varphi + 2\pi)$$

Si $C > 0$, las soluciones [de (II)] para $G(\varphi)$ serían exponenciales reales ($G(\varphi) = ae^{\sqrt{C}\varphi} + be^{-\sqrt{C}\varphi}$) pero estas soluciones no pueden verificar la periodicidad en 2π. Por lo tanto, la constante de separación C debe ser negativa o cero:

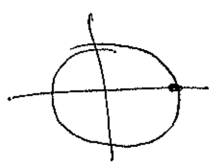
$$C = -k^2$$

$$(II)\quad \frac{d^2G(\varphi)}{d\varphi^2} + k^2G(\varphi) = 0 \longrightarrow \begin{cases}\cos(k\varphi)\\ \operatorname{sen}(k\varphi)\end{cases}$$

* periodicidad 2π:

$$\begin{cases}\cos(k[\varphi+2\pi]) = \cos(k\varphi)\\ \operatorname{sen}(k[\varphi+2\pi]) = \operatorname{sen}(k\varphi)\end{cases}$$

$$\cos(k[\varphi+2\pi]) = \cos(k\varphi)\underbrace{\cos(k2\pi)}_{=1} - \operatorname{sen}(k\varphi)\underbrace{\operatorname{sen}(k2\pi)}_{=0}$$



$(k = n \text{ entero})$ $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\Rightarrow \boxed{G(\varphi) = a_n \cos(n\varphi) + b_n \operatorname{sen}(n\varphi)} \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

(I) $\underline{\underline{n=0}}$ $\quad \rho \dfrac{d}{d\rho}\left[\rho \dfrac{dR(\rho)}{d\rho}\right] = 0$

$$\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} = \text{cte} = b_0 \longrightarrow \frac{dR(\rho)}{d\rho} = \frac{b_0}{\rho}$$

$$\Rightarrow \underline{R(\rho) = b_0 \ln\rho + a_0} \qquad \underline{\underline{(n=0)}}$$

$\underline{\underline{n \neq 0}}$ $\quad \rho \dfrac{d}{d\rho}\left[\rho \dfrac{dR(\rho)}{d\rho}\right] = n^2 R(\rho)$

intentamos soluciones en forma de potencias de ρ: $R(\rho) = \rho^p$

$$\rho \frac{d}{d\rho}\left[\rho \frac{d(\rho^p)}{d\rho}\right] = n^2 \rho^p$$

$$p^2 \rho^p = n^2 \rho^p \longrightarrow p^2 = n^2 \longrightarrow \begin{cases} p = n \rightarrow \underline{R(\rho) \propto \rho^n} \\ p = -n \rightarrow \underline{R(\rho) \propto \rho^{-n}} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{n = 1, 2, \dots}}$$

Entonces, la solución general es de la forma:

$$\boxed{\phi(\rho,\varphi) = a_0 + b_0 \ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\rho^n\left(a_n \cos(n\varphi) + b_n \operatorname{sen}(n\varphi)\right) + \rho^{-n}\left(c_n \cos(n\varphi) + d_n \operatorname{sen}(n\varphi)\right)\right]}$$