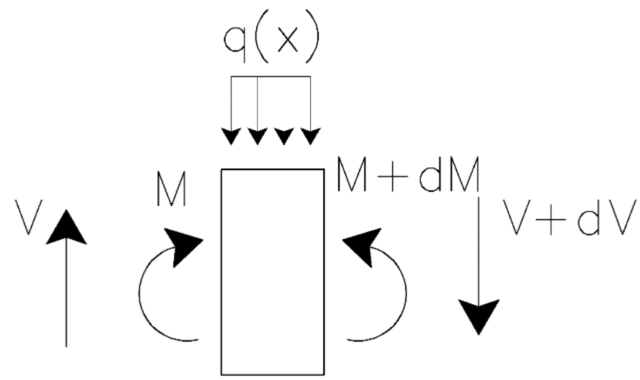
Introducción

En los pórticos vamos a recordar lo visto para las vigas, manteniendo la convención de signos.

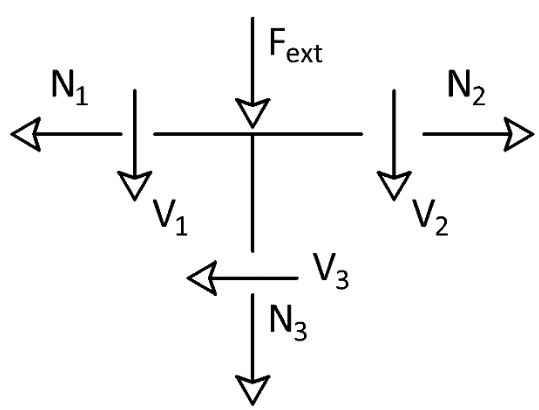
$$-q(x) = \frac{dV}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}$$

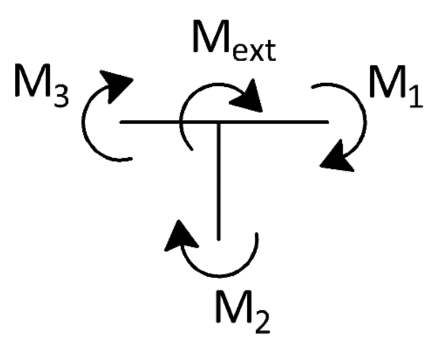


Debemos recordar las siguientes particularidades:

- Fuerza puntual aplicada: Hay una discontinuidad en el diagrama de cortante y/o directa
- Momento puntual aplicado: Hay una discontinuidad en el diagrama de momentos

La diferencia radica en que existen barras en distintas direcciones y existen nudos donde pueden salir más barras. Para ello vamos a tener que aplicar equilibrio en dichos nudos:



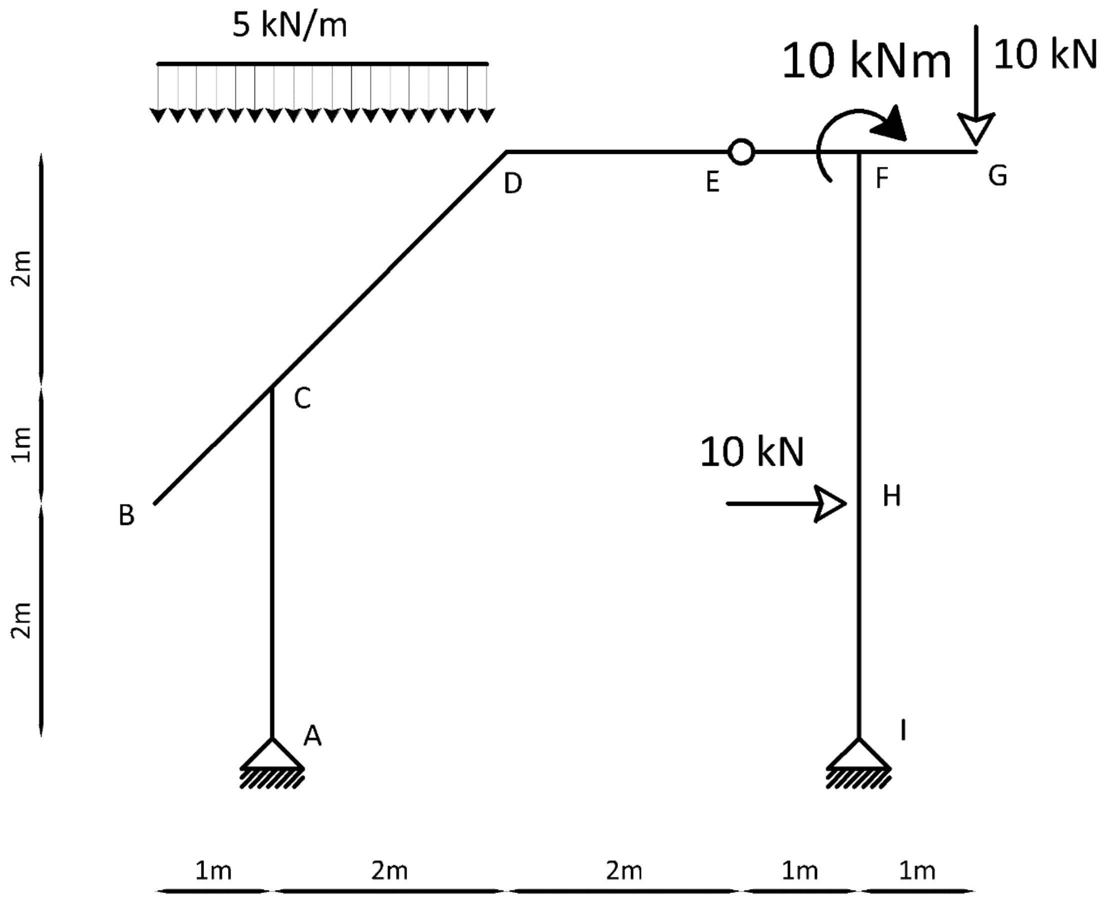


Por lo tanto, se debe cumplir en el nudo:

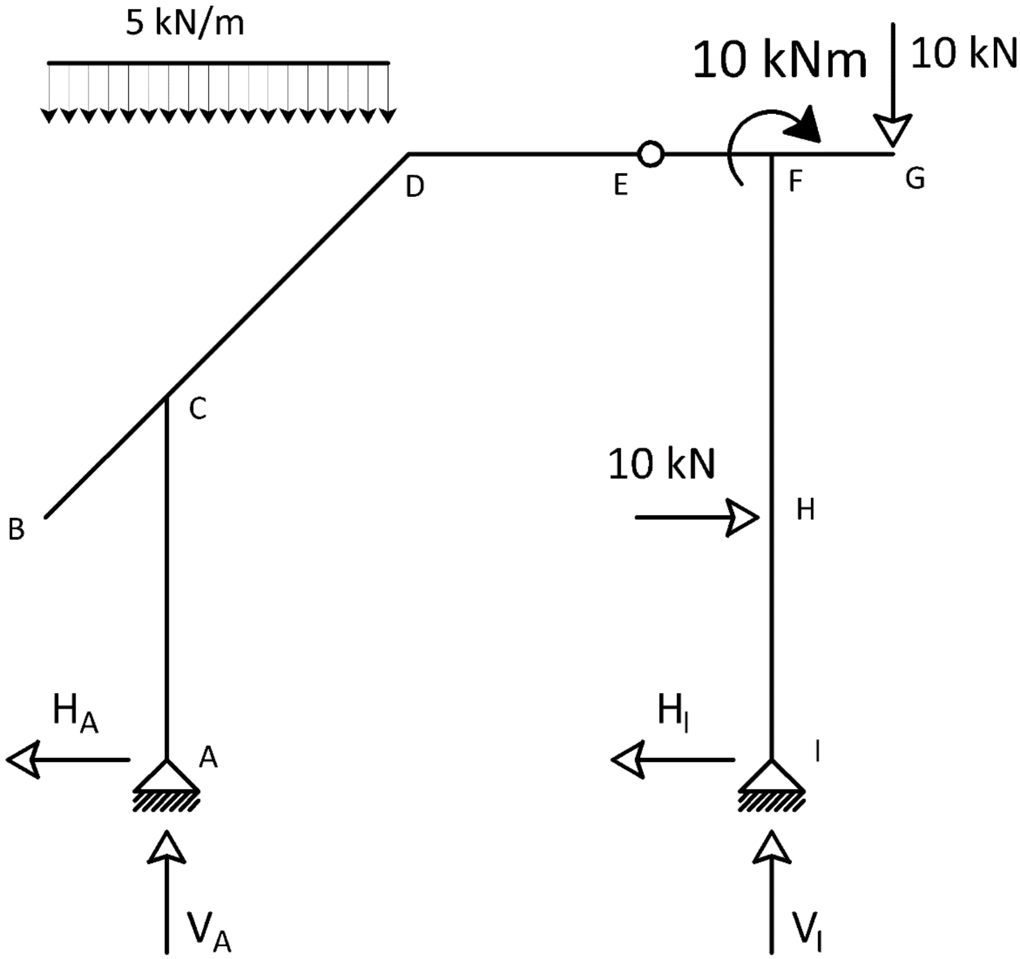
1. $\sum M_i + M_{ext} = 0$
2. $\sum F_i + F_{ext} = 0$

Con estas nociones, vamos a trabajar en un ejemplo. Se trata de un pórtico ABCDEFGHI, se resolverá enteramente el pórtico, luego se procederá al dimensionado y verificación a corte.

Dicho pórtico tiene una carga distribuida vertical $q = 5\ kN/m$ en BCD, distribuida por unidad de longitud horizontal. Un momento puntual aplicado en F (de $10\ kNm$). Una fuerza puntual vertical aplicada en G, y una fuerza puntual horizontal aplicada en H, ambas de módulo $10\ kN$.



Empezaremos calculando las reacciones



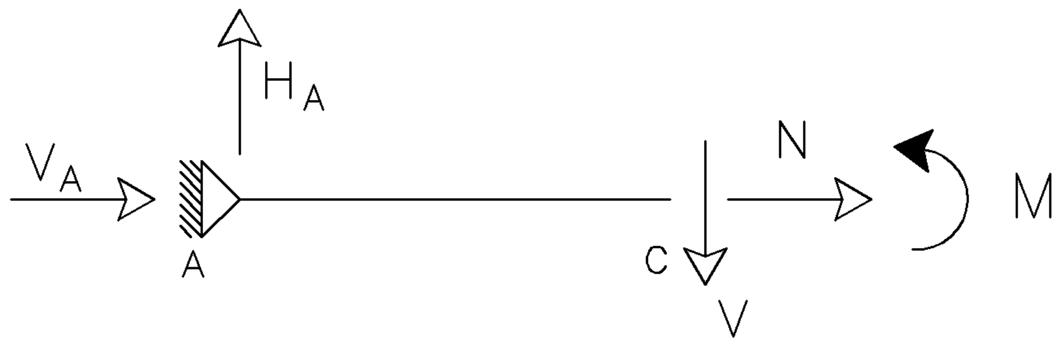
Planteamos equilibrio:

- Equilibrio de momentos desde A:
  - $V_I\,5m = 7.5\,kNm + 10\,kNm + 20\,kNm + 60\,kNm \;\rightarrow \boldsymbol{V_I = 19.5\,kN}$
- Equilibrio vertical
  - $V_A + V_I = 15\,kN + 10\,kN \rightarrow \boldsymbol{V_A = 5.5\,kN}$
- Equilibrio de momentos en E hacia la izquierda (Arco de tres articulaciones)
  - $V_A\,4m + H_A\,5m = 52.5\,kNm \rightarrow \boldsymbol{H_A = 6.1\,kN}$
- Equilibrio horizontal
  - $H_A + H_I = 10\,kN \rightarrow \boldsymbol{H_I = 3.9\,kN}$

Para trabajar mas cómodamente con la carga distribuida, la vamos a descomponer en los ejes locales de la barra donde se aplica. La misma forma un ángulo de 45º con la horizontal.

- Primero llevamos la carga a una coordenada que acompañe el largo de la viga:
  - $q^* = q.\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{q}{\sqrt{2}}$
- Descomponemos esta carga en los ejes locales (uno colineal y otro perpendicular a la viga).
  - $q_x = q_y = \frac{q^*}{\sqrt{2}} = \frac{q}{2} = 2.5\frac{kN}{m}$

Vamos a comenzar por el tramo AC, no hay cargas aplicadas en este tramo, por lo tanto si nos paramos en cualquier punto del mismo, el cortante y la directa serán constantes.

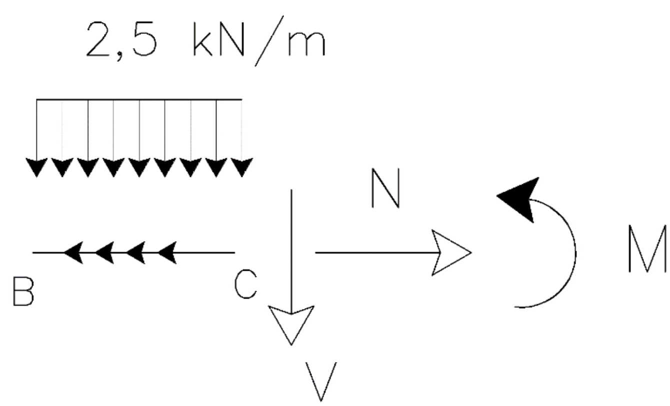


$$V = 6.1\ kN$$

$$N = -5.5\ kN$$

$$M_{CA} = H_A.3m = 18{,}3\ kNm$$

Pasamos al tramo BC, que trabaja como un voladizo:

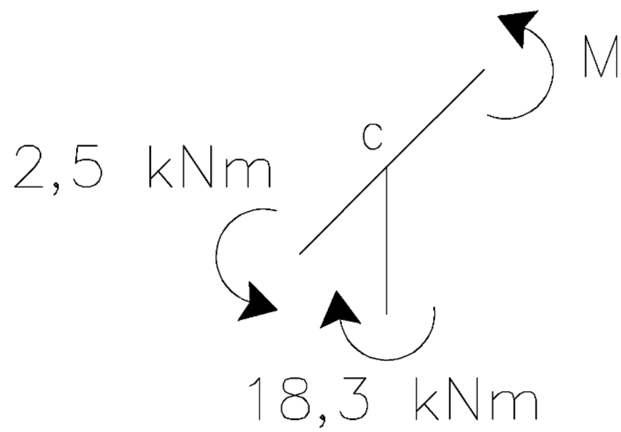


$$N = 2{,}5\frac{kN}{m}.\sqrt{2}\,m = 3{,}54\ kN$$

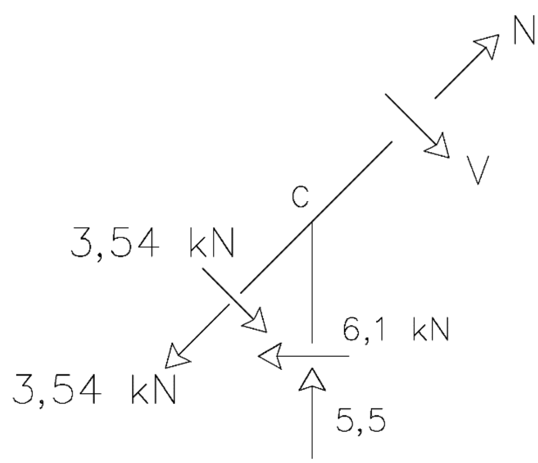
$$V = -3.54\ kN$$

$$M_{CB} = 2{,}5\frac{kN}{m}\frac{\sqrt{2}^2}{2} = 2{,}5\ kNm$$

Para el tramo CD precisamos conocer las condiciones iniciales en C, por lo que vamos a realizar equilibrio en el nudo. Para el equilibrio de momentos, vemos que no hay un momento externo aplicado, por lo que la suma de los momentos será nula.



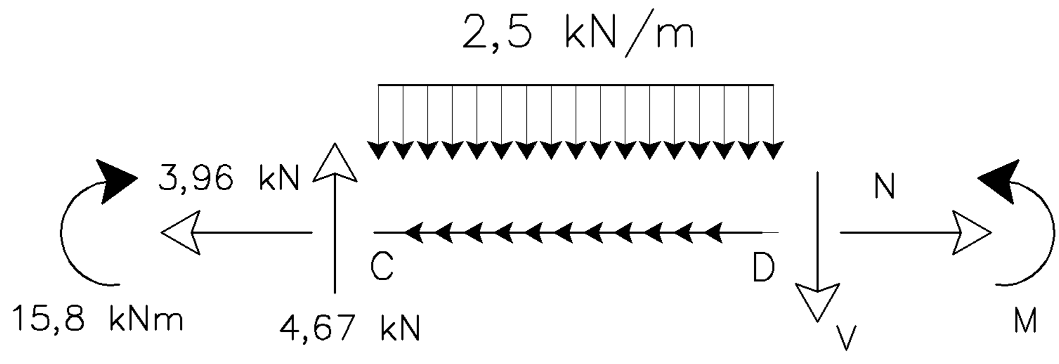
$$M_{CD} = 18{,}3\ kNm - 2{,}5\ kNm = 15{,}8\ kNm$$



$$N = 3{,}54 + \frac{6{,}1 - 5{,}5}{\sqrt{2}} = 3{,}96\ kN$$

$$V = -3{,}54 + \frac{6{,}1 + 5{,}5}{\sqrt{2}} = 4{,}67\ \mathrm{kN}$$

Teniendo las fuerzas definidas en C podemos pasar a calcular las solicitaciones en el tramo CD.

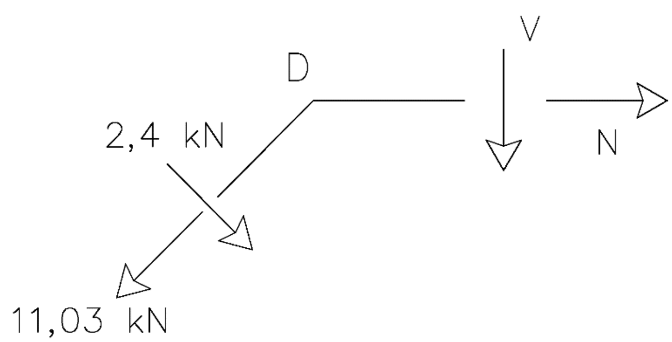


- Equilibrio de momentos: $M_{DC} = 15{,}8 - 2{,}5.2\sqrt{2}.\frac{2\sqrt{2}}{2} + 4{,}67.2\sqrt{2} = 19{,}0\ kNm$
- Equilibrio vertical: $V = 4{,}67 - 2\sqrt{2}.2{,}5 = -2{,}4\ kN$
- Equilibrio horizontal: $N = 3{,}96 + 2\sqrt{2}.2{,}5 = 11{,}03\ kN$

Dada la forma de la carga, vamos a tener un máximo local en el tramo, por lo que queremos encontrar el punto donde el cortante se anula. Para ello nos planteamos un tramo a partir de C, de largo d.

- $V(d) = 0 \rightarrow 4{,}67\ kN - d.2{,}5\frac{kN}{m} = 0 \rightarrow d = 1{,}87\ m$
- $M(d) = d.4{,}67 - \frac{d^2}{2}2{,}5 + 15{,}8 = 20.16\ kNm$

En el nudo D, tenemos solamente dos barras y no hay momento aplicado, por lo que el momento sigue continuo. Si hay un cambio en la directa y el cortante debido al cambio de dirección:



$$V = -\frac{2{,}4 + 11{,}03}{\sqrt{2}} = -9{,}5\ kN$$

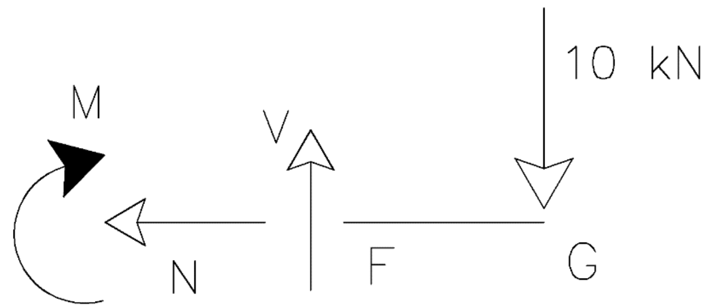
$$N = \frac{11{,}03 - 2{,}4}{\sqrt{2}} = 6{,}1\ kN$$

Se puede ver que la directa corresponde a la reacción horizontal, dado que en D hacia la izquierda no existen fuerzas horizontales.

Para el tramo DEF, vemos que no hay fuerzas aplicadas, por lo que la directa y el cortante se conservan. El momento por otro lado es lineal, y en la articulación es nulo. Calculamos por lo tanto el momento en F.

$$M_F = -9{,}5\ kN.\ 1m = -9{,}5\ kNm$$

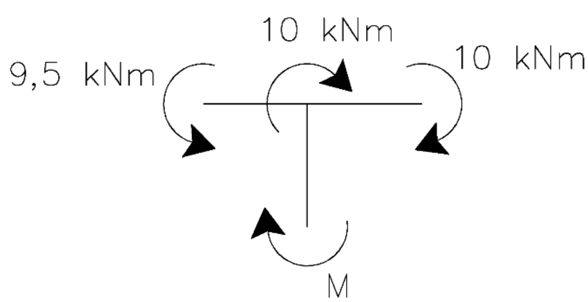
Pasamos al tramo FG (un voladizo).

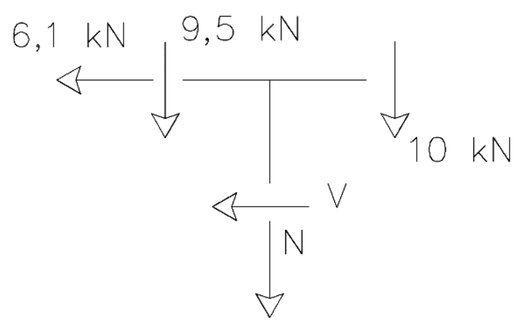


$$M = -10\ kNm$$

$$V = 10\ kN$$

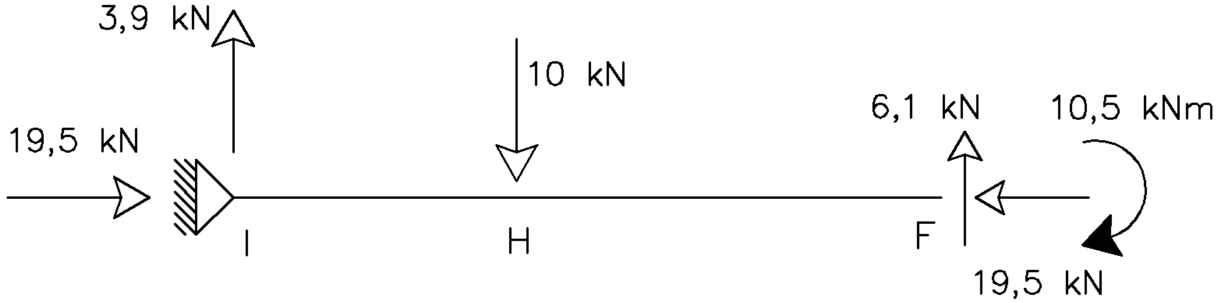
Realizamos el equilibrio del nudo F.





- $M_{FH} = 9{,}5 - 10 - 10 = -10{,}5\ kNm$
- $N = -9{,}5\ - 10 = -19{,}5\ kN$
- $V = -6{,}1\ kN$

Queda por lo tanto resolver el tramo IHF



$$M_{HF} = -\,6.1\,kN\;4\,m + 10.5\,kNm = 7.9\,kNm$$

Teniendo las solicitaciones procedemos a realizar los diagramas:

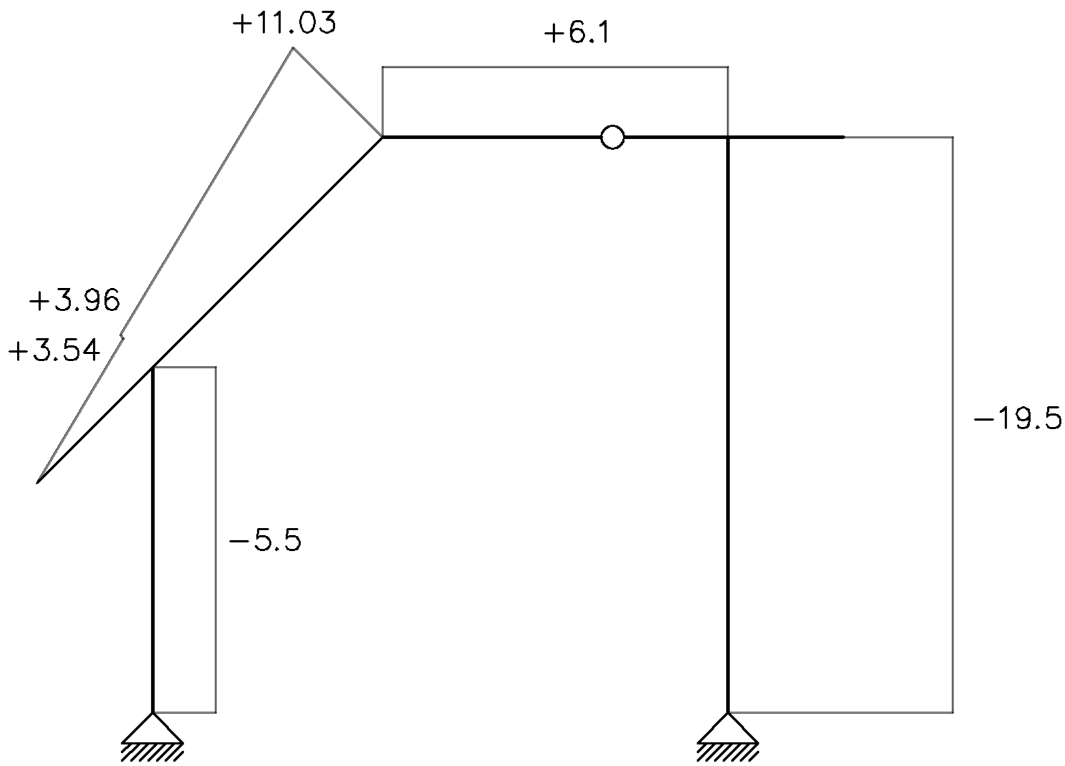


Diagrama de Directa (N [kN])

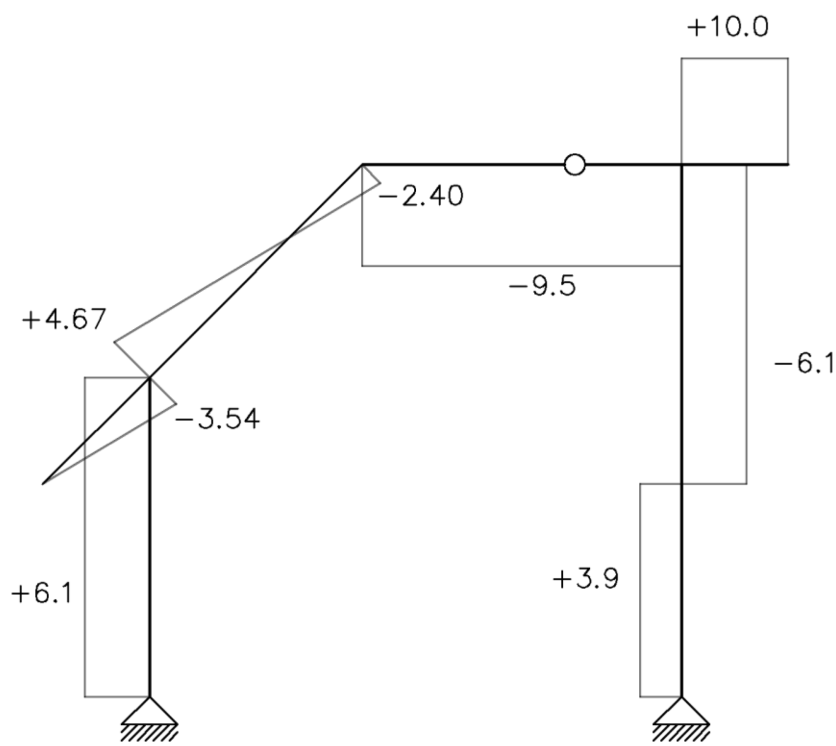


Diagrama de Cortante (V [kN])

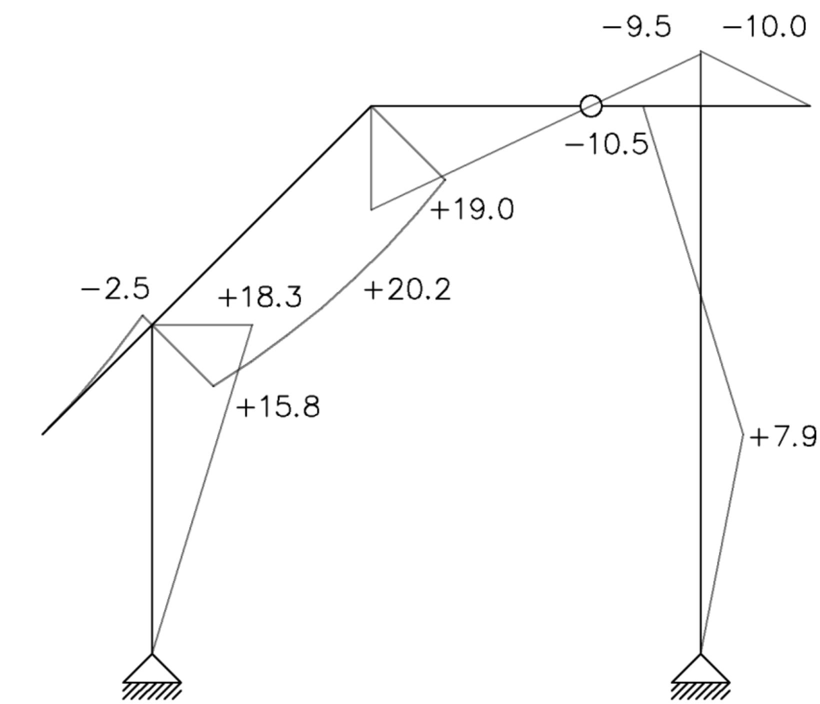


Diagrama de Momento (M [kNm])

Vamos a dimensionar las barras con un único PNI. Vamos a considerar $\sigma_{adm} = 140\ MPa$ y $\tau_{adm} = 70\ MPa$.

Para comenzar predimensionaremos solamente con la flexión máxima:

$$W_{min} = \frac{M_{max}}{\sigma_{adm}} = \frac{20.16\ kNm}{140\ MPa} = 1.44x10^{-4}m^3 \rightarrow PNI\ 180$$

Para facilitar el trabajo y no tener que verificar varios puntos, verificaremos con la directa máxima (este puede no ser un par de solicitaciones real).

$$\frac{M_{max}}{W} + \frac{N_{max}}{A} \leq 140\ MPa$$

$$\frac{21.16\ kNm}{1.61x10^{-4}\ m^3} + \frac{19.5\ kN}{2.79x10^{-3}m^2} = 138\ MPa$$

En caso de que este punto no verificara, deberíamos verificar con la directa real de ese punto (también hay que verificar las otras parejas M y N) para ese perfil.

Para un PNI 180 se tiene un $\mu_{max} = 9{,}35x10^{-5}m^3$ (este dato se obtiene de tabla), inercia $I = 1{,}45x10^{-5}m^4$ y un espesor en el alma de $t_w = 6{,}9x10^{-3}m$.

$$\tau_{max} = \frac{V_{max}\ \mu_{max}}{I\ t_w} = \frac{10kN\ 9{,}35x10^{-5}\ m^3}{1{,}45x10^{-5}\ m^4\ 6{,}9x10^{-3}\ m} = 9{,}3\ MPa$$

Vemos que cumple y además esta muy sobrado. Los casos donde el cortante puede ser limitante son generalmente en ménsulas o vigas muy cortas con una carga concentrada grande.