Introducción

Las vigas son barras (elementos con una dimensión notablemente mayor a las otras dos), que están sometidas a cargas en su tramo (pueden ser colineales a su eje y/o transversales). A diferencia de las barras sometidas a directa solamente, necesitaremos nuevas solicitaciones para poder equilibrar la estructura. En este practico se estudiarán principalmente la relación entre las solicitaciones y cargas, análisis que será luego utilizado para el estudio de los desplazamientos en vigas.

Definimos entonces las nuevas solicitaciones:

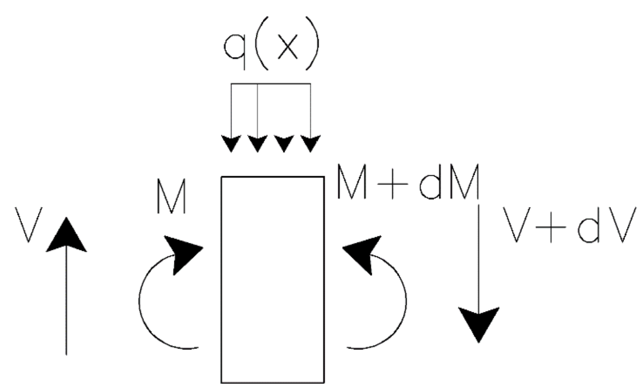
$$M_y = \int_A z\sigma_x dA$$

$$M_z = \int_A y\sigma_x dA$$

$$V = \int_A \tau\, dA$$

En el teórico se vio la relación que cumplen estas solicitaciones (teorema fundamental de vigas):

$$-q(x) = \frac{dV}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}$$



Debemos recordar las siguientes particularidades:

- Fuerza puntual aplicada: Hay una discontinuidad en el diagrama de cortante y/o directa
- Momento puntual aplicado: Hay una discontinuidad en el diagrama de momentos

En este practico analizaremos tanto vigas simples como sistemas de vigas (en particular vigas Gerber). Para ellos tenemos que separar entramos, identificarlos y clasificarlos:

- **Tramos flotantes**: Son tramos que por si solo son incapaces de sustentarse o mantener el equilibrio y dependen de los tramos aledaños para su equilibrio.
- **Tramos apoyados**: Tienen algún apoyo, pero aun asi dependen de algún tramo para su equilibrio
- **Tramos a tierra**: Son los tramos que tienen el numero suficiente de apoyos como para ser estáticos independientemente de los otros tramos.

Como norma general comenzaremos resolviendo los tramos flotantes, para luego llevar las cargas a los tramos donde estos están apoyados, hasta finalmente llegar a los tramos a tierra (obteniendo así las reacciones del problema). Una vez resuelto este paso podemos proceder a realizar los diagramas.

En este practico también nos interesa el dimensionado a flexión y preso flexión:

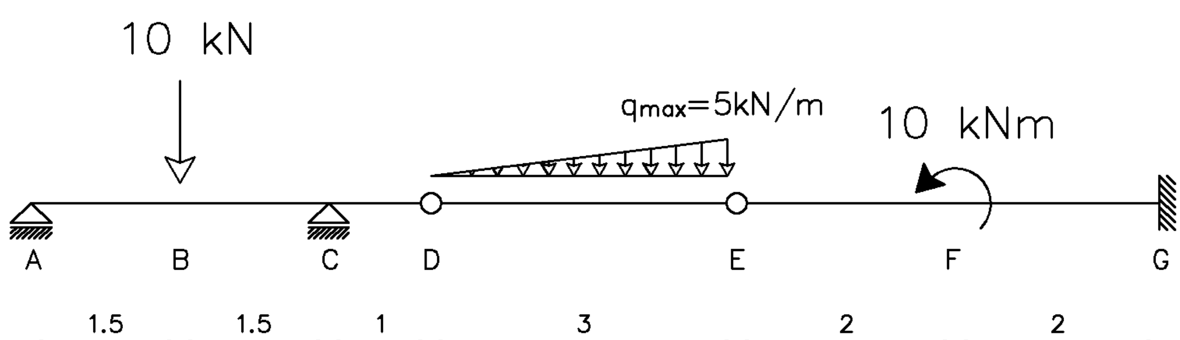
$$\sigma = \frac{M}{I} y$$

$$\sigma = \frac{M}{I} y + \frac{N}{A}$$

Recordemos que la idea detrás del dimensionado es que no se superen las tensiones admisibles en los materiales. En los casos donde busquemos dimensionar con perfiles normalizados, se puede redimensionar solamente con el momento y luego realizar la verificación la directa correspondiente.

Ejemplo 1

En este ejemplo resolveremos y dimensionaremos el siguiente problema:

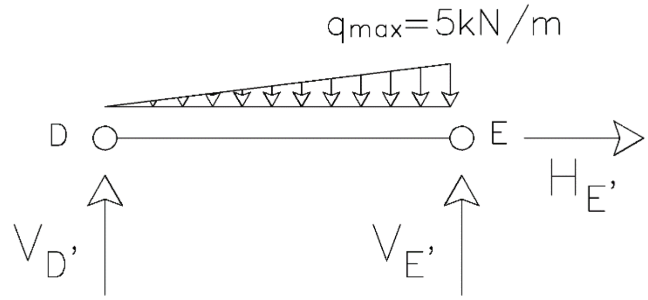


La viga está construida con un $PNI\ 160$ (Acero: $\sigma_{adm} = 140\ MPa$).

Comenzamos analizando los tramos:

- El tramo ABCD: Está a tierra (si consideramos la restricción horizontal dada por G), es una viga simplemente apoyada con voladizo
- El tramo DE: Es un tramo flotante, viga simplemente apoyada.
- El tramo EFG: Se trata de una ménsula, por lo que está a tierra.

Como establecimos antes, comenzaremos resolviendo el tramo flotante. En este caso tenemos una carga linealmente variable, por lo que buscamos encontrar la expresión de la misma, colocando una coordenada x en D:



$$q(x) = 5\frac{kN}{m}\frac{x}{3\,m}$$

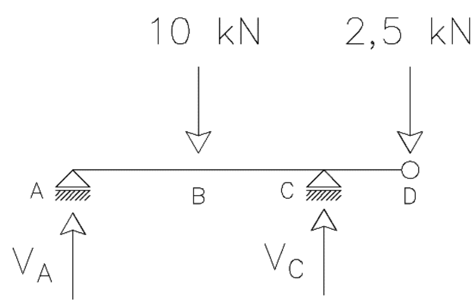
Realizamos ahora equilibrio de fuerzas y momentos:

$$H_E' = 0$$

$$M_D = 0 = 5\frac{kN}{m}3\,m\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\,3\,m\right) - V_E'\,3\,m = 0 \rightarrow V_E' = 5\,kN$$

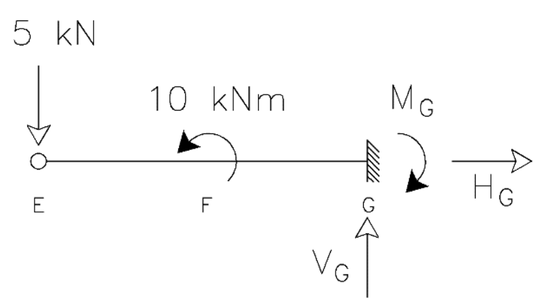
$$V_D' + 5\,kN\,) = 5\frac{kN}{m}3m\frac{1}{2} \rightarrow V_D' = 2.5\,kN$$

Vamos a llevar estas fuerzas internas a los tramos donde se apoya el tramo flotante, para ello utilizamos el principio de acción-reacción y realizamos equilibrio de fuerzas y momentos:



$$M_A = 0 = 10\,kN\,1.5\,m - V_C\,3m + 2.5\,kN\,4m \rightarrow V_C = \frac{25}{3}kN$$

$$V_A + \frac{25}{3}kN = 10kN + 2.5kN \rightarrow V_A = \frac{25}{6}kN$$



$$M_G = 10\ kNm + 5kN\ 4m = 20\ kNm$$

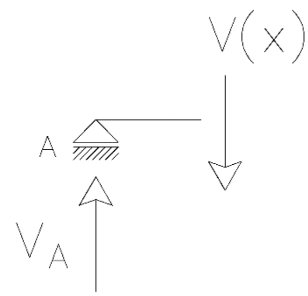
$$V_G = 5\ kN$$

$$H_G = 0$$

Vamos ahora a calcular las solicitaciones en cada tramo, empezando por el cortante, para esto realizaremos equilibrio por tramos:

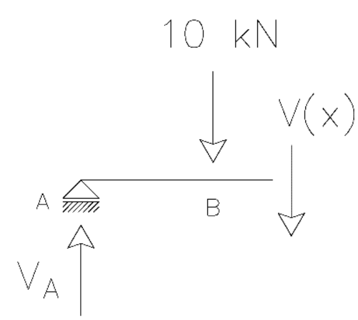
Tramo AB:

$$V(x) = V_A = \frac{25}{6} kN$$



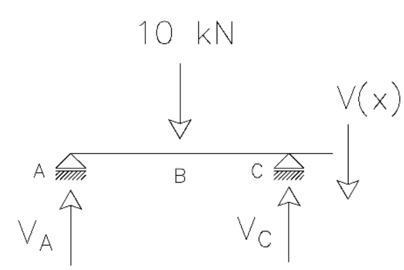
Tramo BC:

$$V(x) = V_A - 10\ kN = -\frac{35}{6}\ kN$$



Tramo CD

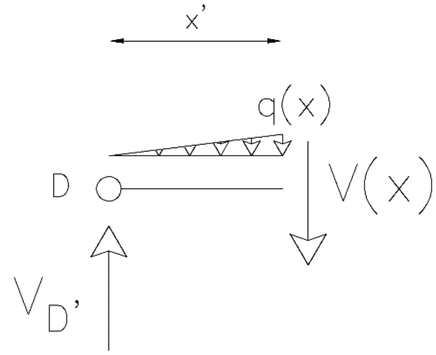
$$V(x) = V_A + V_C - 10\ kN = V_D' = 2{,}5\ kN$$



En el tramo DE aparece una carga distribuida, por lo que realizaremos equilibrio en función de una coordenada x' con $q(x') = q_{max}\frac{x'}{3m} = 5\frac{kN}{m}\frac{x'}{3m}$

$$V_D' - q(x').\frac{x'}{2} - V(x') = 0$$

$$V(x') = 2{,}5\ kN - 5\frac{kN}{m}\frac{x^2}{2}\frac{1}{3m}$$

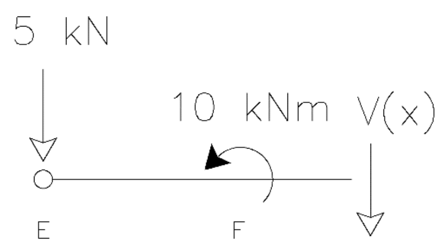


Estando en este tramo, buscaremos el punto donde se anula el cortante (recordar el teorema fundamental de vigas), este punto será un máximo local para nuestro momento.

$$V(d') = 0 = 2{,}5\ kN\ - \frac{5\ kN}{6\ m^2}d'^2 \rightarrow d' = \sqrt{2{,}5\ kN\ .\frac{6\ m^2}{5\ kN}} = 1.73\ m$$

Vemos ahora el tramo EFG:

$$V(x) = -5\ kN$$



Una vez finalizados los cálculos para el diagrama de cortante, vamos a realizar los cálculos para el diagrama de momentos, en los tramos donde sea constante el cortante, el momento será lineal, por lo que nos limitaremos a hallar valores puntuales y luego se unirá linealmente:

En el tramo AB:

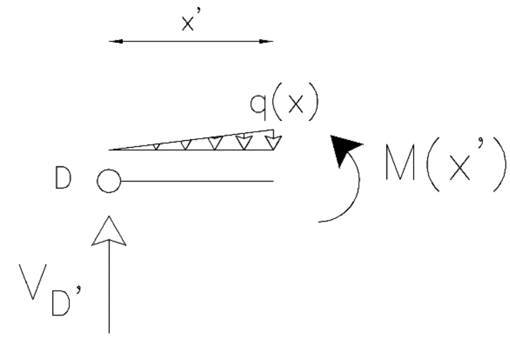
$$M_B = \frac{25}{6}kN\ 1.5\ m = 6.25\ kNm$$

En el tramo BC, este podemos calcularlo por equilibrio del tramo BC, o del tramo CD. En D por ser un nudo articulado, el momento será nulo.

$$M_C = M_B - \frac{35}{6}kN\ 1.5\ m = -2.5\ kNm$$

Al llegar al tramo DE, vamos a realizar equilibrio en función de la coordenada x':

$$M_D = M(x') - q(x')\frac{x'}{2}\frac{2x'}{3} = 0$$
$$M(x') = \frac{5}{9}\frac{kN}{m^2}\ x'^3$$



También nos interesa calcular el momento máximo en el tramo, para eso utilizaremos la distancia d' calculada anteriormente:

$$M(d') = M(1.73\,m) = \frac{5}{9}\frac{kN}{m^2}\ (1.73m)^3 = 2.88\,kNm$$

En el tramo EF vuelve a ser lineal, por lo que calculamos el momento en E, dado que existe un momento aplicado ahí, calcularemos el momento a la izquierda y luego a la derecha (se dará una discontinuidad).

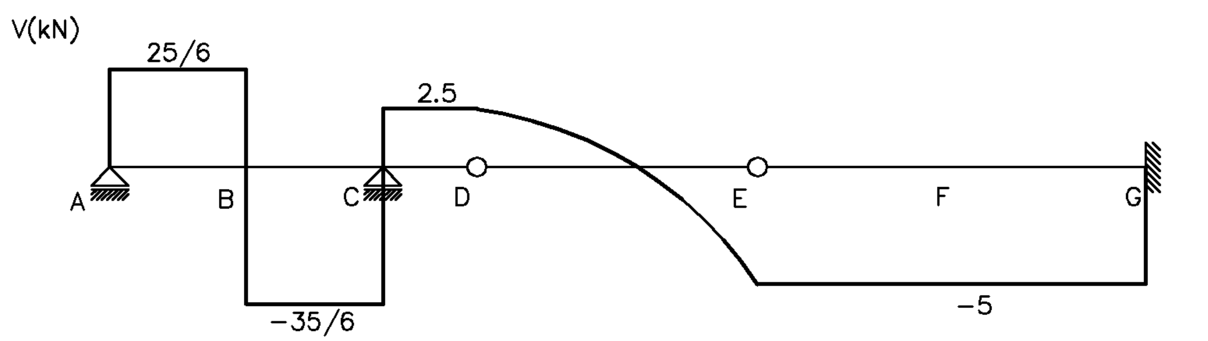
$$M_{E^-} = -5\,kN\;2\,m = -10\,kNm$$

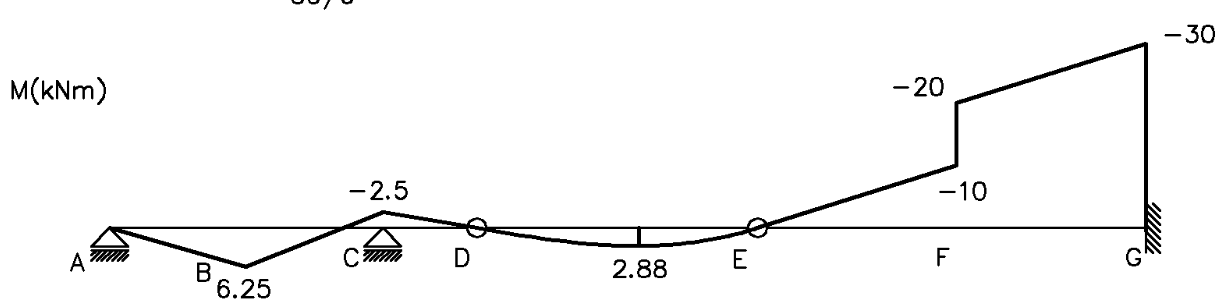
$$M_{E^+} = -10\,kNm - 10\,kNm = -20\,kNm$$

Dado que el cortante no cambia, la pendiente sigue constante, entonces calculamos el momento en G.

$$M_G = -30\,kNm$$

Tenemos ahora toda la información necesaria para realizar los diagramas de solicitaciones.





Verificaremos ahora el perfil: $I_{PNI160} = 935\ cm^4 = 9{,}35x10^{-6}m^4$

$$\sigma = \frac{|M_{max}|}{I} y_{max} = \frac{30\ kNm}{9{,}35x10^{-6}m^4} 0{,}08\ m = 256\ MPa > 140\ MPa$$

Como se puede ver, la estructura no verifica, por lo que se decide plantear un refuerzo, para eso utilizaremos dos chapas de un centímetro de espesor en ambos extremos. Hace falta encontrar el ancho de las mismas:

$$I = 9{,}35x10^{-6}m^4 + 2\left((0{,}085m)^2(b.0{,}01m) + \frac{b(0{,}01m)^3}{12}\right)$$

$$\frac{30\ kNm\ 0{,}09\ m}{I} \leq 140\ MPa$$

$$\frac{30\ kNm\ 0{,}09\ m}{140\ MPa} \leq 9{,}35x10^{-6}m^4 + 2\left((0{,}085m)^2(b.0{,}01m) + \frac{b(0{,}01m)^3}{12}\right)$$

$$2\left((0{,}085m)^2(b.0{,}01m) + \frac{b(0{,}01m)^3}{12}\right) \geq 1{,}93x10^{-5}m^4 - 9{,}35x10^{-6}m^4$$

$$1{,}45x10^{-4}m^3.b \geq 9.94x10^{-6}m^4$$

$$b \geq 6.87\ cm \approx 7\ cm$$