Introducción

En este practico se introducirán las diferentes características geométricas de las secciones. Estas propiedades son importantes para abordar los siguientes temas en el curso.

Trataremos entonces las siguientes propiedades:

- Momento estático (primer orden): μ
- Momento de inercia (segundo orden): I
- Posición del baricentro
- Área

También será de interés definir los ejes principales de inercia, conociendo su ubicación y orientación. Comenzaremos con el área:

$$A = \int_A dA$$

Luego nos interesa conocer los momentos de primer orden respecto al eje x e y:

$$\mu_x = \int_A y dA \quad \mu_y = \int_A x dA$$

A partir de esas definiciones podemos definir la posición del baricentro de la sección:

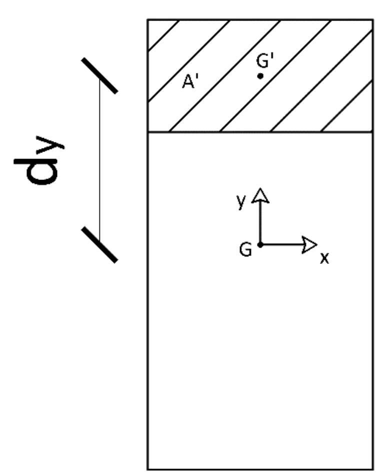
$$x_G = \frac{\mu_y}{A} \quad y_G = \frac{\mu_x}{A}$$

Con estas definiciones podemos ver que:

- Respecto a los ejes baricéntricos de toda la sección, $\mu_y = \mu_x = 0$
- Podemos calcular el momento de primer orden de una parte de la sección respecto al baricentro como:

$$\mu_{x,A'} = \int_{A'} y\, dA = A' d_y \qquad \mu_{y,A'} = \int_{A'} x\, dA = A' d_x$$

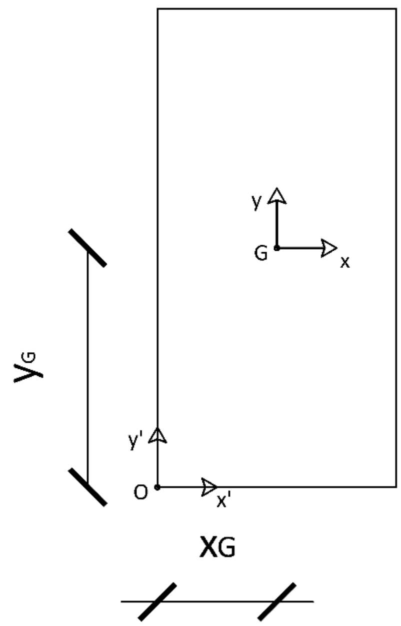
Siendo d_y y d_x la distancia entre referida a nuestros ejes x e y entre los puntos G y G'.



Definimos ahora los momentos de inercia (segundo orden):

$$I_x = \int_A y^2 dA \qquad I_y = \int_A x^2 dA$$

Resulta interesante trabajar con los momentos de inercia respecto a los ejes baricéntrico, por lo que vamos a ver en primera instancia la traslación de ejes desde un punto cualquiera a otro (sin rotar). Para esto utilizamos el teorema de Steiner, que establece la relación entre momentos de inercia respecto a ejes paralelos.



$$I_{x'} = I_x + y_G^2\, A$$

$$I_{y'} = I_y + x_G^2\, A$$

Otra propiedad que interesa es el bimomento de inercia (producto de inercia), definido como:

$$I_{xy} = \int_A xy\, dA$$

Su correspondiente traslación:

$$I_{x'y'} = I_{xy} + x_G y_G\, A$$

Una propiedad que tienen los ejes principales es que, respecto a ellos, $I_{xy} = 0$. Por lo tanto, podemos trabajar siempre con un par de ejes ortogonales arbitrarios, para luego rotarlos y encontrar los ejes baricéntricos principales. La rotación de los ejes trae asociada las siguientes expresiones para el cambio en sus propiedades:

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos(2\theta) - I_{xy}\sin(2\theta)$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos(2\theta) + I_{xy}\sin(2\theta)$$

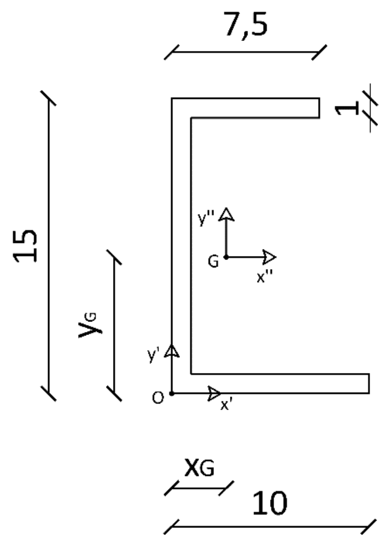
$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin(2\theta) + I_{xy}\cos(2\theta)$$

Observación: Siempre que trabajemos con un eje de simetría de la sección, $I_{xy} = 0$, si x o y es uno de esos ejes. Por lo que ya podemos ver que un eje de simetría es principal.

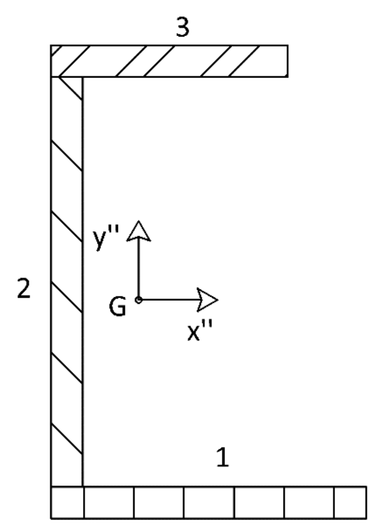
Ejemplo

Veamos ahora una sección y buscaremos hallar:

- Baricentro
- Ejes principales
- Momentos de inercia principales



En primera instancia no conocemos la posición del baricentro, por lo que buscamos hallarla como primer paso. Para este fin nos planteamos un par de ejes en el punto **O** llamados x' e y'. El siguiente paso es dividir nuestra sección en partes que sean más fáciles de manejar, por ejemplo 3, rectángulos, a partir de ahí plantearemos la forma de calcular la posición del baricentro:



$$y_G = \frac{y_{G1}A_1 + y_{G2}A_2 + y_{G3}A_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$y_G = \frac{1.10.0{,}5 + 1.13.7{,}5 + 1.7{,}5.14{,}5}{1.10 + 1.13 + 1.7{,}5} = 6{,}93\ cm$$

$$x_G = \frac{x_{G1}A_1 + x_{G2}A_2 + x_{G3}A_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$x_G = \frac{1.10.5 + 1.13.0{,}5 + 1.7{,}5.3{,}75}{1.10 + 1.13 + 1.7{,}5} = 2{,}78\ cm$$

Una vez calculada la posición del baricentro, pasamos a calcular los momentos de inercia respecto a los ejes x'' e y''. Utilizamos para esto el teorema de Steiner.

$$I_{x''} = \sum I_{x',i} + A_i\left(x_{G,i} - x_G\right)^2$$

$$I_{x''} = \frac{1^3 10}{12} + 1.10.(6{,}93 - 0.5)^2 + \frac{13^3 1}{12} + 13.1(7{,}5 - 6{,}93)^2 + \frac{1^3 7{,}5}{12} + 1.7{,}5(14{,}5 - 6{,}93)^2$$

$$I_{x''} = 1032\ cm^4$$

$$I_y = \sum I_{y',i} + A_i\left(y_{G,i} - y_G\right)^2$$

$$I_{y''} = \frac{10^3 1}{12} + 1.10.(2{,}78 - 5)^2 + \frac{1^3 13}{12} + 13.1(0{,}5 - 2{,}78)^2 + \frac{7{,}5^3 1}{12} + 1.7{,}5(3{,}75 - 2{,}78)^2$$

$$I_{x''} = 243{,}5\ cm^4$$

$$I_{xy} = \sum I_{x'y',i} + A_i(y_{Gi} - y_G)(x_{Gi} - x_G)$$

$$I_{x''y''} = 1.10(0{,}5 - 6{,}93)(5 - 2{,}775) + 1.13(7{,}5 - 6{,}926)(0{,}5 - 2{,}78) + 1.7{,}5(3{,}75 - 2{,}78)(14{,}5 - 6{,}93)$$

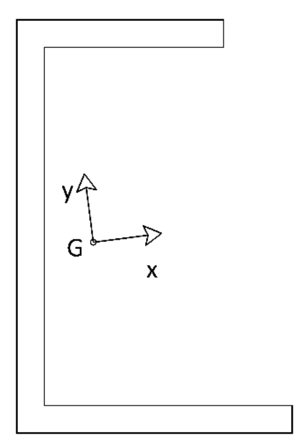
$$I_{x''y''} = -104.57\ cm^4$$

Tenemos entonces las propiedades geométricas definidas en el baricentro respecto a dos ejes x'' e y''. Procedemos a encontrar la dirección de los ejes principales. Para eso vamos a utilizar la relación anteriormente vista:

$$I_{xy} = \frac{I_{x''} - I_{y''}}{2}\sin(2\theta) + I_{x''y''}\cos(2\theta) = 0$$

$$\theta = \frac{1}{2}\operatorname{atan}\left(\frac{2I_{x''y''}}{I_{x''} - I_{y''}}\right) = 0.1296\ rad = 7.43º$$

La sección queda con sus ejes principales definidos. Calculamos ahora los momentos de inercia principales para la sección:



$$I_x = \frac{I_{x''} + I_{y''}}{2} + \frac{I_{x''} - I_{y''}}{2}\cos(2\theta) - I_{x''y''}\sin(2\theta)$$

$$I_x = 1045.63\ cm^4$$

$$I_y = \frac{I_{x''} + I_{y''}}{2} - \frac{I_{x''} - I_{y''}}{2}\cos(2\theta) + I_{x''y''}\sin(2\theta)$$

$$I_y = 229.86\ cm^4$$