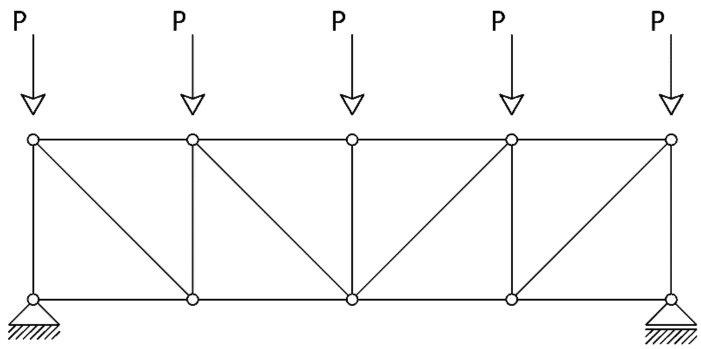
Introducción

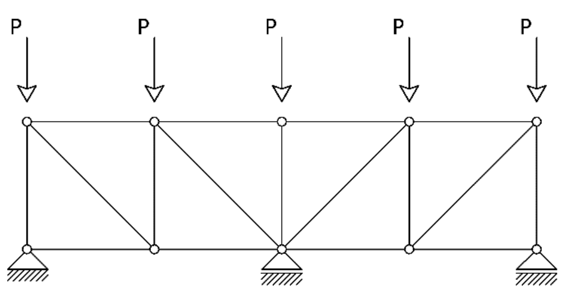
Un reticulado es una estructura compuesta por barras, generalmente de nudos articulados. Las barras forman triángulos, de esta forma pueden armar una estructura que actúa como un conjunto. La eficiencia de estas estructuras se debe a su capacidad portante respecto a su propio peso. Si las cargas se ubican en los nudos, y las barras son articuladas; este tipo de estructura no estará sometida a momento, por lo que las barras actúan solamente a directa, siendo de esta forma muy eficiente para su dimensionado.

En este curso nos centraremos únicamente en el análisis de reticulados planos; estos son aquellos reticulados cuyas barras y cargas están contenidas en un único plano:

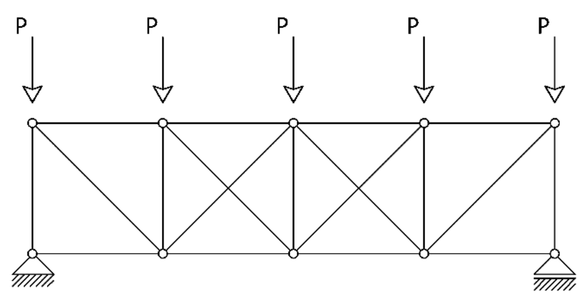


En la figura se puede ver un típico reticulado Pratt, estos tienen la ventaja de que las barras verticales están sometidas a compresión y las diagonales a tracción. Observando la disposición de las barras, se pueden ver que todas ellas forman triángulos, a su vez, presenta dos apoyos a tierra (uno simple y uno deslizante), siendo de esta forma un ejemplo de reticulado isostático.

De otras formas también podemos encontrar reticulados con dos tipos de hiperestaticidad, interna y externa. Esto se define al ver que tipos de restricciones tenemos.



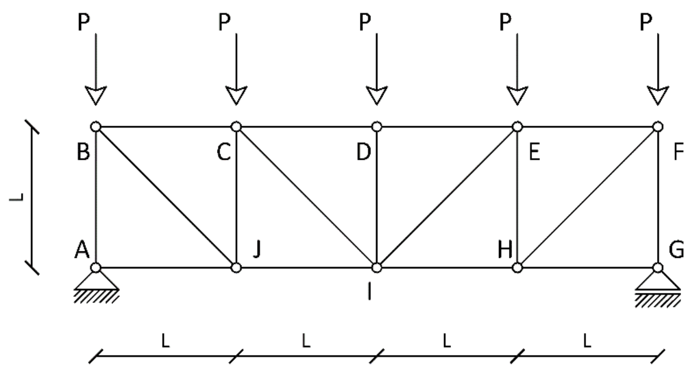
Hiperestaticidad externa



Hiperestaticidad interna

Análisis de reticulados

A la hora de resolver reticulados utilizaremos tres métodos distintos en el curso. El más básico de todos ellos es el método de equilibrio de nudos, este consiste en realizar equilibrio de fuerzas en cada nudo, teniendo de esta forma un sistema de ecuaciones de $2x2$ para cada nudo; cabe aclarar que este método es efectivo si contamos con un nudo canónico (un nudo al que lleguen solo dos barras, o tengamos solo dos incógnitas).



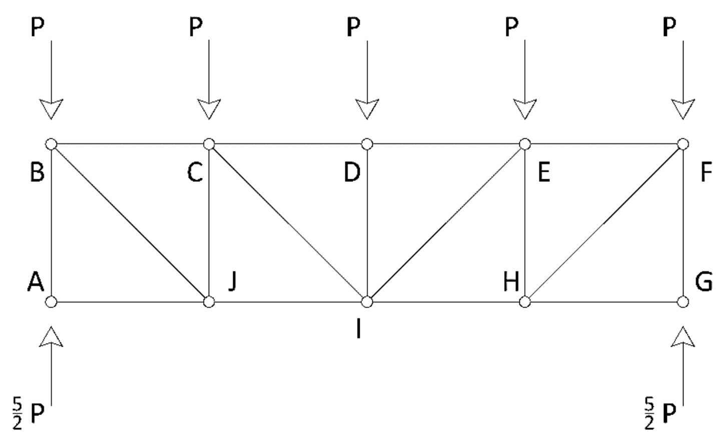
Volvamos un poco sobre nuestros pasos, al ejemplo del reticulado anterior. Si observamos este reticulado, y realizamos equilibrio de fuerzas y momentos, podemos fácilmente obtener las reacciones en los apoyos.

$$M_A = 0 = PL + 2PL + 3PL + 4PL - V_G\ 4L \to V_G = \frac{5}{2}P$$

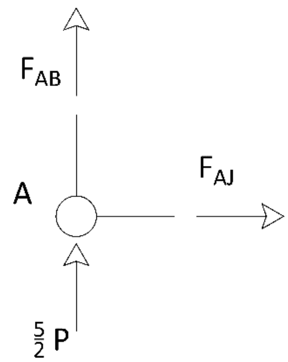
$$V_A + V_G = 5P \to V_A = \frac{5}{2}P$$

$$H_A = 0$$

Teniendo ahora las reacciones en los apoyos, podemos fijarnos que los nudos A y G (donde están los apoyos), son canónicos.



Podemos aislar entonces uno de los dos nudos, como se muestra a continuación:



Observación: Colocamos las fuerzas salientes a los nudos, de esta forma consideramos que una fuerza positiva representa una barra traccionada.

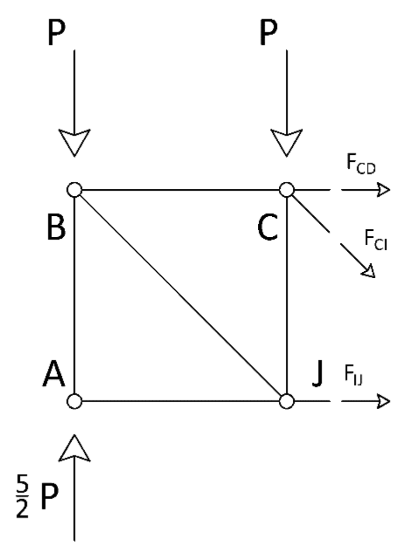
Al aislar el nudo podemos realizar un equilibrio de fuerzas sencillo (en los ejes horizontal y vertical), obteniendo:

$$F_{AB} = -\frac{5}{2}P$$

$$F_{AJ} = 0$$

Al tener estas dos fuerzas, podemos pasar al nudo B, luego al nudo J y así sucesivamente hasta obtener las fuerzas en todas las barras. El método nos brinda información completa sobre las fuerzas en la estructura, si bien resulta trabajoso.

Otro método que puede resultar útil en casos donde no queramos resolver todo el reticulado, es el método de las secciones (Ritter), este método se basa en realizar un corte a través de tres barras no concurrentes (o paralelas) y realizar equilibrio a una de las partes aisladas.



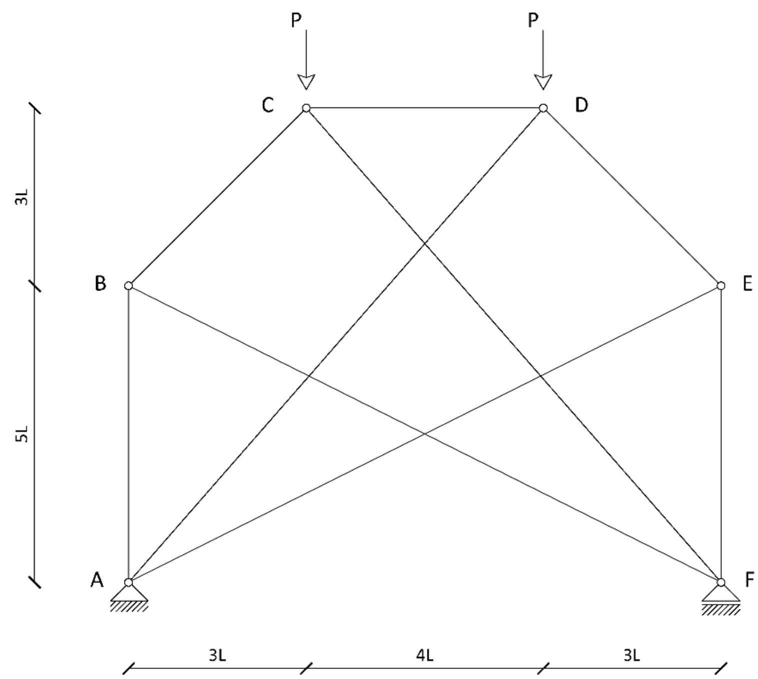
En la figura se puede ver un corte realizado a través de las barras JI, CI y CD. Dado que la estructura se encuentra en equilibrio, cada parte de esta debe estar en equilibrio, por lo tanto, podemos realizar equilibrio de fuerzas y momentos en cualquier parte del segmento aislado. En este caso, por ejemplo:

$$M_C = 0 = PL - \frac{5}{2}PL + F_{IJ}L \rightarrow F_{IJ} = \frac{3}{2}P$$

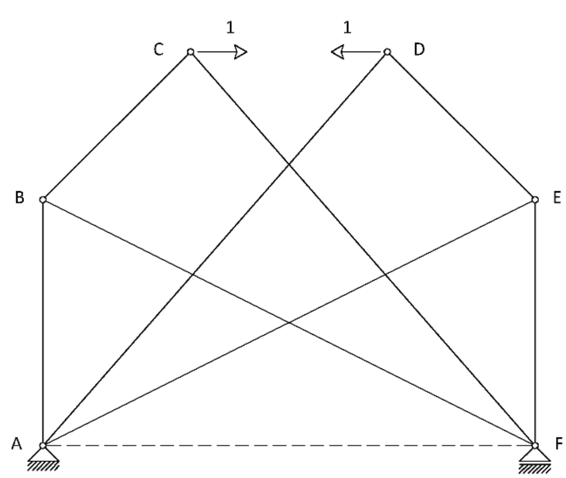
$$\sum F_V = 0 = \frac{5}{2}P - 2P - F_{CI}\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow F_{CI} = \frac{P}{\sqrt{2}}$$

$$\sum F_H = 0 = F_{CD} + \frac{3}{2}P + \frac{P}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow F_{CD} = -2P$$

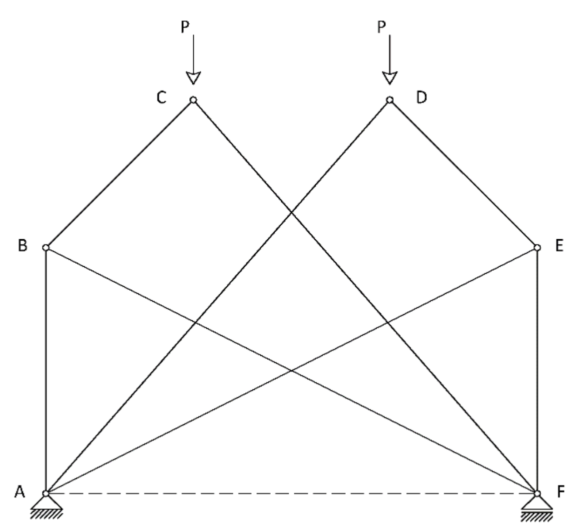
Por último, tenemos el método de Henneberg, este método es aplicable en casos donde no tenemos nudos canónicos. El método consiste en realizar dos estados, quitando una barra en la estructura original y sustituyendo por una fuerza y una barra ficticia en una estructura auxiliar. Si superponemos ambas estructuras, es natural poder decir que la barra ficticia no puede tener una directa no nula. Por lo tanto buscamos un multiplicador x para el sistema que provoque una fuerza nula en la barra ficticia. Veamos el ejemplo a continuación.



Como se puede ver, ningún nudo es canónico, y no existe forma de cortar únicamente tres barras no concurrentes, por lo tanto, recurrimos al método de Henneberg. Vamos a remplazar la barra CD por una barra en AF. De esta forma nuestros nudos C y D son ahora canónicos. Planteando entonces, los estados auxiliares:



Estado 0



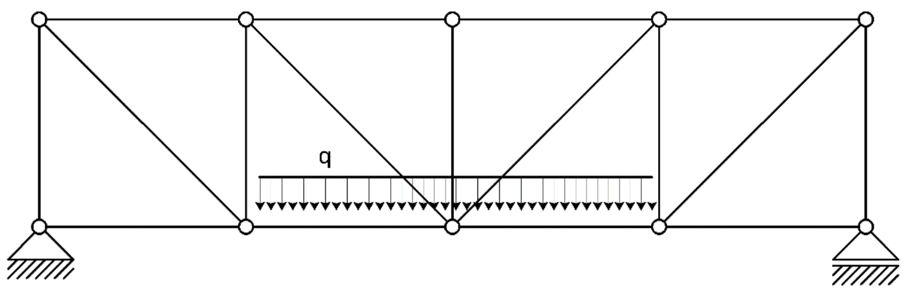
Estado 1

Dado que la barra AF no existe:

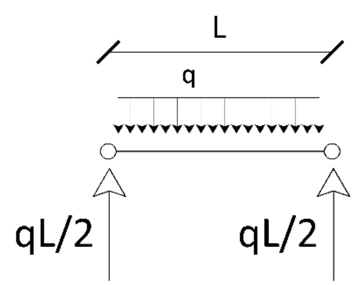
$$F_{AF} = x.F_{AF}^{0} + F_{AF}^{1} = 0 \rightarrow x = -\frac{F_{AF}^{1}}{F_{AF}^{2}}$$

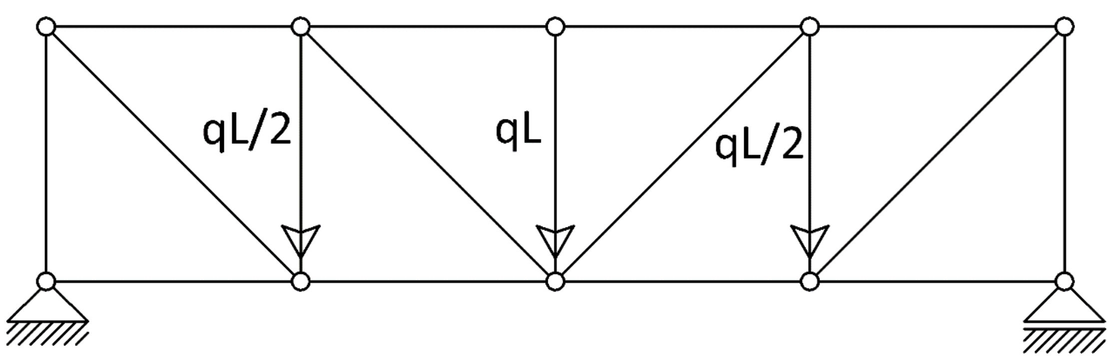
De esta forma se resuelve una incógnita, y a partir de ahí podemos trabajar con equilibrio de nudos (teniendo ahora nudos canónicos en C y D) o método de las secciones (cortando a través de AB, BF y CF, ya que la incógnita CD fue resuelta).

Hasta ahora se ha visto como trabajar con reticulados cuyas cargas están aplicados en los nudos, existen casos donde las cargas pueden estar distribuidas en los tramos, en esos casos se debe realizar un sistema de cargas equivalentes para resolver el reticulado. No se debe olvidar también que las barras tienen carga en sus tramos, por lo que su comportamiento será distinto al de los casos anteriores. Veamos el caso a continuación:



A fin de poder trabajar con estos sistemas de cargas, analizaremos primero un tramo que tenga carga distribuida. Realizando rápidamente equilibrio en el tramo, vemos que las reacciones en los nudos tienen que valer $qL/2$, esta es una fuerza interna que el reticulado provoca sobre el tramo para su equilibrio; de la misma forma podemos cargar el reticulado con la fuerza opuesta (recordar el principio de acción-reacción). De esta forma realizamos lo que se conoce como un sistema de cargas equivalentes:





Dimensionado

Al diseñar las estructuras nos interesa resolver la estructura que queremos materializar, para luego dimensionar sus elementos. Se conoce como dimensionado al diseño de las secciones de la estructura. Supongamos que tenemos resuelta toda la estructura y queremos diseñar cada elemento con una barra circular única, para ello vamos a contar con un material de diseño, que va a tener asociadas ciertas propiedades como densidad, modulo elástico y resistencia. Nosotros queremos que las tensiones en nuestras barras no superen las tensiones admisibles, para ello, debemos calcular la tensión máxima dada en nuestras barras y hallar el área tal que provoque que no se superen. De forma mas sencilla si queremos ver el diámetro de las barras.

$$\frac{\max[F_i]}{A} \leq \sigma_{adm}$$

Como elegimos barras circulares, llamando D al diámetro:

$$A = \frac{D^2 \pi}{4}$$

Entonces:

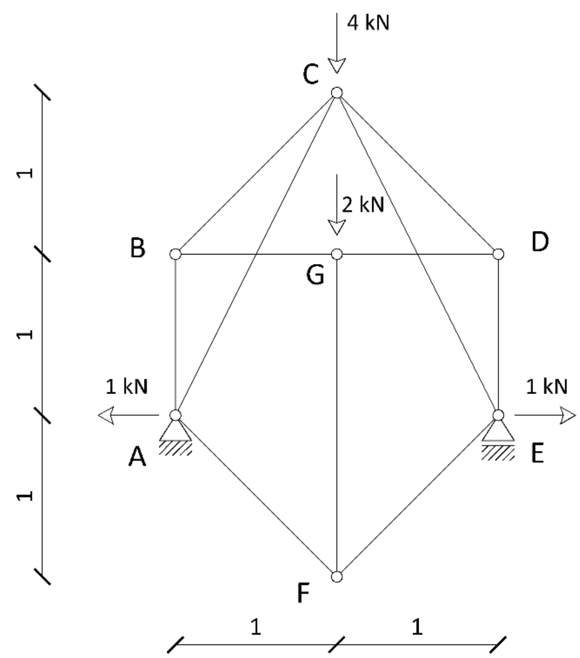
$$D \geq \sqrt{\frac{4 \max[F_i]}{\pi\ \sigma_{adm}}}$$

De esta forma quedan dimensionadas todas las barras con un único perfil. Puede suceder que se quiera agrupar las barras por tipo (cordón superior, diagonales, cordón inferior, etc.). En esos casos se toma el máximo de cada grupo, y se encuentra un diámetro para cada grupo.

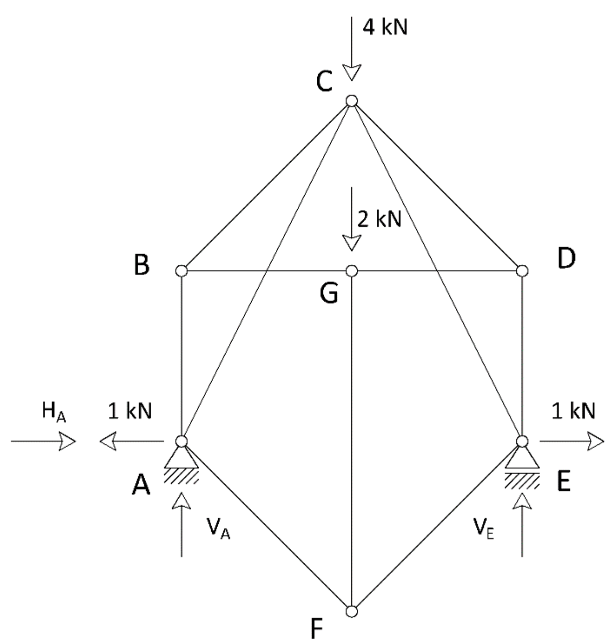
NOTA: En los casos donde exista carga en el tramo, las barras estarán sometidas a flexión aparte de la directa hallada al resolver el reticulado, el dimensionado a flexo-tracción y flexo-compresión será visto más adelante en el curso.

Ejemplo 1

Analizaremos el siguiente reticulado, buscando hallar las fuerzas en todas las barras. Una vez obtenidas las solicitaciones en nuestra estructura, dimensionaremos con un único perfil circular macizo con diámetro (ϕ) entero en mm. Para el dimensionado utilizaremos una resistencia del material de: $\sigma_{adm} = 30\ MPa$.



Vamos a empezar calculando las reacciones de la estructura:



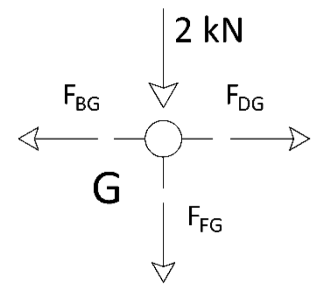
Para el calculo de las reacciones vamos a realizar equilibrio de fuerzas y momentos:

$$M_A = 0 = 2\ kN.1m + 4kN.1m - V_E.2m = 0 \rightarrow V_E = 3\ kN$$

$$V_A + 3kN - 2kN - 4kN = 0 \rightarrow V_A = 3\ kN$$

$$H_A + 1\ kN - 1\ kN = 0 \rightarrow H_A = 0$$

Como podemos ver, la estructura presenta simetría de geometría y de cargas. Por lo que vamos a resolver la mitad de la estructura, y por simetría, la otra mitad deberá ser igual. Si vemos la estructura, podemos observar que en principio no existe ningún nudo canónico, pero, si observamos el nudo G, vemos que las barras BD y DG son ortogonales a la barra FG. Vamos entonces a plantear el equilibrio en G en la dirección de la barra FG.

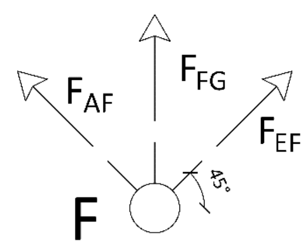


$$F_{FG} + 2\ kN = 0 \rightarrow F_{FG} = -2\ kN$$

$$F_{DG} = F_{BG}, esto\ ya\ era\ sabido\ por\ simetría$$

Observación: Este razonamiento es particularmente útil para el análisis de barras inactivas, siempre que hay dos barras alineadas, podemos realizar un equilibrio en la dirección perpendicular a ellas, y obtener una ecuación donde eliminamos una incógnita, o determinamos una fuerza nula en una barra.

Conocida ya la fuerza en la barra FG, notamos que el nudo F ahora presenta solamente dos incógnitas.



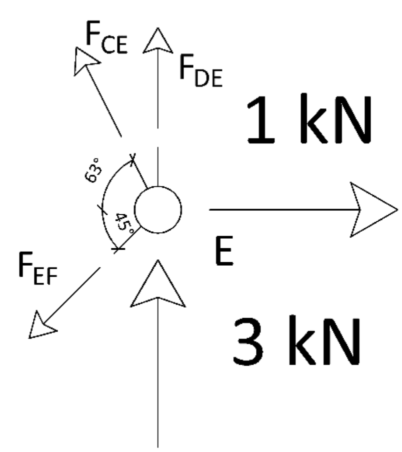
$$F_{EF} = F_{AF}$$

$$F_{FG} + 2.\frac{1}{\sqrt{2}} F_{EF} = 0 \rightarrow F_{EF} = \sqrt{2}\ kN$$

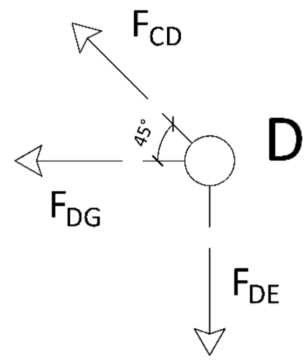
Pasamos entonces al nudo E:

$$F_{CE}.\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{F_{EF}}{\sqrt{2}} = 1\ kN \rightarrow F_{CE} = 0$$

$$F_{DE} + 3\ kN = \frac{F_{EF}}{\sqrt{2}} \rightarrow F_{DE} = -2\ kN$$



Queda solamente resolver el nudo D:



$$F_{DE} = \frac{F_{CE}}{\sqrt{2}} \rightarrow F_{CD} = -2\sqrt{2}\ kN$$

$$\frac{F_{CD}}{\sqrt{2}} + F_{DG} = 0 \rightarrow F_{DG} = 2\ kN$$

Con el reticulado ya resuelto, pasamos al dimensionado de las barras. Tomamos por lo tanto la barra más solicitada, esta es la barra CD, con $F_{CD} = -2\sqrt{2}\ kN \cong 2{,}828\ kN$. Por lo tanto:

$$\frac{2.828\ kN}{A} \leq 30\ MPa \rightarrow A_{min} = 94.27\ mm^2$$

$$A = \frac{\phi^2\pi}{4} \rightarrow \phi_{min} = 10.96\ mm$$

$$\phi = 11\ mm$$