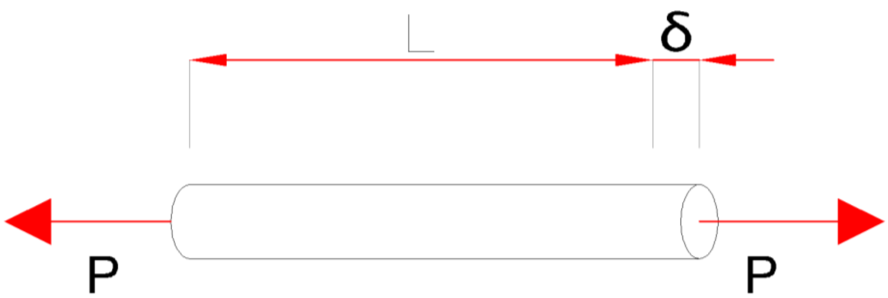
Guía práctico 2

Resumen teórico:

En conjunto con el concepto de tensión, aparece el concepto de la deformación. Si tomamos el mismo ejemplo de la barra traccionada, en la misma se produce un alargamiento δ.

Visto de forma simplificada se puede ver:



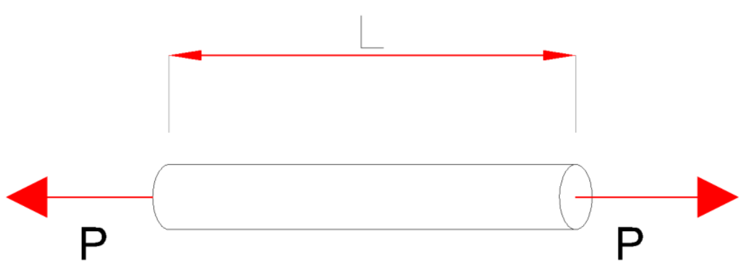
Para este caso sencillo se puede definir la deformación unitaria como:

$$\varepsilon = \frac{(\delta + L) - L}{L}$$

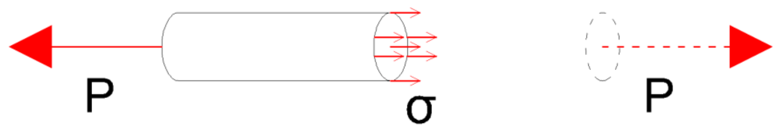
Si extendemos este concepto al caso diferencial, llegamos a la expresión:

$$\frac{du}{dx} = \varepsilon$$

La idea de tensión surge de la aplicación de una fuerza sobre una barra. Supongamos una barra prismática de sección A, donde actúan 2 fuerzas colineales a la misma en ambos extremos y de valor P y $-P$.



Si realizamos un corte de la barra se puede ver que la misma debe permanecer en equilibrio, por lo que aparece el esfuerzo interno σ, llamada tensión normal (por ser perpendicular a la sección).



Considerando la tensión como uniforme se puede deducir:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Se debe notar que esta tensión tiene la forma de una fuerza por unidad de área. En el ejemplo la tensión considerada era de tracción, se define la tensión como positiva en este caso; si se tiene una compresión de la sección suele considerarse la misma como una tensión negativa.

En materiales elásticos y lineales, considerando pequeñas deformaciones las deformaciones unitarias se ven vinculadas a la tensión normal mediante una constante de proporcionalidad (E). Por lo que resulta:

$$\sigma = E\varepsilon$$

Esta expresión es conocida como la ley de Hooke, cabe notar que al ser las deformaciones unitarias adimensionadas, el coeficiente E (llamado Modulo de Young) tiene unidades de fuerza sobre área.

Práctico:

En este práctico se estudiarán las barras sometidas a esfuerzos de directa, tomando en cuenta el comportamiento deformable de los sólidos en estudio, dicho estudio se centra en dos áreas:

- Estado tensional
- Estado de deformaciones

En este curso se trabajará solamente con sólidos que se consideren elásticos y lineales, por lo que se aplica la ley de Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon$$

Siendo:

- σ: Las tensiones normales, definidas como $\sigma = \frac{N(x)}{A(x)}$
- E: El módulo elástico o el módulo de Young
- ε: La deformación unitaria, definida como $\varepsilon = \frac{du}{dx}$ con $u(x)$ siendo el campo de desplazamientos

Tenemos de esta forma una serie de relaciones que podemos usar para encontrar las tensiones en cualquier punto (si se tiene el campo de desplazamientos), o encontrar el desplazamiento en cualquier punto si se tiene resuelto el estado tensional.

Casos particulares:

En los casos donde la directa en la barra y la sección sean constantes se puede utilizar la siguiente expresión para el alargamiento de un tramo de barra de largo L:

$$\delta = \frac{NL}{EA}$$

Esto no debe ser utilizado cuando se tiene directa variable o sección variable.

Si la directa es variable:

$$\delta = \frac{1}{EA} \int_0^L N(x)\, dx$$

Se debe tener en cuenta que esto no corresponde de por si a los desplazamientos, para este fin debe contarse además con una condición de borde (un apoyo, o un punto de desplazamiento conocido).

En el caso que el área sea variable:

$$\delta = \frac{N}{E} \int_0^L \frac{1}{A(x)} dx$$

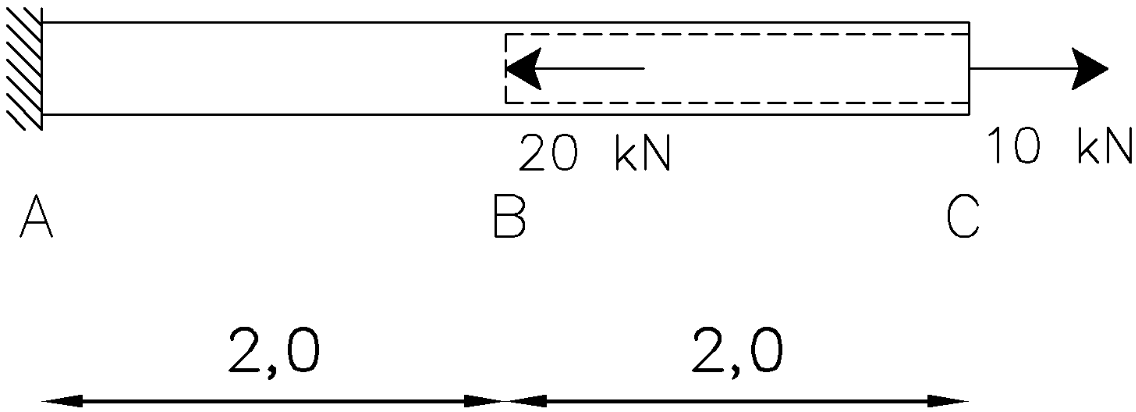
En el caso general:

$$\delta = \frac{1}{E} \int_0^L \frac{N(x)}{A(x)} dx$$

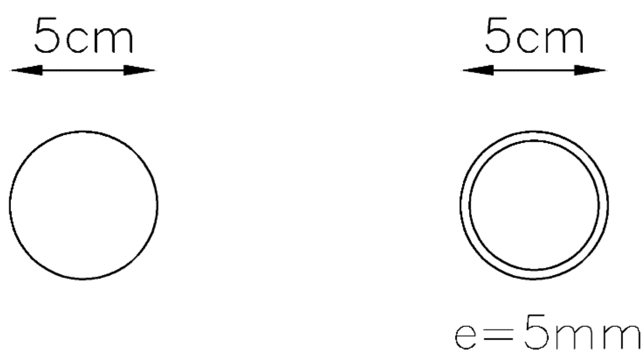
El concepto detrás de todas estas expresiones es siempre el mismo, la integración de las deformaciones unitarias a lo largo de la barra.

Ejemplo 1:

Vamos a considerar la siguiente viga construida en aluminio: $E = 70\ GPa$



Se tienen las siguientes secciones; correspondientes a los tramos AB y BC respectivamente:



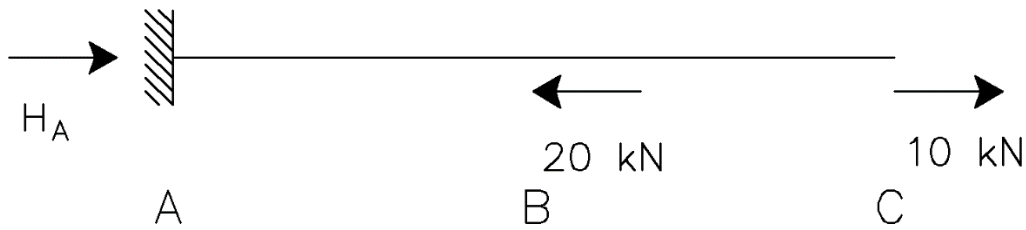
El procedimiento para seguir es:

1. Hallar las reacciones
2. Realizar diagrama de solicitaciones (en este caso solamente directa)
3. Realizar el diagrama de tensiones normales
4. Realizar el diagrama de deformaciones unitarias
5. Hallar campo de desplazamiento

Comenzamos entonces calculando las reacciones:

Para el equilibrio de momentos y vertical se deduce rápidamente que son nulos:

$$M_A = 0\,; V_A = 0$$

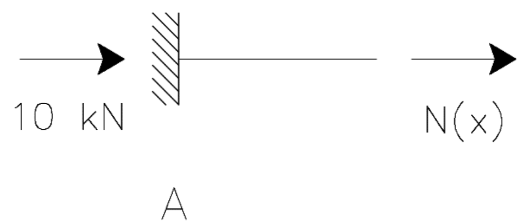


$$H_A - 20\ kN + 10\ kN = 0\ \rightarrow \boldsymbol{H_A = 10\ kN}$$

Pasamos entonces a calcular la directa a lo largo de la barra:

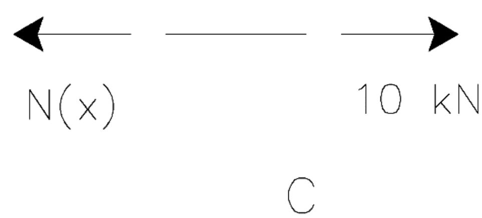
IMPORTANTE: La directa positiva siempre se considera saliente a la barra.

Para el tramo AB:



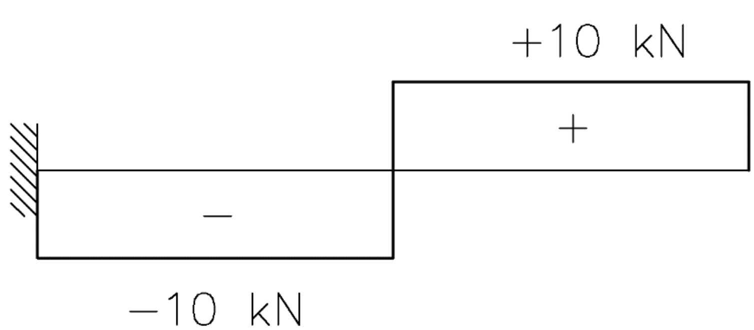
$$0 \leq x \leq 2\ m \rightarrow N(x) = -10\ kN$$

Para el tramo BC:



$$2 \leq x \leq 4\ m \rightarrow N(x) = +10\ kN$$

Realizamos entonces el diagrama de directa:



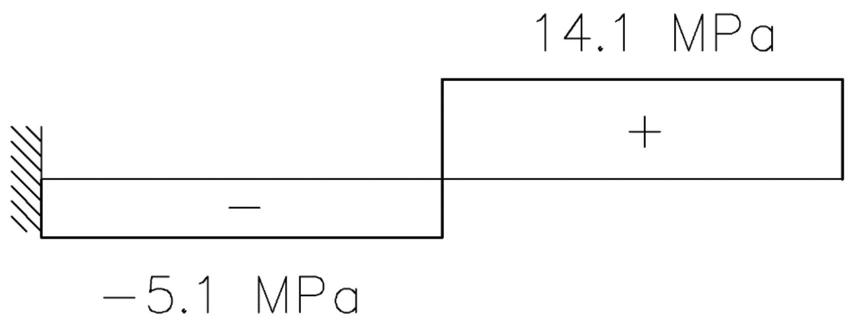
Teniendo el diagrama de directa, se puede construir el diagrama de tensiones normales, basta dividir la directa en un punto por su área correspondiente.

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)}$$

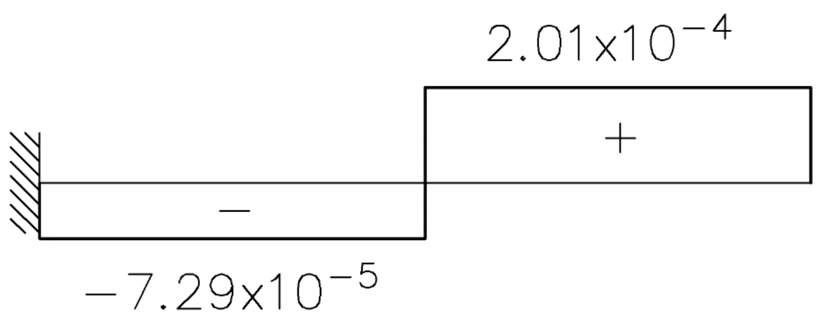
Por lo tanto, calculamos las áreas en cada tramo:

$$A_{AB} = \frac{\pi(5cm)^2}{4} = 19.6\ cm^2$$

$$A_{BC} = 19.6\ cm^2 - \frac{\pi(4cm)^2}{4} = 7.07\ cm^2$$



Sabiendo que el material es uniforme, el diagrama de deformaciones unitarias será directamente proporcional al diagrama de tensiones normales, utilizando la ley de Hooke ($\sigma = E\varepsilon$)



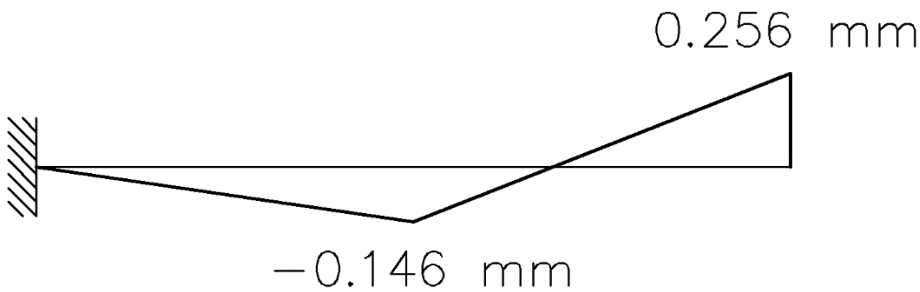
Una vez realizado este paso, podemos proceder a calcular el campo de desplazamientos, integrando las deformaciones unitarias. Precisamos solamente una condición de borde, esta está dada por el empotramiento, que nos restringe el desplazamiento horizontal de la estructura, entonces podemos decir:

$$u(0) = 0$$

Al saber que las deformaciones unitarias son uniformes en sus respectivos tramos, sabemos entonces que el campo de desplazamientos va a ser lineal. Procedemos entonces a integrar:

$$u(x) = \begin{cases} -x.\,7{,}29 * 10^{-5}\,, & x < 2\,m \\ x.\,2{,}01 * 10^{-4} - 1{,}46 * 10^{-4}m\,, & x \geq 2\,m \end{cases}$$

A partir de estas expresiones podemos entonces realizar el diagrama para el campo de desplazamientos:



Comentario:

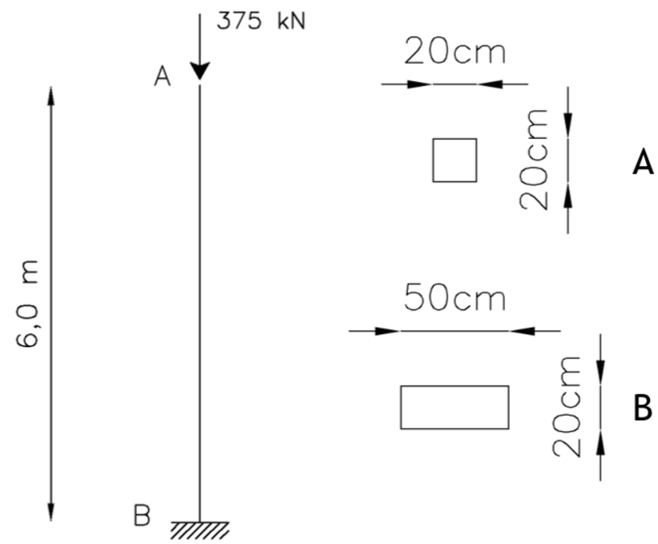
Podríamos haber utilizado la expresión:

$$\delta = \frac{NL}{EA}$$

Si hubiera sido aplicada a cada tramo, teniendo en cuenta diferentes condiciones de borde.

Ejemplo 2: 1º Parcial 2017

- La sección varía de forma lineal
- Se toma $E = 30\ GPa$
- Se busca el desplazamiento del punto **A**



En este caso la directa es constante, pero el área es linealmente variable, por lo que queremos encontrar la expresión del área.

Colocando un eje z en B, considerando positivo hacia arriba.

$$A(z) = 0.20\ m\ \left(0.50\ m - 0.30\ m\frac{z}{6\ m}\right)$$

Calculamos entonces las deformaciones unitarias:

$$\varepsilon(z) = \frac{N}{EA(z)} = -\frac{375\ kN}{E\ 0.20\ m\left(0.50\ m - 0.30\ m\frac{z}{6\ m}\right)}$$

Recordando la definición de las deformaciones unitarias:

$$\varepsilon(z) = \frac{du}{dz}$$

Sabiendo que en el empotramiento el desplazamiento es nulo, $u(0) = 0$

$$\delta_A = u(6m) = \int_0^{6m} -\frac{375kN}{E\ 0.20m\left(0.50m - 0.30m\frac{z}{6m}\right)}dz$$

Vamos a utilizar:

$$\int \frac{1}{a - bx} = -\frac{\log(a - bx)}{b} + C$$

Entonces:

$$\delta_A = -\frac{375kN}{30GPa\ 0.20m}\int_0^{6m} \frac{1}{\left(0.50m - 0.30m\frac{z}{6m}\right)}dz = -\frac{375kN}{30GPa\ 0.20m}18.33$$

$$\delta_A = -1.15\ mm$$