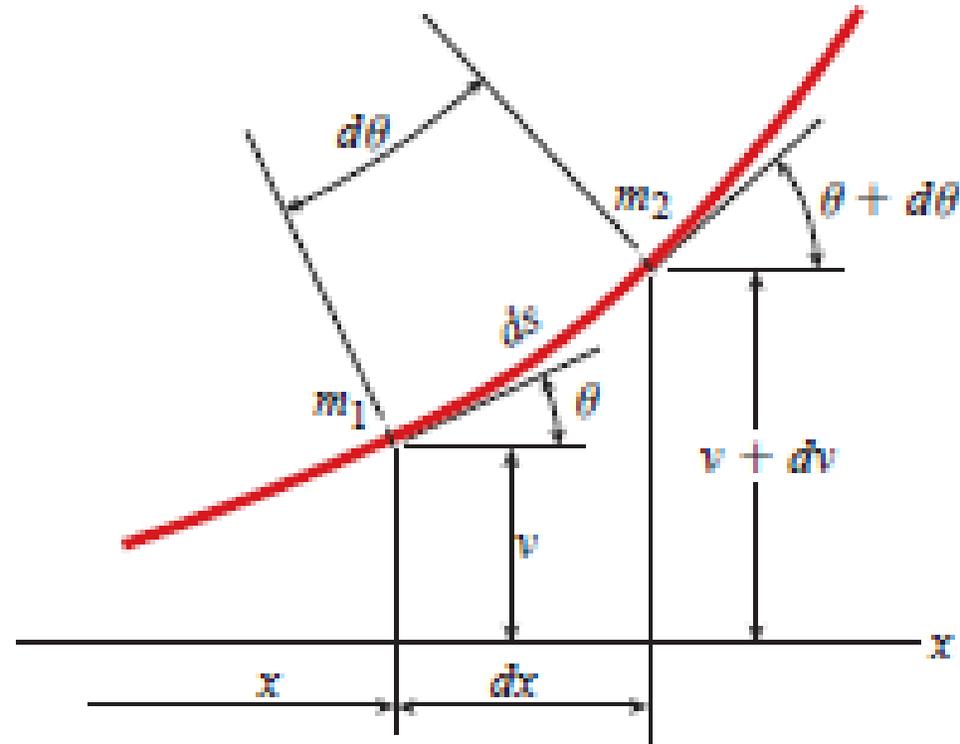
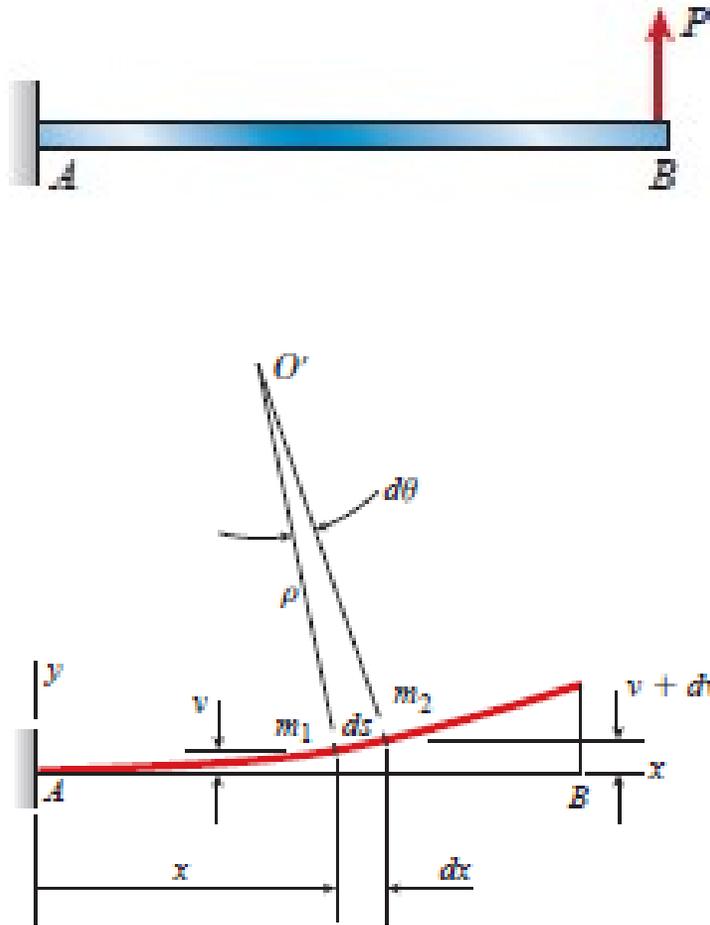


Semana 9

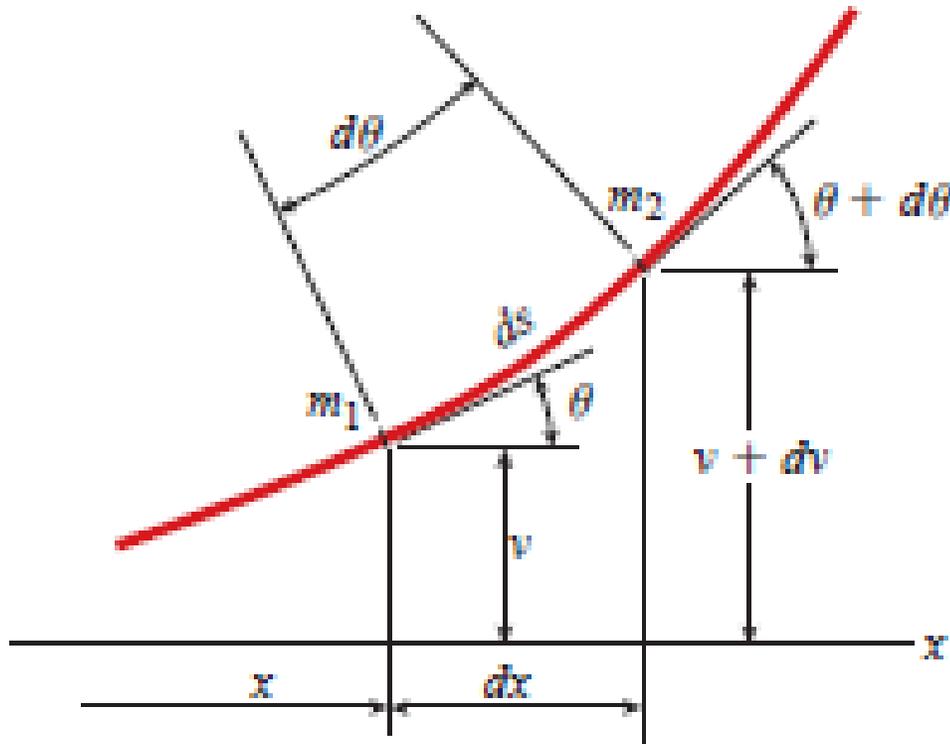
Teoría de vigas

Flechas y giros

Deflexiones (“Elástica”) de la viga



Deflexiones (“Elástica”) de la viga



$\kappa = 1/\rho$: *Curvatura*
 v : *desplazamiento perp. al eje*
 ϑ : *ángulo de giro*

$$\rho \, d\theta = ds$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}$$

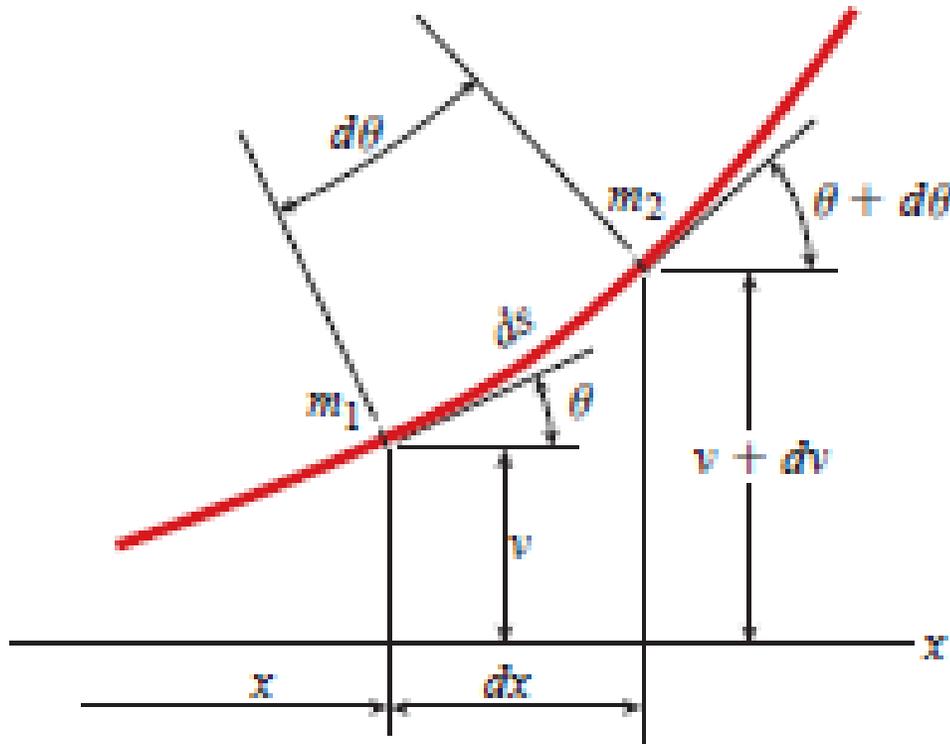
$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$$

Relación
momento-curvatura:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E.I}$$

Vamos a obtener **la relación entre desplazamientos, giros, y curvatura** para cada punto de la viga.

Deflexiones (“Elástica”) de la viga



$\kappa=1/\rho$: *Curvatura*
 v : *desplazamiento perp. al eje*
 ϑ : *ángulo de giro*

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$$

$$\tan(\theta) = \frac{dv}{dx}$$

Pequeñas deformaciones: $\theta = \frac{dv}{dx}$

La relación entre desplazamientos, giros, y curvatura para cada punto de la viga:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d(dv/dx)}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2}$$

Deflexiones (“Elástica”) de la viga

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E.I}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2}$$

Ecuación diferencial de la curva de deflexión (o ecuación de la elástica):

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

Si conocemos la expresión de **M/EI** para todo x de la viga, podremos **integrar dos** veces la ecuación de la elástica, obteniendo una expresión de **v** con dos constantes de integración (C1 y C2).

En la práctica no haremos la integración analítica, salvo que sea estrictamente necesario.

Se disponen de varios métodos alternativos, de los cuales, en el curso veremos dos en detalle:

- **Método de superposición**
- **Viga análoga**

Método de superposición (1º) - Tabulación

Las deflexiones y giros en **vigas empotradas y vigas simplemente apoyadas** se encuentran resueltas y tabuladas para una serie habitual de configuraciones de carga. En el EVA, en el apéndice G del libro Gere, o en Internet, se pueden encontrar colecciones completas de casos.

En base a estas tablas, se pueden determinar los desplazamientos en **estos tipos de vigas** para **combinaciones de cargas** mediante el **principio de superposición**.

Ejemplos:

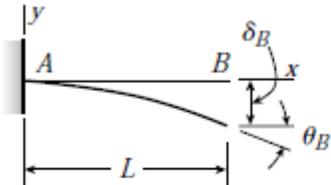
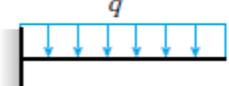
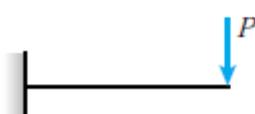
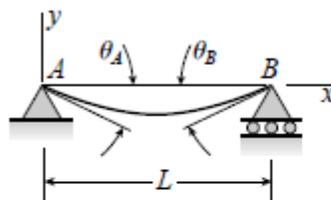
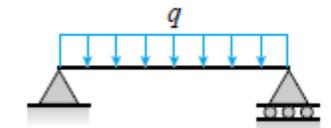
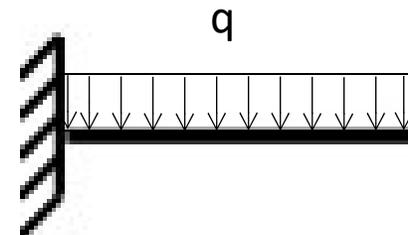
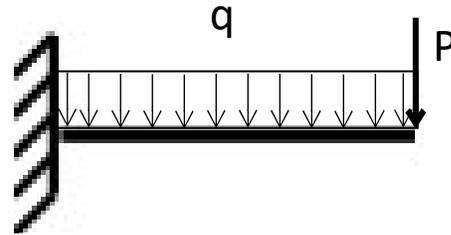
TABLE G-1 DEFLECTIONS AND SLOPES OF CANTILEVER BEAMS	
	$v = \text{deflection in the } y \text{ direction}$ $v' = dv/dx = \text{slope of the deflection curve}$ $\delta_B = -v(L) = \text{deflection at end } B \text{ of the beam}$ $\theta_B = -v'(L) = \text{angle of rotation at end } B \text{ of the beam}$ $EI = \text{constant}$
	$v = -\frac{qx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2) \quad v' = -\frac{qx}{6EI}(3L^2 - 3Lx + x^2)$ $\delta_B = \frac{qL^4}{8EI} \quad \theta_B = \frac{qL^3}{6EI}$
	$v = -\frac{Px^2}{6EI}(3L - x) \quad v' = -\frac{Px}{2EI}(2L - x)$ $\delta_B = \frac{PL^3}{3EI} \quad \theta_B = \frac{PL^2}{2EI}$

TABLE G-2 DEFLECTIONS AND SLOPES OF SIMPLE BEAMS	
	$v = \text{deflection in the } y \text{ direction}$ $v' = dv/dx = \text{slope of the deflection curve}$ $\delta_C = -v(L/2) = \text{deflection at midpoint } C \text{ of the beam}$ $x_1 = \text{distance from support } A \text{ to point of maximum deflection}$ $\delta_{\max} = -v_{\max} = \text{maximum deflection}$ $\theta_A = -v'(0) = \text{angle of rotation at left-hand end of the beam}$ $\theta_B = v'(L) = \text{angle of rotation at right-hand end of the beam}$ $EI = \text{constant}$
	$v = -\frac{qx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$ $v' = -\frac{q}{24EI}(L^3 - 6Lx^2 + 4x^3)$ $\delta_C = \delta_{\max} = \frac{5qL^4}{384EI} \quad \theta_A = \theta_B = \frac{qL^3}{24EI}$

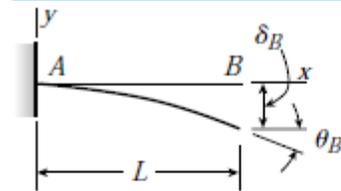
Ejemplo

Hallar el descenso y el giro en el extremo de la ménsula en función de EI .

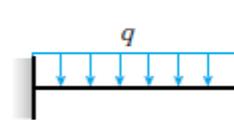


Tablas

TABLE G-1 DEFLECTIONS AND SLOPES OF CANTILEVER BEAMS

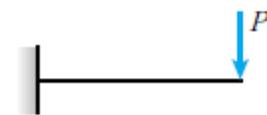


v = deflection in the y direction
 $v' = dv/dx$ = slope of the deflection curve
 $\delta_B = -v(L)$ = deflection at end B of the beam
 $\theta_B = -v'(L)$ = angle of rotation at end B of the beam
 $EI = \text{constant}$



$$v = -\frac{qx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2) \quad v' = -\frac{qx}{6EI}(3L^2 - 3Lx + x^2)$$

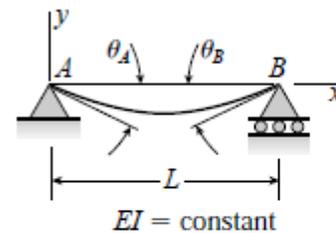
$$\delta_B = \frac{qL^4}{8EI} \quad \theta_B = \frac{qL^3}{6EI}$$



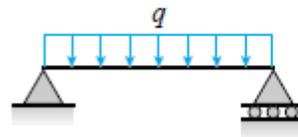
$$v = -\frac{Px^2}{6EI}(3L - x) \quad v' = -\frac{Px}{2EI}(2L - x)$$

$$\delta_B = \frac{PL^3}{3EI} \quad \theta_B = \frac{PL^2}{2EI}$$

TABLE G-2 DEFLECTIONS AND SLOPES OF SIMPLE BEAMS



v = deflection in the y direction
 $v' = dv/dx$ = slope of the deflection curve
 $\delta_C = -v(L/2)$ = deflection at midpoint C of the beam
 x_1 = distance from support A to point of maximum deflection
 $\delta_{\max} = -v_{\max}$ = maximum deflection
 $\theta_A = -v'(0)$ = angle of rotation at left-hand end of the beam
 $\theta_B = v'(L)$ = angle of rotation at right-hand end of the beam
 $EI = \text{constant}$

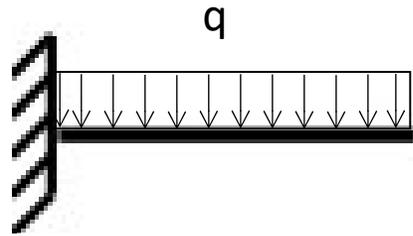
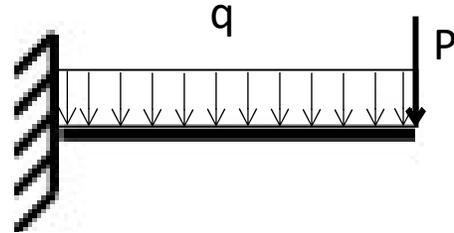


$$v = -\frac{qx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$$

$$v' = -\frac{q}{24EI}(L^3 - 6Lx^2 + 4x^3)$$

$$\delta_C = \delta_{\max} = \frac{5qL^4}{384EI} \quad \theta_A = \theta_B = \frac{qL^3}{24EI}$$

Superposición



$$v(L) = \frac{q * L^4}{8EI} \downarrow$$

$$\theta(L) = \frac{q * L^3}{6EI}$$

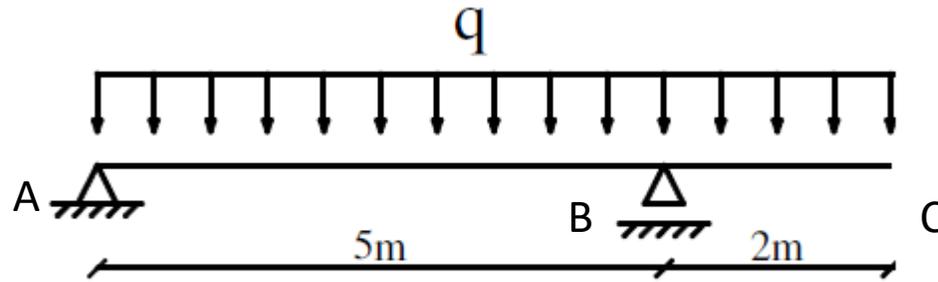
$$v(L) = \frac{P * L^3}{3EI} \downarrow$$

$$\theta(L) = \frac{P * L^2}{2EI}$$

$$v(L) = \frac{q * L^4}{8EI} + \frac{P * L^3}{3EI}$$

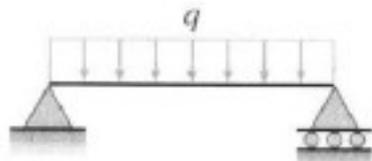
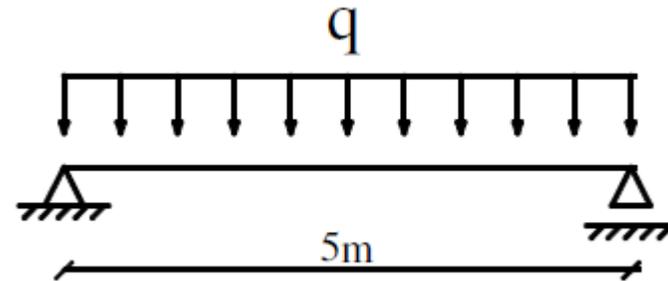
$$\theta(L) = \frac{q * L^3}{6EI} + \frac{P * L^2}{2EI}$$

Método de superposición



Giro en A y flecha en C

Giro en A



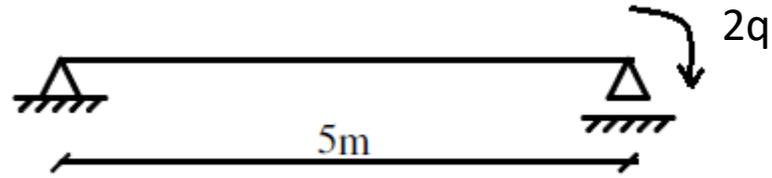
$$v = -\frac{qx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$$

$$v' = -\frac{q}{24EI}(L^3 - 6Lx^2 + 4x^3)$$

$$\delta_C = \delta_{\max} = \frac{5qL^4}{384EI} \quad \theta_A = \theta_B = \frac{qL^3}{24EI}$$

$$\theta_{1A} = q \cdot (5 \text{ m})^3 / (24EI)$$

horario



$$v = -\frac{M_0 x}{6EI}(2L^2 - 3Lx + x^2) \quad v' = -\frac{M_0}{6EI}(2L^2 - 6Lx + 3x^2)$$

$$\delta_c = \frac{M_0 L^2}{16EI} \quad \theta_A = \frac{M_0 L}{3EI} \quad \theta_B = \frac{M_0 L}{6EI}$$

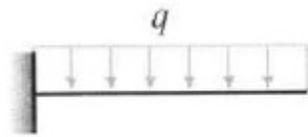
$$x_1 = L\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad y \quad \delta_{\max} = \frac{M_0 L^2}{9\sqrt{3}EI}$$

$$\theta_{2A} = -2 \text{ m} \cdot q \cdot 1 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} / (6EI) \quad \text{Antihorario}$$

$$\theta_{\text{ATOTAL}} = \theta_{1A} + \theta_{2A}$$

$$\theta_{\text{ATOTAL}} = q \cdot (5 \text{ m})^3 / (24EI) - 2 \text{ m} \cdot q \cdot 1 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} / (6EI)$$

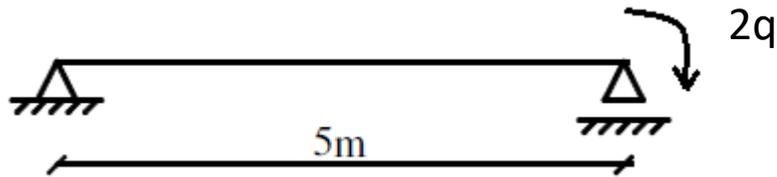
Deflexión en C



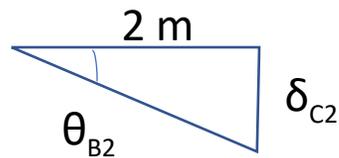
$$v = -\frac{qx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2) \quad v' = -\frac{qx}{6EI}(3L^2 - 3Lx + x^2)$$

$$\delta_B = \frac{qL^4}{8EI} \quad \theta_B = \frac{qL^3}{6EI}$$

$$\delta_{C1} = q \cdot (5 \text{ m})^4 / (8EI) \quad \downarrow$$

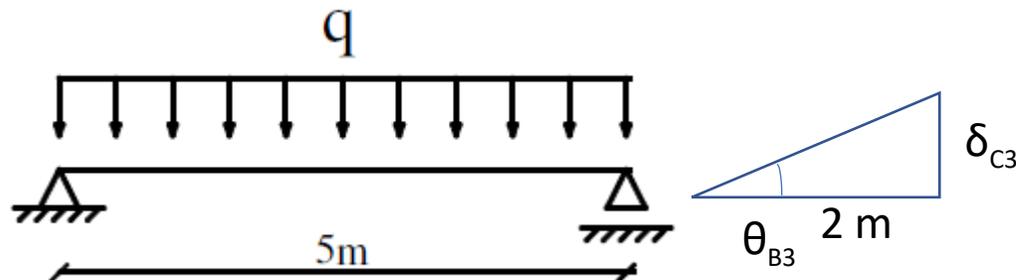


$$\theta_{B2} = -2 \text{ m} \cdot q \cdot 1 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} / (3EI)$$



$$\delta_{C2} = 2 \cdot (2 \text{ m} \cdot q \cdot 1 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} / (3EI)) \quad \downarrow$$

A la tangente del ángulo la aproximamos por el ángulo, en pequeñas deformaciones

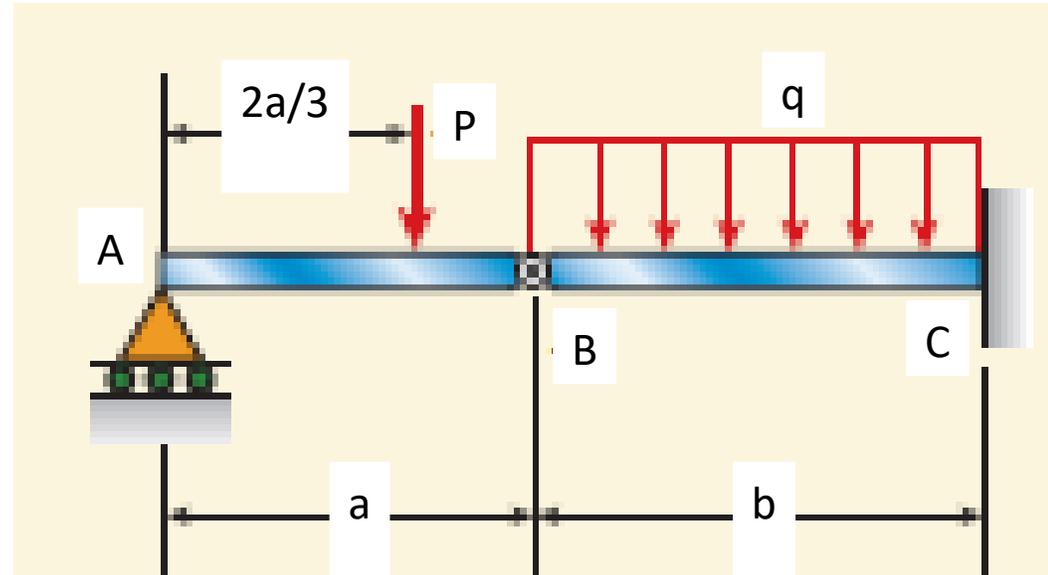


$$\theta_{B3} = q \cdot (5 \text{ m})^3 / (24EI)$$

$$\delta_{C3} = -2 \cdot (q \cdot (5 \text{ m})^3 / (24EI)) \quad \uparrow$$

$$\delta_C = \delta_{C1} + \delta_{C2} + \delta_{C3}$$

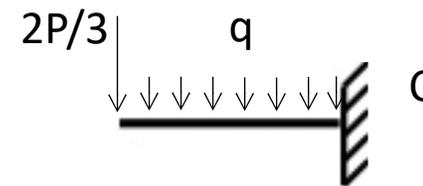
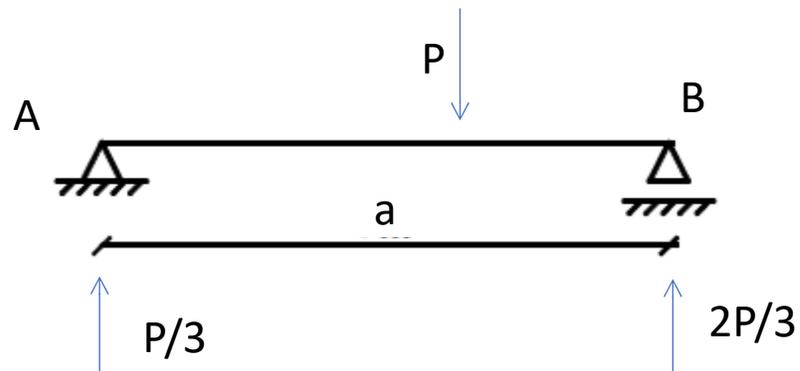
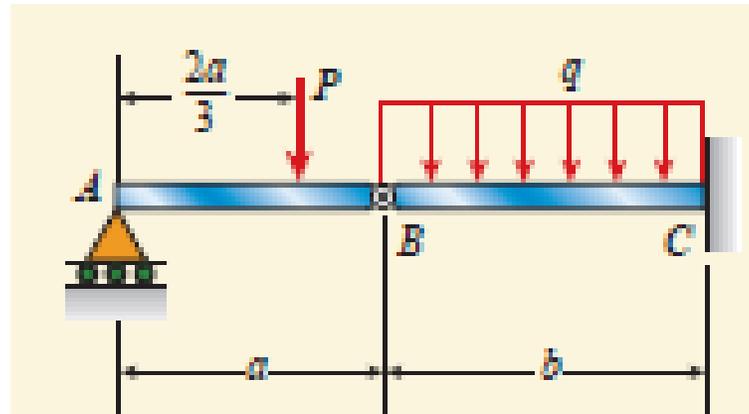
Ejemplo de giros y deflexiones



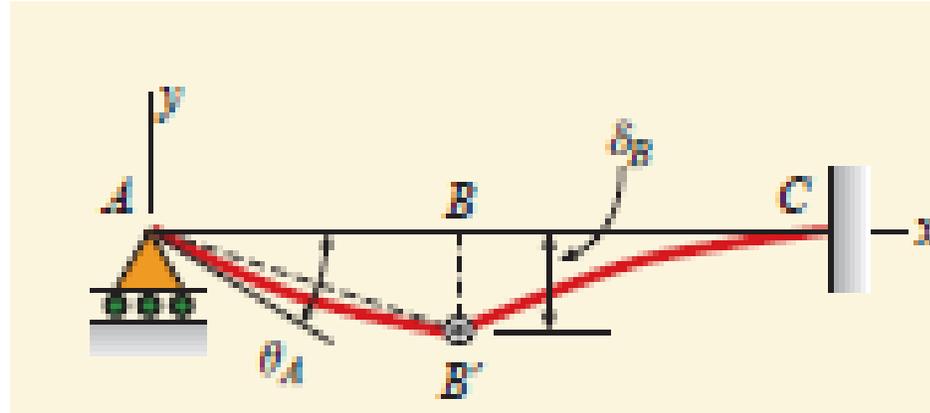
- Deflexión o flecha en B

- Giro en A

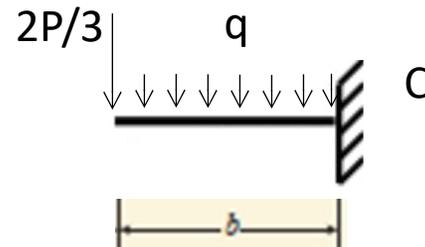
Ejemplo de giros y deflexiones



Ejemplo de giros y deflexiones



- Flecha en B

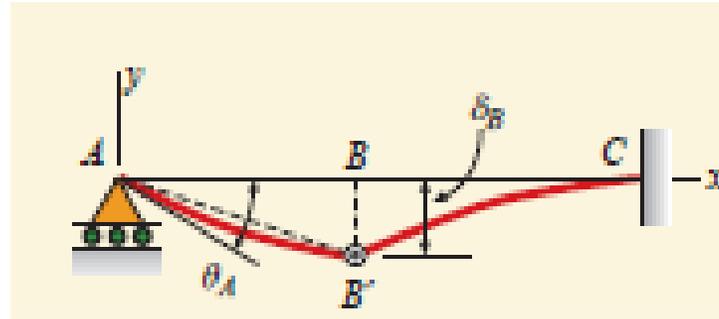
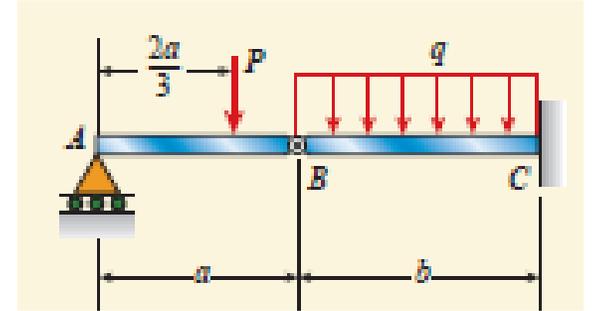


$$v(L) = \frac{q * L^4}{8EI}$$

$$v(L) = \frac{P * L^3}{3EI}$$

$$\delta_B = \frac{qb^4}{8EI} + \frac{2Pb^3}{9EI}$$

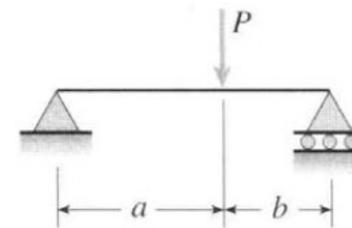
Ejemplo de giros y deflexiones



$$\delta_B = \frac{qb^4}{8EI} + \frac{2Pb^3}{9EI}$$

$$(\theta_A)_1 = \frac{qb^4}{8aEI} + \frac{2Pb^3}{9aEI}$$

$$(\theta_A)_2 = \frac{P\left(\frac{2a}{3}\right)\left(\frac{a}{3}\right)\left(a + \frac{a}{3}\right)}{6aEI} = \frac{4Pa^2}{81EI}$$



$$\theta_A = \frac{Pab(L + b)}{6LEI}$$

$$\theta_A = (\theta_A)_1 + (\theta_A)_2 = \frac{qb^4}{8aEI} + \frac{2Pb^3}{9aEI} + \frac{4Pa^2}{81EI}$$

Deflexiones (“Elástica”) de la viga

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E.I}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2}$$

Ecuación diferencial de la curva de deflexión (o ecuación de la elástica):

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

Si conocemos la expresión de **M/EI** para todo x de la viga, podremos **integrar dos** veces la ecuación de la elástica, obteniendo una expresión de **v** con dos constantes de integración (C1 y C2).

En la práctica no haremos la integración analítica, salvo que sea estrictamente necesario.

Se disponen de varios métodos alternativos, de los cuales, en el curso veremos dos en detalle:

- **Método de superposición**
- **Viga análoga**

Viga análoga (Analogía de Mohr)

**Teorema Fundamental
de Vigas:**

$$-q = \frac{dV}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} \quad \longleftrightarrow$$

**Ecuación de
la elástica:**

$$\frac{M}{EI} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2}$$

Las ecuaciones diferenciales de la curva de deflexión son análogas a las ecuaciones fundamentales de la viga, en el sentido en que en ambas aparecen tres términos, ($\mathbf{M/EI}$, θ , y) y (\mathbf{q} , \mathbf{V} , \mathbf{M}) respectivamente, relacionados mediante la primera y segunda derivada.

“viga análoga”

$$\frac{M}{EI} \longleftrightarrow -\bar{q} \quad \theta \longleftrightarrow \bar{V} \quad y \longleftrightarrow \bar{M}$$

El método consiste en crear una viga que es cargada con una carga análoga \mathbf{q} , equivalente a los valores de $\mathbf{M/EI}$ de nuestra viga real, y con condiciones de borde en \mathbf{V} y \mathbf{M} , que reflejen las condiciones de borde de θ y \mathbf{v} de la viga real.

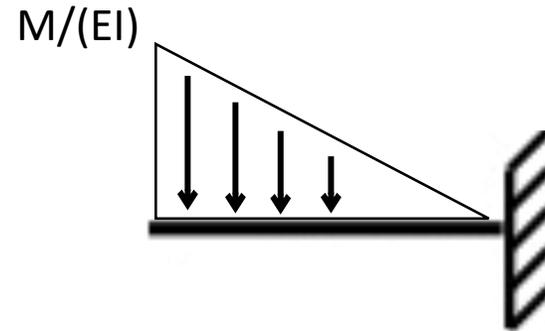
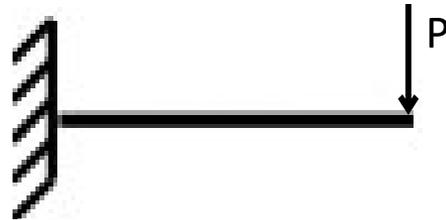
$$\frac{M}{EI} \leftrightarrow -\bar{q}$$

$$\theta \leftrightarrow \bar{V}$$

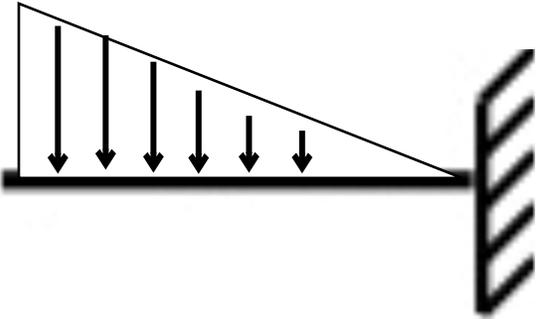
$$v \leftrightarrow \bar{M}$$

Viga real		Viga conjugada	
θ $\Delta = 0$	 Apoyo fijo	V $M = 0$	 Apoyo fijo
θ $\Delta = 0$	 Apoyo deslizante	V $M = 0$	 Apoyo deslizante
$\theta = 0$ $\Delta = 0$	 Empotramiento	$V = 0$ $M = 0$	 Libre
θ Δ	 Libre	V M	 Empotramiento
θ $\Delta = 0$	 Apoyo fijo	V $M = 0$	 Articulación
θ $\Delta = 0$	 Apoyo deslizante	V $M = 0$	 Articulación
θ Δ	 Articulación	V M	 Apoyo deslizante

Ejemplo



Viga Análoga



$\theta = V^*$



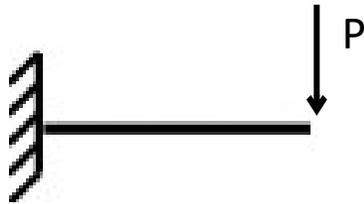
$v = M^*$



Viga Original



Viga Original



Viga Análoga

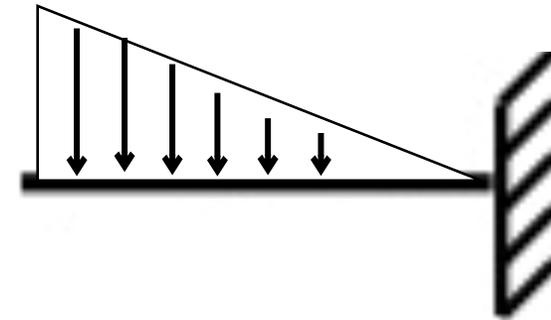
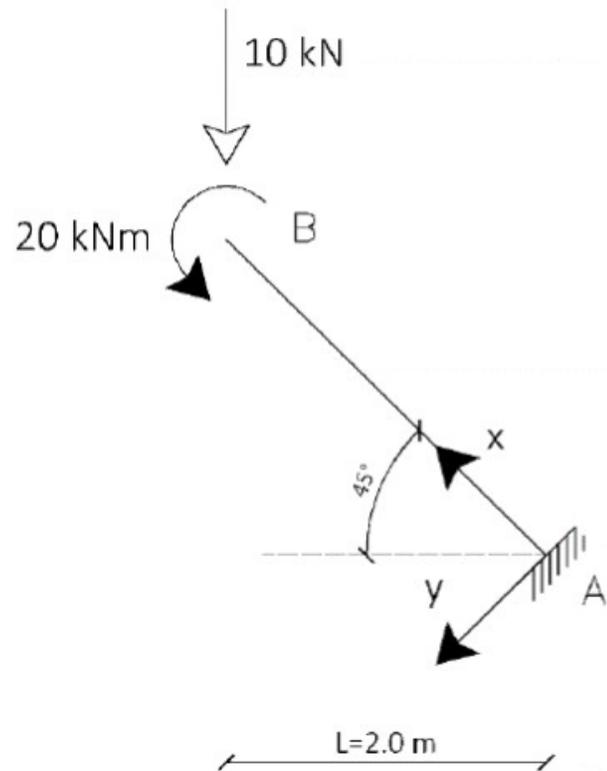


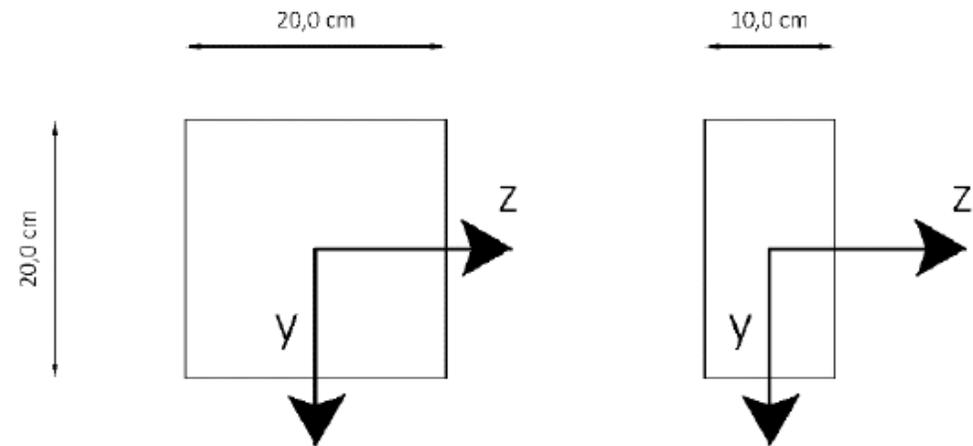
TABLE G-1 DEFLECTIONS AND SLOPES OF CANTILEVER BEAMS

	<p>v = deflection in the y direction $v' = dv/dx$ = slope of the deflection curve $\delta_B = -v(L)$ = deflection at end B of the beam $\theta_B = -v'(L)$ = angle of rotation at end B of the beam EI = constant</p>
	$v = -\frac{qx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2) \quad v' = -\frac{qx}{6EI}(3L^2 - 3Lx + x^2)$ $\delta_B = \frac{qL^4}{8EI} \quad \theta_B = \frac{qL^3}{6EI}$
	$v = -\frac{Px^2}{6EI}(3L - x) \quad v' = -\frac{Px}{2EI}(2L - x)$ $\delta_B = \frac{PL^3}{3EI} \quad \theta_B = \frac{PL^2}{2EI}$

Examen Dic. 2018



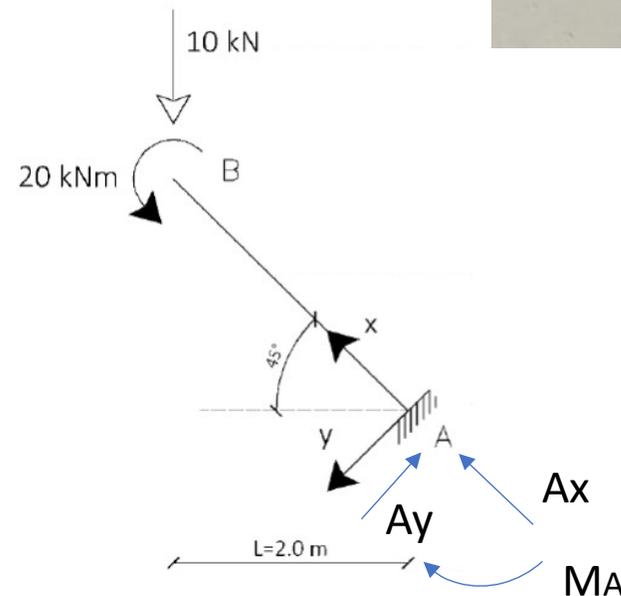
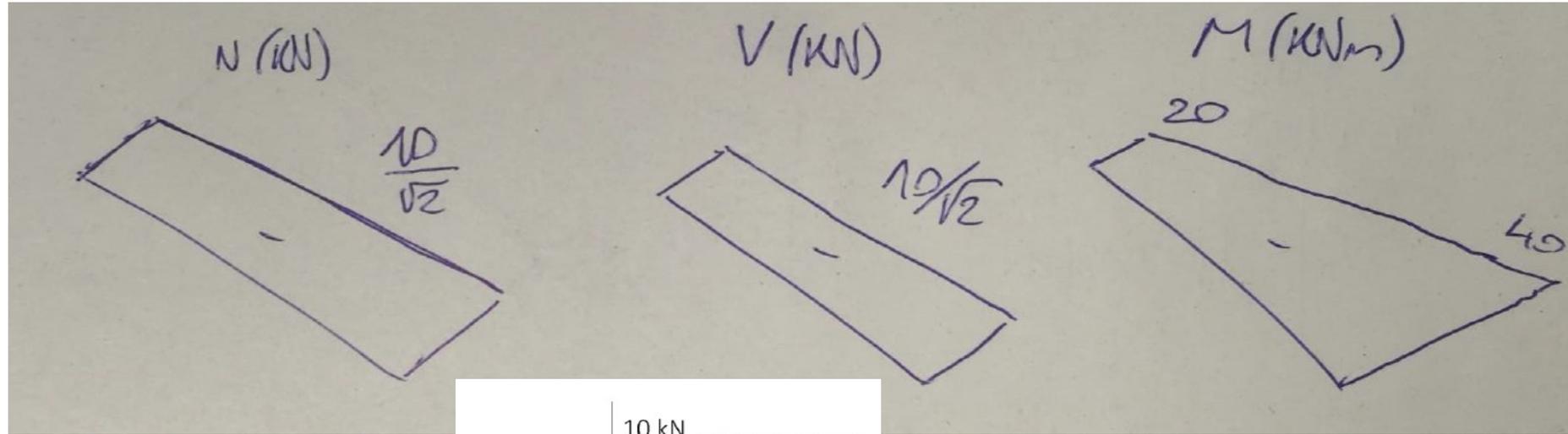
- Trazar diagramas de solicitaciones de la estructura.
- Hallar las expresiones analíticas para $A(x)$ e $I_z(x)$, área e inercia respectivamente.
- Encontrar el desplazamiento del punto B. (No se desprecia la deformación por directa).
- ¿Cómo resultan relativamente los desplazamientos según x e y ? ¿A que conclusión se puede llegar a partir del resultado hallado en la parte c)?



$$b(A) = 20 \text{ cm} \vee b(B) = 10 \text{ cm}$$

Puede ser útil recordar: $\int \frac{1}{a-bx} = -\frac{\text{Ln}(a-bx)}{b} + C$

Diagramas



$$A_x = 10 \cdot 0.707$$

$$A_y = 10 \cdot 0.707$$

$$M_A = 20 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

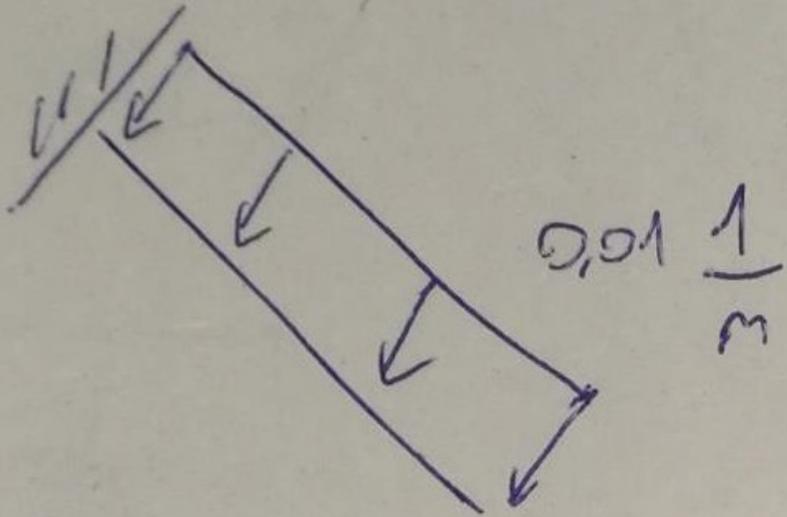
Area e Inercia

$$b(x) = 0,20 - \frac{0,10}{2\sqrt{2}} \cdot x$$
$$h(x) = 0,20$$

Hallar ec. de la recta que determina la base del rectangulo. $b(0)=0.2$ m, $b(L)=0.1$ m

$$A(x) = 0,20 \left(0,20 - \frac{0,10}{2\sqrt{2}} x \right)$$
$$I(x) = \frac{0,20^3}{12} \left(0,20 - \frac{0,10}{2\sqrt{2}} x \right)$$

Flecha en B por flexión



$$\delta_y(B) = 0,01 \frac{1}{m} \cdot \frac{(2\sqrt{2})^2}{2}$$

$$\delta_y(B) = 0,04 \text{ m}$$

Deformacion por directa (sentido x)

$$u(B) = u(x=2\sqrt{2}) = \int_0^{2\sqrt{2}} \varepsilon(x) dx = \frac{10 \text{ kN}}{\sqrt{2} E} \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{1}{0,2 \left(0,2 - \frac{0,1x}{2\sqrt{2}}\right)} dx$$

$$u(B) = \int_x(B) = -2,31 \times 10^{-5} \text{ m}$$