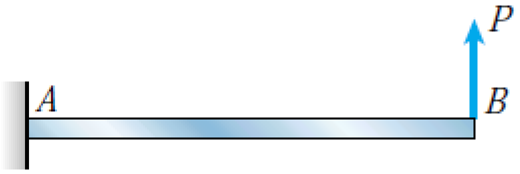
DEFLEXIONES Y DESPLAZAMIENTOS

Deformaciones producidas por flexión

Hipótesis:
-La **viga** está **contenida en un plano *xy***, y su **sección** es **simétrica respecto a dicho plano**.
-Además, **las fuerzas** sobre la viga actúan con sus vectores en el **plano *xy***, y los **momentos** en dirección **perpendicular a dicho plano**.

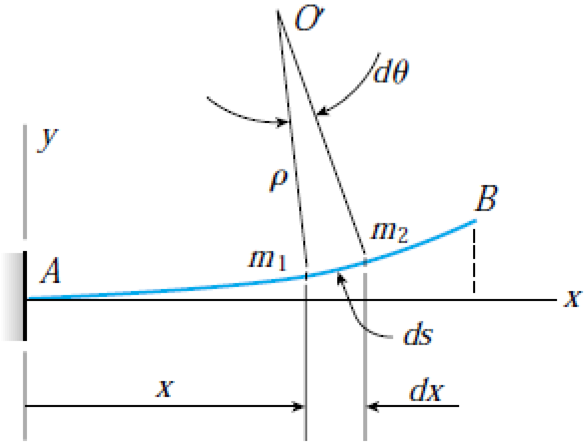
Si consideramos una viga originalmente recta, luego de aplicada la carga, el eje se deformará en una curva, que llamaremos ***deformada*** (o ***elástica***) de la viga.

=> Aceptaremos que bajo las hipótesis dadas, **la viga se deformará en el plano *xy***.



(a)

<u>Convención de signos:</u>
Para ***x*** hacia la derecha e ***y*** hacia arriba, **κ** es **positivo** con la **concavidad hacia arriba**.



$$\rho \, d\theta = ds$$

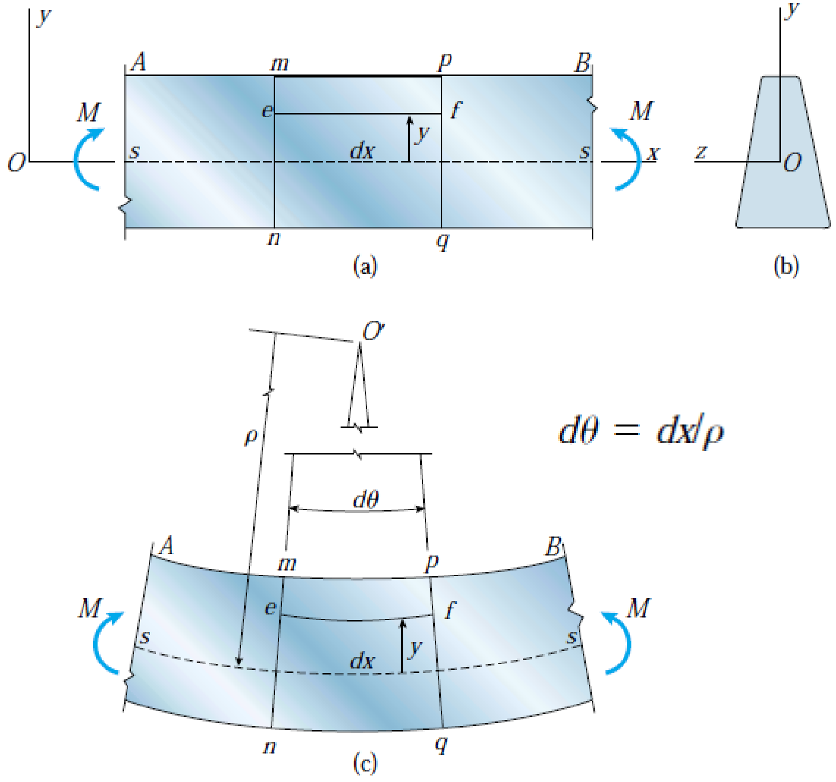
$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$$

***O'*:**	***Centro de curvatura*.**
***m_1O'=ρ*:**	***Radio de curvatura*.**
***κ=1/ ρ* :**	***Curvatura***
v(x)	***perp. al eje (X)***

Relación "Ɛ – ρ" en flexión pura

El **primer paso** es determinar la **relación entre el radio de curvatura** (***ρ***) **y** las **deformaciones unitarias** (***ε***) en una sección de viga.



$$d\theta = dx/\rho$$

Hipótesis de Navier-Bernoulli: Las **secciones transversales normales al eje de la viga** indeformada **permanecen planas y normales al eje después de producirse las deformaciones** producidas **por flexión pura**.

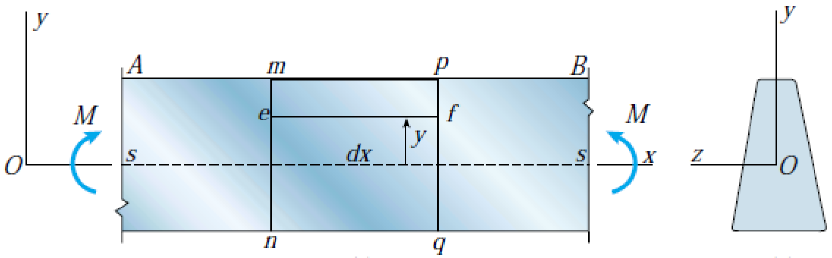
El origen de coordenadas (***O***) es genérico. Es decir, en principio no sabemos la posición del eje neutro.

Relación "ε – ρ" en flexión pura

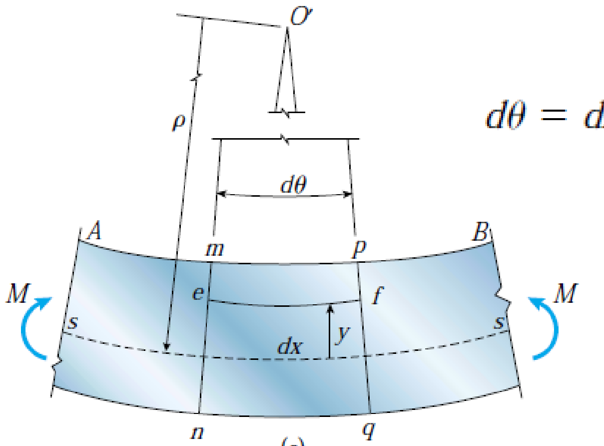
En una viga sometida a **flexión pura** analizaremos la **relación entre** el **momento aplicado**, las **tensiones** que este produce, y la **curvatura** de la viga. Posteriormente veremos que esta relación se puede utilizar en los casos de flexión simple y flexión compuesta.

El **primer paso** es determinar la **relación entre el radio de curvatura** (***ρ***) **y** las **deformaciones unitarias** (***ε***) en una sección de viga.

Hipótesis de Navier-Bernoulli: Las **secciones transversales normales al eje de la viga** indeformada **permanecen planas y normales al eje después de producirse las deformaciones** producidas **por flexión pura**.



(a) (b)



(c)

$$d\theta = dx/\rho$$

El origen de coordenadas (***O***) es genérico. Es decir, en principio no sabemos la posición del eje neutro.

Para obtener esta relación, sólo intervinieron propiedades de la geometría de la viga, y la hipótesis de Navier.

Segmento e- f

$$L_1 = (\rho - y) * d\theta = (\rho - y) * dx / \rho$$

$$\varepsilon = \frac{L_1 - L}{L} = \frac{dx - y/\rho * dx - dx}{dx} = -\frac{y}{\rho}$$

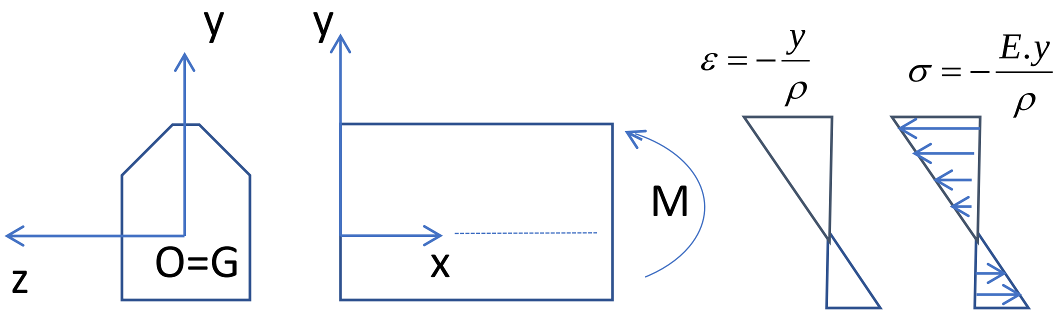
$$\boxed{\varepsilon = -\frac{y}{\rho}}$$

Relación "σ – ρ" en flexión pura

1) Conocida la distribución de deformaciones en una viga (ε=-y/R), para conocer como serán los esfuerzos, es necesario utilizar la relación tensión-deformación del material:

Ley de Hooke: $\sigma = E.\varepsilon$

$$\boxed{\sigma = -\frac{E.y}{\rho}}$$

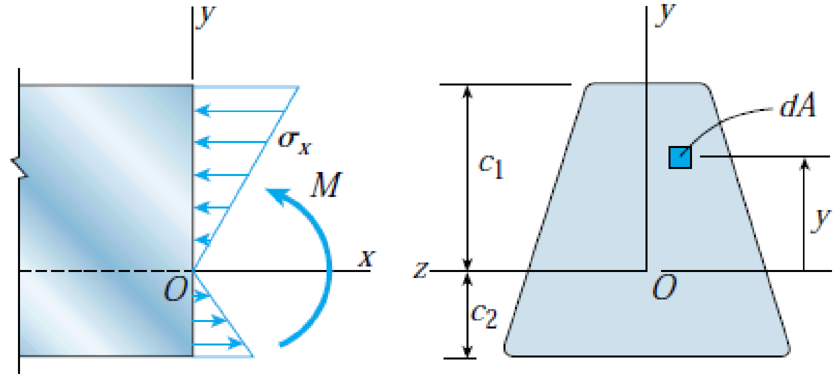


Directa resultante de las ***σ*** en la sección:

$$N = \int_{\Omega} \sigma * d\Omega = -\int_{\Omega} \frac{E.y}{\rho} d\Omega$$

$$N = -\frac{E}{\rho} \int_{\Omega} y d\Omega$$

Flexión pura: N=0



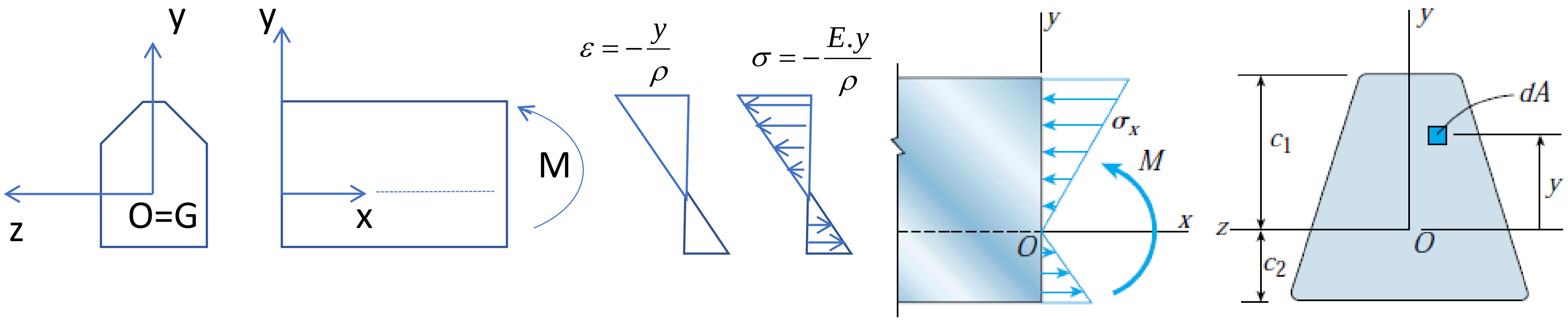
(a) (b)

$$m_O = \int_A y dA$$

Momento estático (o ***de primer orden***) de la sección, con respecto a O.

Relación “σ – ρ” en flexión pura

2) Conociendo la distribución de tensiones, podemos calcular las solicitaciones que éstas producen, e igualarlas con las existentes en la viga. Como suponemos la viga en flexión pura, ésta esta sometida a un Momento (M) y la fuerza normal es nula (N=0)



$$M = -\int_A \sigma_x . y . dA \qquad M = -\int_A E.\varepsilon . y . dA \qquad \varepsilon = -\frac{y}{\rho}$$

“Inercia de la sección”

$$I = \int_A y^2 dA$$

$$M = -\int_A E.(-y/\rho).y.dA = E/\rho \int_A y^2 dA$$

Momento de inercia (o ***Momento de segundo orden***) de la sección.

$$\boxed{\frac{M}{E.I} = 1/\rho} \Rightarrow \varepsilon = -\frac{y}{\rho} = \frac{\sigma}{E} = -y.\left(\frac{M}{EI}\right) \Rightarrow \boxed{\sigma = -\frac{M.y}{I}}$$

Esfuerzos máximos por flexión pura

Analizando la formula de la flexión, se observa que las tensiones máximas de tracción y compresión ocurren en los puntos más alejados de la fibra neutra (baricentro).

$$\sigma = -\frac{M.y}{I}$$

Llamamos ***y^s*** e ***y^i*** a la distancia desde el eje neutro a los puntos de la sección, superior e inferior respectivamente, más alejados del eje neutro.

Dado que los |***y***| e ***I*** son siempre positivos, los ***W*** también lo serán.

Por lo que, en forma simplificada (obviando el signo), podemos decir:

En base a estas distancias podemos definir:

$$W^S = \frac{I}{|y^S|} \qquad W^i = \frac{I}{|y^i|}$$

W^i y ***W^s***: ***Módulos resistentes*** de la sección.

Esta cantidad reúne las propiedades de la sección que intervienen en el cálculo de las tensiones máximas. Por ello suele tabularse para facilitar la tarea de diseño.

Normalmente, aparece sólo un ***W*** tabulado, utilizando el $y_{max} = \max(y^s, y^i)$:

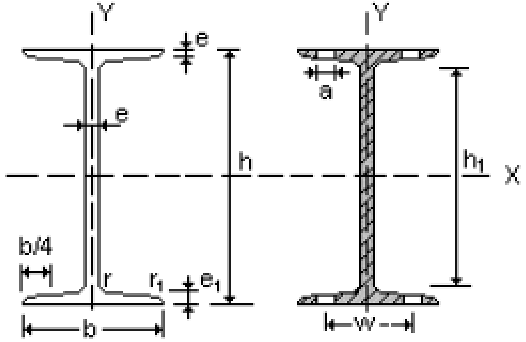
$$W = \frac{I}{|y_{\max}|}$$

Además, en caso que $y = y^s = y^i$ se tendrá un solo $W = W^i = W^s$

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W}$$

Estudiando posteriormente por análisis de los momentos el signo de la tensión.

Secciones normalizadas

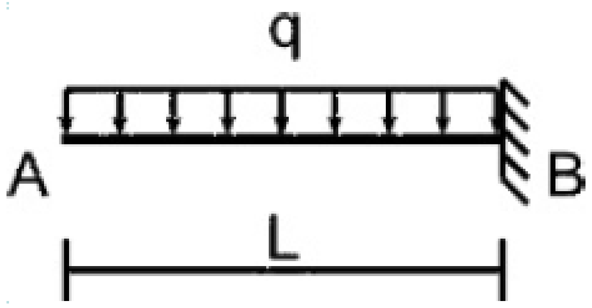


A = Area de la sección
S_x = Momento estático de media sección, respecto a X.
I_x = Momento de inercia de la sección, respecto a X.
$W_x = 2I_x : h$. Módulo resistente de la sección, respecto a X.
$i_x = (I_x : A)^{1/2}$. Radio de giro de la sección, respecto a X
I_y = Momento de inercia de la sección, respecto a Y.
$W_y = 2I_y : b$. Módulo resistente de la sección, respecto a Y.
$i_y = (I_y : A)^{1/2}$. Radio de giro de la sección, respecto a Y
I_t = Módulo de torsión de la sección.
I_a = Módulo de alabeo de la sección.
u = Perímetro de la sección.
a = Diámetro del agujero del roblón normal.
w = Gramil, distancia entre ejes de agujeros.
h_1 = Altura de la parte plana del alma.
e_2 =Espesor del ala en el eje del agujero.
p = Peso por metro.

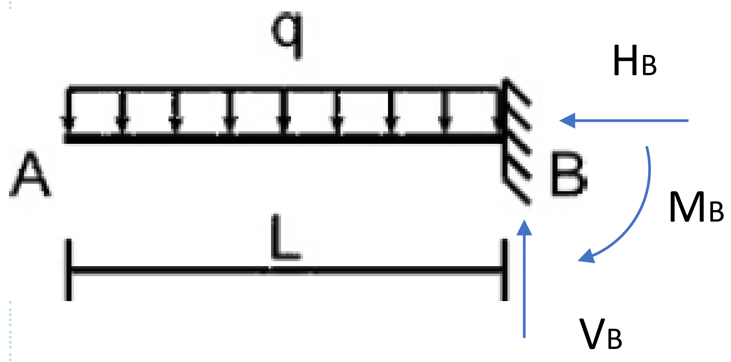
$$I = \int_A y^2 dA$$

Perfil	Dimensiones							Términos de sección							
	h mm	b mm	e = r mm	e_1 mm	r_1 mm	h_1 mm	u mm	A cm^2	S_x cm^3	I_x cm^4	W_x cm^3	i_x cm	I_y cm^4	W_y cm^3	i_y cm
IPN 80	80	42	3,9	5,9	2,3	59	304	7,58	11,4	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91
IPN 100	100	50	4,5	6,8	2,7	75	370	10,6	19,9	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07
IPN 120	120	58	5,1	7,7	3,1	92	439	14,2	31,8	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23
IPN 140	140	66	5,7	8,6	3,4	109	502	18,3	47,7	573	81,9	5,61	35,2	10,7	1,40
IPN 160	160	74	6,3	9,5	3,8	125	575	22,8	68,0	935	117	6,40	54,7	14,8	1,55
IPN 180	180	82	6,9	10,4	4,1	142	640	27,9	93,4	1450	161	7,20	81,3	19,8	1,71
IPN 200	200	90	7,5	11,3	4,5	159	709	33,5	125	2140	214	8,00	117	26,0	1,87
IPN 220	220	98	8,1	12,2	4,9	175	775	39,6	162	3060	278	8,80	162	33,1	2,02
IPN 240	240	106	8,7	13,1	5,2	192	844	46,1	206	4250	354	9,59	221	41,7	2,20
IPN 260	260	113	9,4	14,1	5,6	208	906	53,4	257	5740	442	10,4	288	51,0	2,32
IPN 280	280	119	10,1	15,2	6,1	225	966	61,1	316	7590	542	11,1	364	61,2	2,45

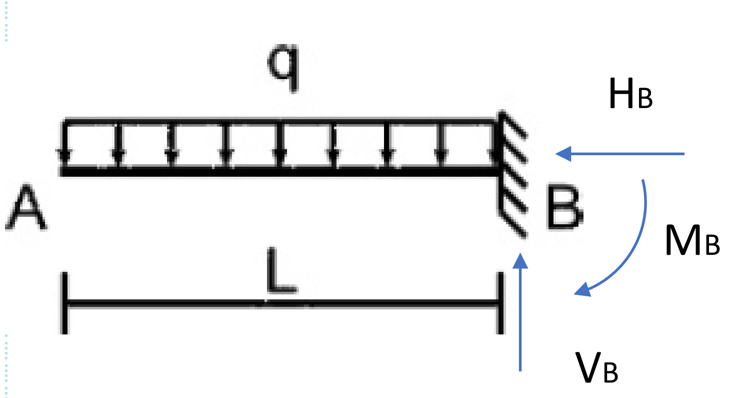
Ejemplo: dimensionar con un IPN



q= 10 kN/m
L= 1 m



Ejemplo: Equilibrio



$q = 10$ kN/m
$L = 1$ m

Suma (FV)=0

V_B -10 kN/m .1 m =0 → V_B = 10 kN

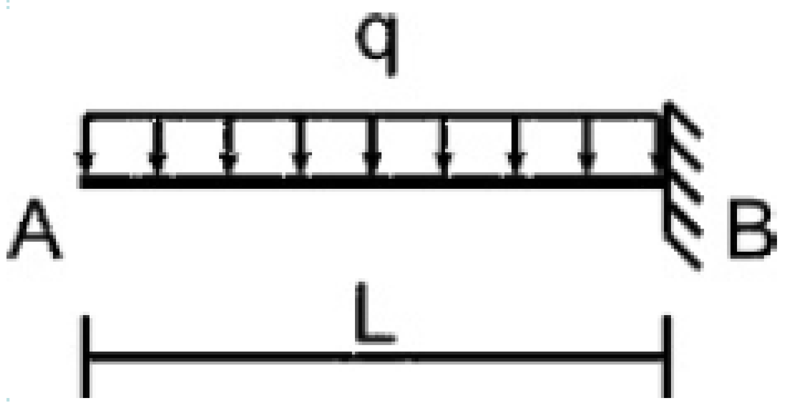
Suma (MB) =0

M_B-0.5 m . 10 kN = 0

M_B= 5 kN.m

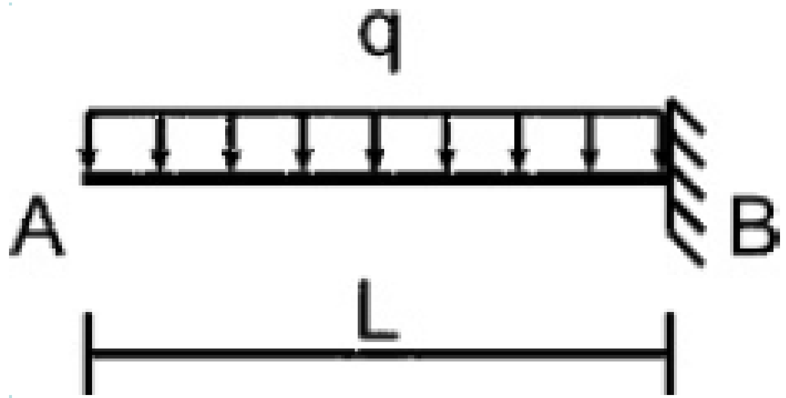
Cortante

$q = -\, dV/dx$

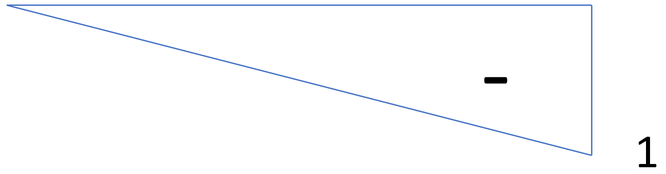


V(kN)

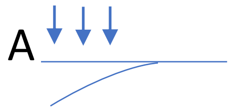
Momento



V(kN)



M(kN.m)



$\boxed{V = dM/dx}$

Dimensionado

- Mmax = 5 kN.m
- σ adm = 140 MPa
- σ adm $\geq$ Mmax/W
- W $\geq$ Mmax/ σ adm
- W $\geq$ 5000 N.m/140 x 10^6 N/m^2
- W $\geq$ 3.571 x 10^{-5} m^3
- W $\geq$ 3.571 x 10 cm^3

Dimensionado

W$\geq$ 3.571 x 10 cm^3

IPN 120

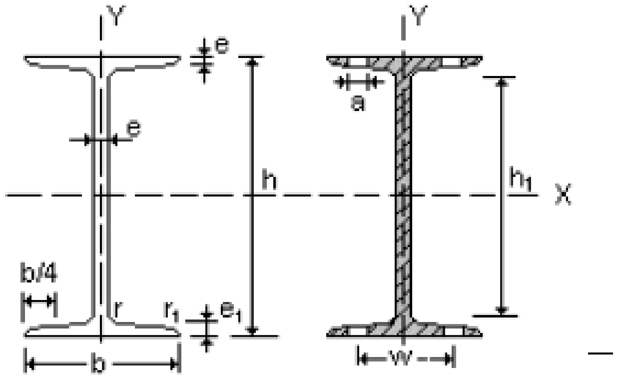
σ max = 5 kN.m/54.7 cm^3

σ max = 91.4 MPa

IPN 100

σ max = 5 kN.m/34.2 cm^3

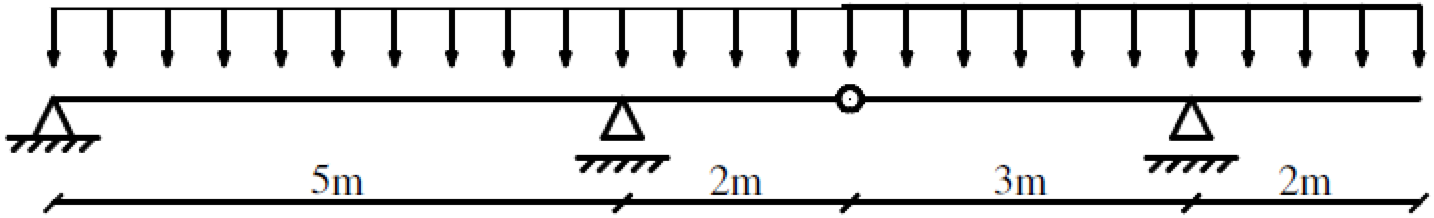
σ max = 146.2 MPa

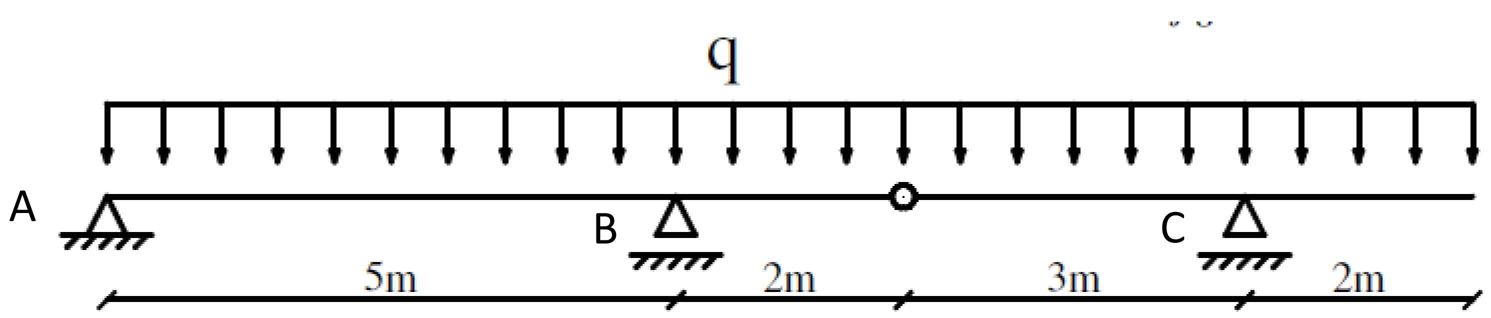


Perfil	Dimensiones							Términos de sección							
	h mm	b mm	e = r mm	e_1 mm	r_1 mm	h_1 mm	u mm	A cm^2	S_x cm^3	I_x cm^4	W_x cm^3	i_x cm	I_y cm^4	W_y cm^3	i_y cm
IPN 80	80	42	3,9	5,9	2,3	59	304	7,58	11,4	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91
IPN 100	100	50	4,5	6,8	2,7	75	370	10,6	19,9	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07
IPN 120	120	58	5,1	7,7	3,1	92	439	14,2	31,8	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23
IPN 140	140	66	5,7	8,6	3,4	109	502	18,3	47,7	573	81,9	5,61	35,2	10,7	1,40
IPN 160	160	74	6,3	9,5	3,8	125	575	22,8	68,0	935	117	6,40	54,7	14,8	1,55
IPN 180	180	82	6,9	10,4	4,1	142	640	27,9	93,4	1450	161	7,20	81,3	19,8	1,71
IPN 200	200	90	7,5	11,3	4,5	159	709	33,5	125	2140	214	8,00	117	26,0	1,87
IPN 220	220	98	8,1	12,2	4,9	175	775	39,6	162	3060	278	8,80	162	33,1	2,02
IPN 240	240	106	8,7	13,1	5,2	192	844	46,1	206	4250	354	9,59	221	41,7	2,20
IPN 260	260	113	9,4	14,1	5,6	208	906	53,4	257	5740	442	10,4	288	51,0	2,32
IPN 280	280	119	10,1	15,2	6,1	225	966	61,1	316	7590	542	11,1	364	61,2	2,45

Ejemplo

La viga de la *figura* está formada por un ***PNI* 22**.
Hallar el valor de la carga admisible **q**, suponiendo que la viga está construida con un metal de $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{adm}} =$ 140 MPa





Asumiendo q=1 kN/m

$R_A+R_B+R_C= 12$

Suma Mder_art=0

$5*2.5-3*R_C=0$
$R_C=12.5/3$ kN

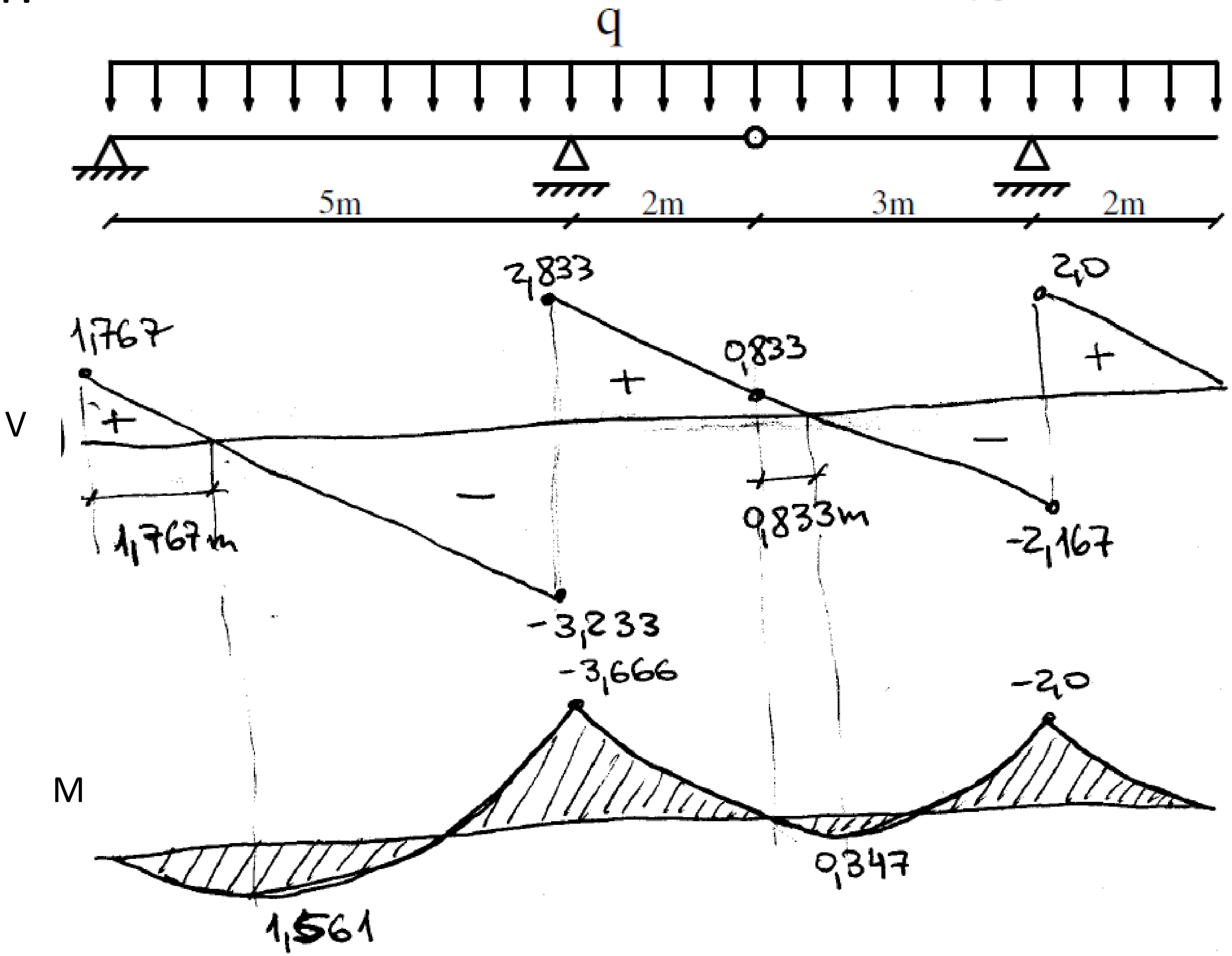
Suma Mizq_art=0

$2*R_B+7*R_A- 7*3.5=0$

$R_A= 1.767$ kN

$R_B = 6.066$ kN

Diagramas


q
5m
2m
3m
2m
1,767
2,833
0,833
2,0
V
+
+
+
−
−
1,767m
0,833m
−3,233
−2,167
−3,666
−2,0
M
0,347
1,561

q admisible

$W_x = 278\ cm^3$ sale de Tablas

Mmax= -3.666.q

σ> Mmax/Wx

140 *10^6 >3.666*q/278

q< 140*10^6*278/10^6/3.666

q< 10.6 kN/m

A la misma viga se le piensa aumentar su carga de servicio a 18 kN/m . Para ello se la reforzará soldando dos **placas metálicas** del mismo material de espesor **1,5 cm** como se muestra en la ***figura 1***.
Hallar el ancho ***d*** necesario de las **placas** metálicas.

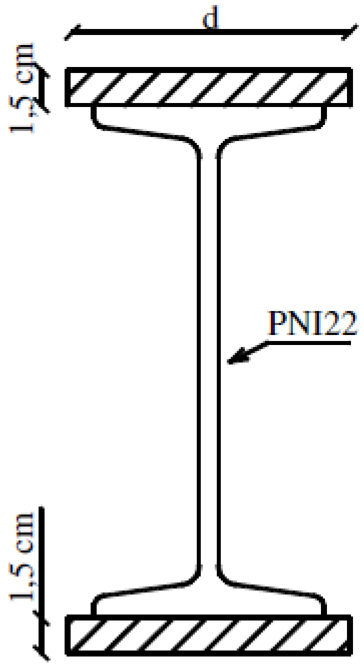


figura 1

Módulo Resistente

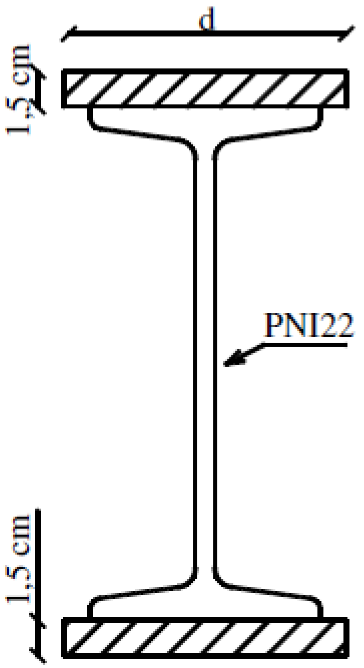


figura 1

PNI 22

I_{xPNI22}= 3060 cm^4

I_x= 3060 + 2*[(d*1.5^3)/12+d*1.5*(11+1.5/2)^2]

I_x= 3060 cm^4 +2*d*207.375 cm^3

$W_x=I_x/y$

W_x = (3060+2*d*207.4)/12.5

Espesor d

q= 18 kN/m

σ≥Mmax/Wx

140 MPa≥ Mmax/(3060+2*d*207.4)/12.5

140 MPa≥ 3.7*18/(3060+2*d*207.4)/12.5

140≥ 3.7*18/(244.8+33.2d)

d> 6.8 cm