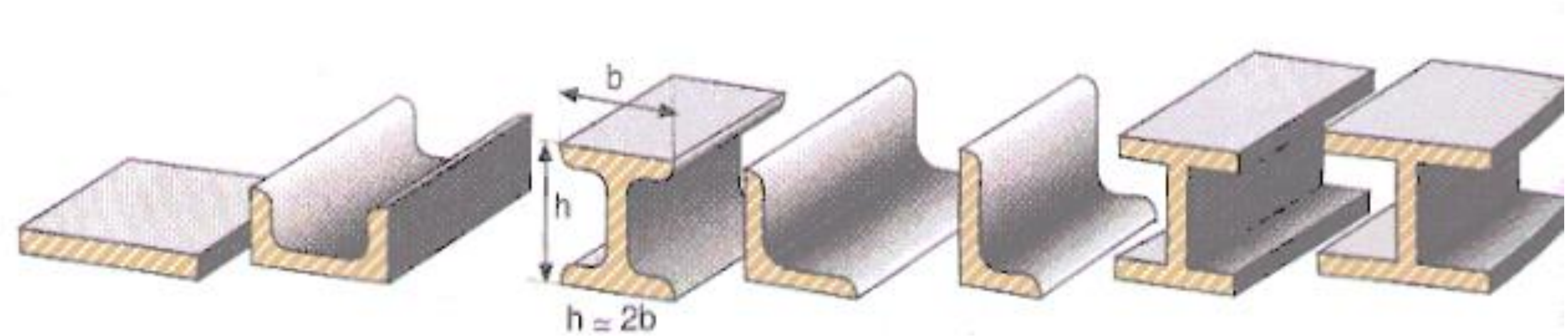
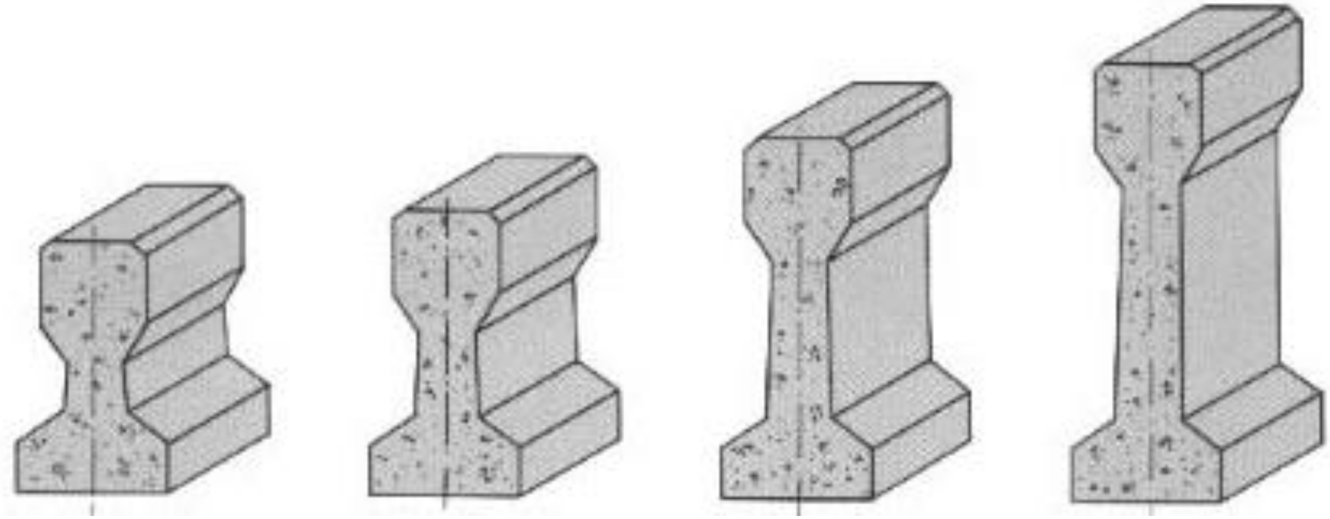
Características de las Secciones

- Introducción
- Características Geométricas
  - Momento de primer orden (o estático)
  - Baricentro
  - Momento de segundo orden (o de inercia)
- Traslación de ejes (Steiner)
- Rotación de ejes
  - Círculo de Mohr

Perfiles Normalizados



Perfiles de hormigón



Características Geométricas

- Momento de primer orden o Estático

$$A = \int_A dA$$

Área de la sección.

$$\mu_x = \int_A y dA$$

Momento de Primer orden de la sección con respecto a x.

$$\mu_y = \int_A x dA$$

Momento de Primer orden de la sección con respecto a y.

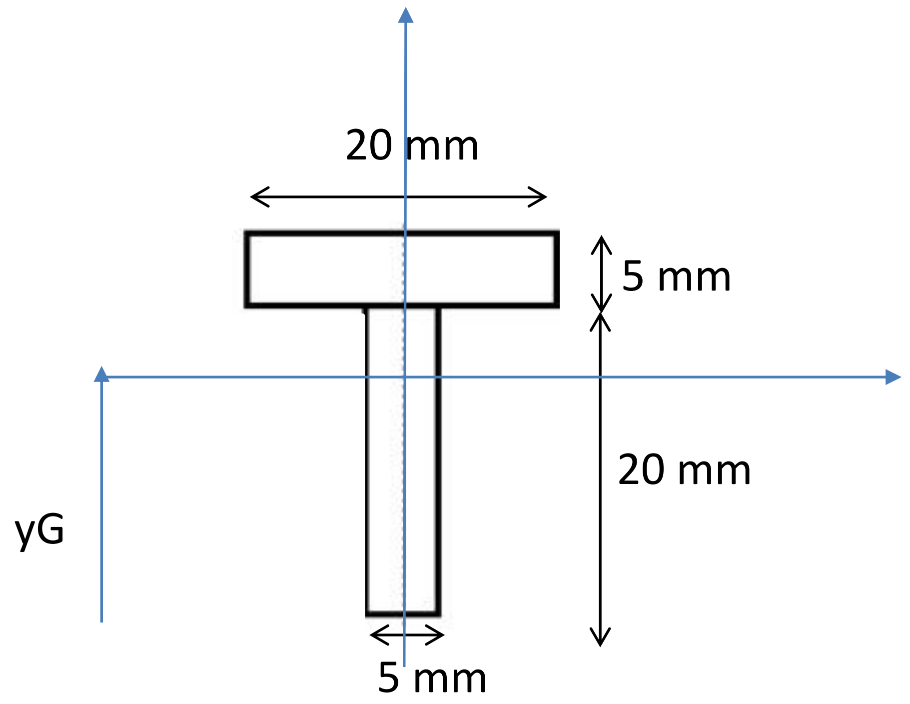
Baricentro

$$x_G = \mu_y / A = \int_A x dA \Big/ \int_A dA$$

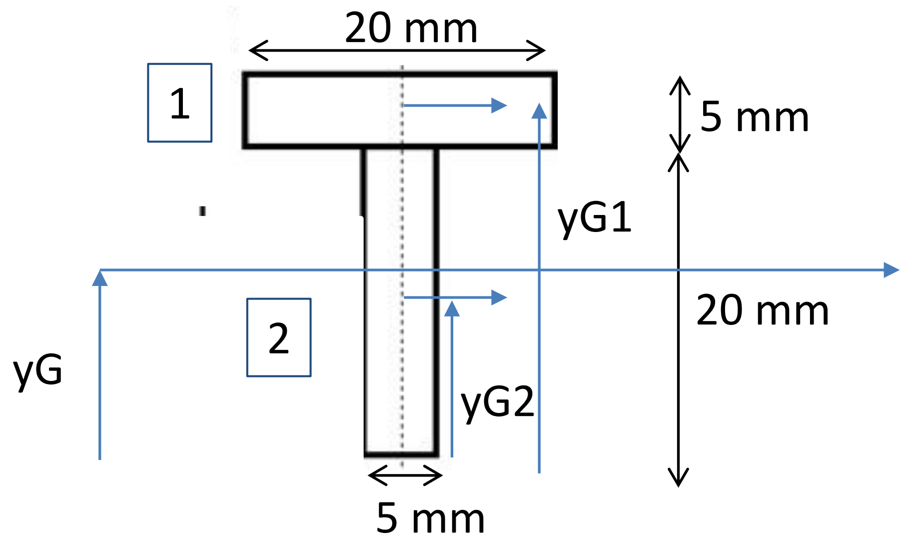
$$y_G = \mu_x / A = \int_A y dA \Big/ \int_A dA$$

La posición del baricentro (X_G,Y_G) es independiente de los ejes que se elijan.
Por el baricentro pasan los ejes de simetría.

Ejemplo



Ejemplo

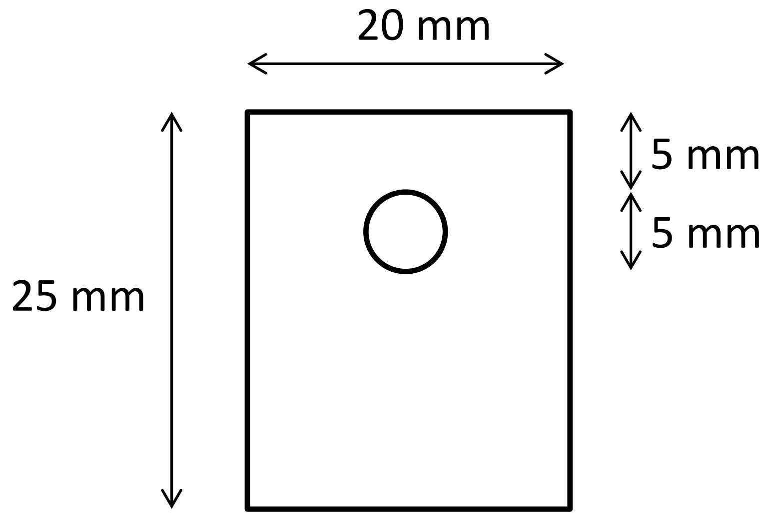


yG. AT= yG1. A1 + yG2.A2

→

$$yG. = \frac{yG1.\ A1 + yG2.A2}{AT}$$

Ejemplo

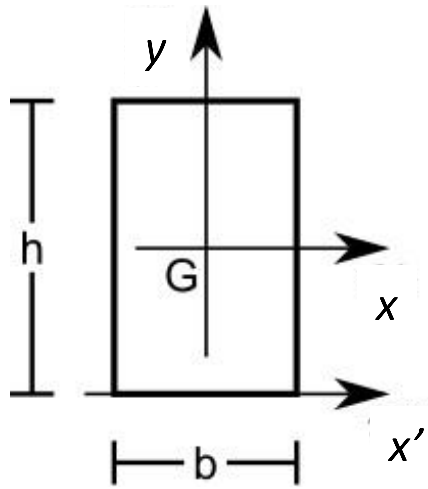


Momento de Inercia o de segundo orden

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

Ejemplo

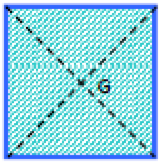


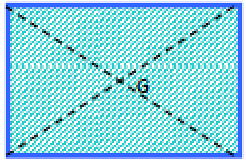
$$I_{x'} = \int_A y^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^h y^2 dA = \frac{b.h^3}{3}$$

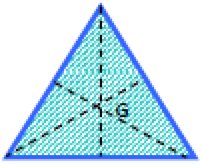
$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} dx \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = \frac{b.\left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}\right)}{3} = \frac{b.h^3}{12}$$

Baricentro

$$A = \int_A dA$$







$$\mu_x = \int_A y dA \qquad \mu_y = \int_A x dA$$

$$y_G = \mu_x / A = \int_A y dA \Big/ \int_A dA$$

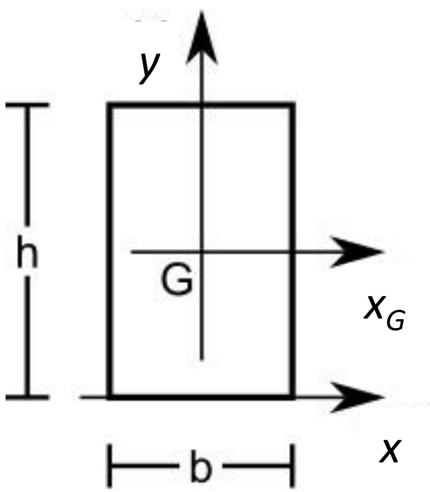
$$y_G = \frac{\sum_i y_{Gi} A_i}{\sum_i A_i}$$

$$x_G = \mu_y / A = \int_A x dA \Big/ \int_A dA$$

$$x_G = \frac{\sum_i x_{Gi} A_i}{\sum_i A_i}$$

Teorema de Steiner

- Teorema de ejes paralelos, uno de los ejes tiene que ser un eje baricéntrico.



$y = y_G + d_y$

$$Ix = \int_A y^2 dA$$

$$Ix = \int_A (y_G + d_y)^2 dA$$

$$Ix = \int_A y_G^2 \; dA + \int_A (d_y^2) \; dA$$

$$I_x = I_{x_G} + A.d_y^2$$

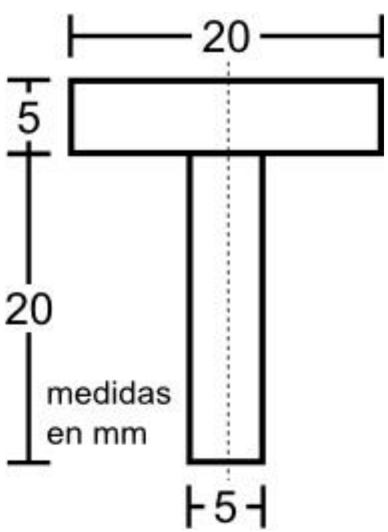
$\int_A 2(y_G \, . \, d_y) \; dA = 0$

Por ser X_G baricéntrico

Ejemplo

- Momento de Inercia de un área compuesta

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{A_1} y^2 dA + \int_{A_2} y^2 dA = I_{x,1} + I_{x,2}$$



$$I_x = \sum_i I_{x,i}$$

Hallar el momento de inercia con respecto a un eje centroidal y horizontal.

Bi-momento de Inercia

El ***producto de inercia*** (o ***bi-momento de inercia***) se define respecto a un par de ejes ortogonales ***x*** e ***y*** como:

$$I_{xy} = \int_A xy\,dA$$

A diferencia del momento de inercia, que es un valor siempre positivo, el producto de inercia puede ser positivo, negativo, o nulo. Esto depende de la posición del área respecto a los ejes.

$$I_{xy} = I_{x_G y_G} + A.d_x.d_y$$

Resumen

$$x_G = \mu_y / A = \int_A x dA \Big/ \int_A dA$$

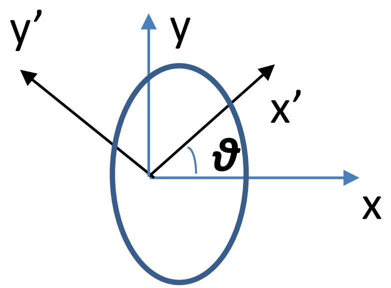
$$y_G = \mu_x / A = \int_A y dA \Big/ \int_A dA$$

$$I_x = I_{x_G} + A.d_y^2$$

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$

Giro de Ejes

Hallaremos las expresiones de las inercias (**I_{x1}, I_{y1}, I_{x1y1}**) para unos **ejes (x_1, y_1) con el mismo origen**, pero girados un ángulo $\boldsymbol{\vartheta}$.



$x' = x\cos(\boldsymbol{\vartheta}) + y\sin(\boldsymbol{\vartheta})$ $\qquad$ $y' = y\cos(\boldsymbol{\vartheta}) - x\sin(\boldsymbol{\vartheta})$

$$I_{x'} = \int_A y'^2 dA = \int_A (y\cos(\boldsymbol{\vartheta}) - x\sin(\boldsymbol{\vartheta}))^2 dA$$

$$I_{y'} = \int_A x'^2 dA = \int_A (x\cos(\boldsymbol{\vartheta}) + y\sin(\boldsymbol{\vartheta}))^2 dA$$

$$I_{x'y'} = \int_A x'y' \ dA = \int_A (x\cos(\boldsymbol{\vartheta}) + y\sin(\boldsymbol{\vartheta}))(y\cos(\boldsymbol{\vartheta}) - x\sin(\boldsymbol{\vartheta})) \ dA$$

Giro de Ejes

Hallaremos las expresiones de las inercias (**I_{x1}, I_{y1}, I_{x1y1}**) para unos **ejes (x_1, y_1) con el mismo origen**, pero girados un ángulo $\boldsymbol{\vartheta}$.

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos(2\theta) - I_{xy}\,sen(2\theta)$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos(2\theta) + I_{xy}\,sen(2\theta)$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\,sen(2\theta) + I_{xy}\cos(2\theta)$$

$$2sen(\theta)\cos(\theta) = sen(2\theta) \qquad sen^2(\theta) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\theta)\right) \qquad \cos^2(\theta) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2\theta)\right)$$

Círculo de Mohr

$$I_{x_1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos(2\theta) - I_{xy}sen(2\theta)$$

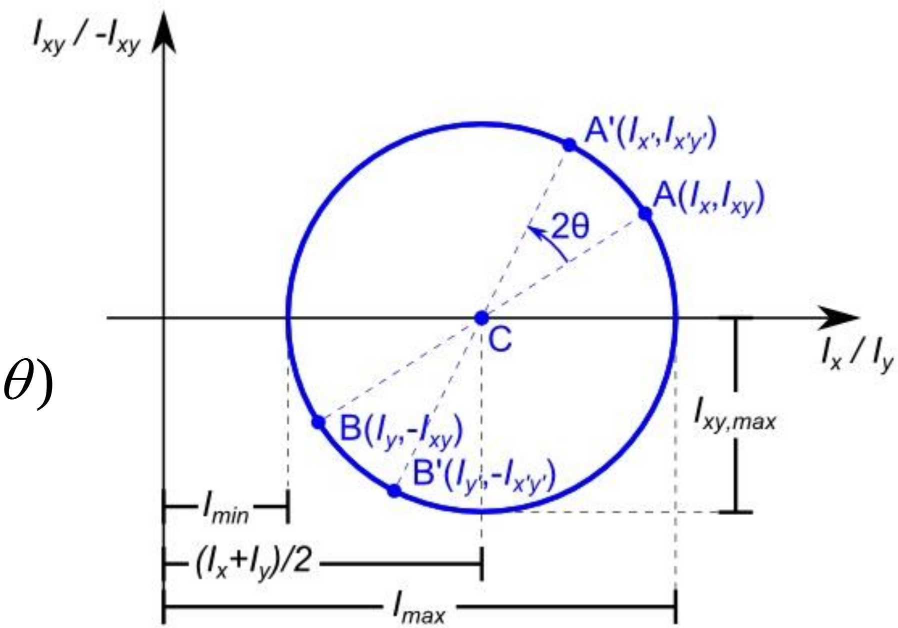
$$I_{y_1} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos(2\theta) + I_{xy}sen(2\theta)$$

$$\Rightarrow \quad I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y$$

$$I_{x_1y_1} = \frac{I_x - I_y}{2}sen(2\theta) + I_{xy}\cos(2\theta)$$

Círculo de Mohr

$$R^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}{}^2$$



$$I_{x_1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos(2\theta) - I_{xy}sen(2\theta)$$

$$I_{y_1} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos(2\theta) + I_{xy}sen(2\theta)$$

$$I_{x_1y_1} = \frac{I_x - I_y}{2}sen(2\theta) + I_{xy}\cos(2\theta)$$

Momentos de Inercia principales

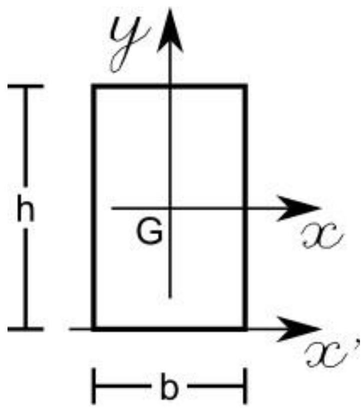
Definición: Los **momentos de inercia principales** serán los **máximos y mínimos** que se obtengan **al variar el ángulo de rotación θ**, siendo los ejes a los que se refieren, los **ejes principales**.

Ejes principales-centroidales: son ejes ppales que se encuentran en el baricentro

Inercia

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$



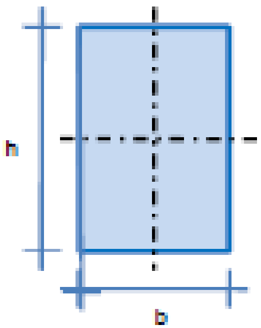
$I_x = bh^3/12$ $I_{x'} = bh^3/3$

$I_y = hb^3/12$ $I_{y'} = bh^3/3$

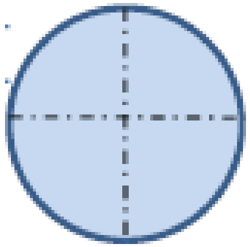
$$I_x = I_{xG} + d_y^{\,2} * A$$

$$I_y = I_{yG} + d_x^{\,2} * A$$

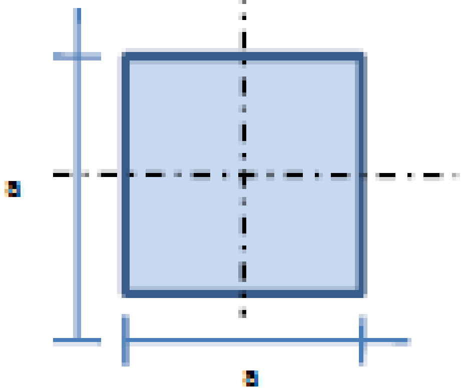
Inercia de secciones



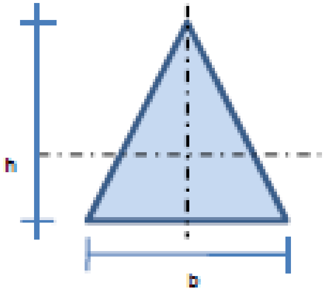
$I_x = bh^3/12$



$I_x = \pi D^4/64$

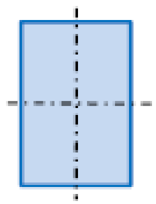


$I_x = a^4/12$

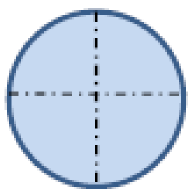


$I_x = bh^3/36$

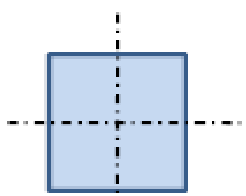
Módulo Resistente



$$Wx = \frac{b x h^2}{6} \qquad Wy = \frac{b^2 x h}{6}$$



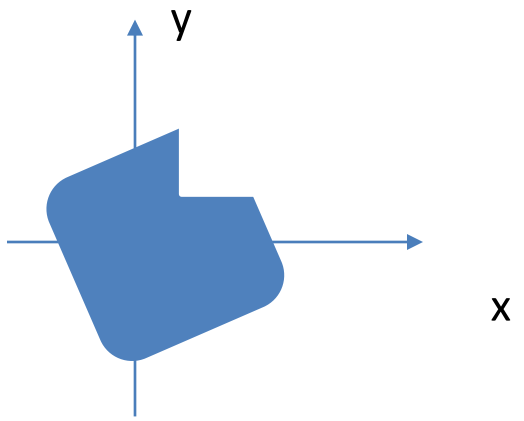
$$Wx = \frac{D^3}{32}$$

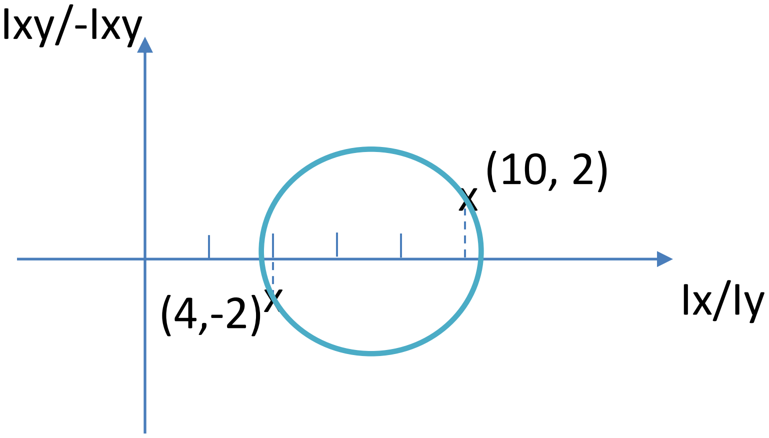


$$Wx = \frac{a^3}{6} = Wy$$

Aplicación

I_x= 10 cm4
I_y= 4 cm4
I_{xy}= 2 cm4





Al trazar el circulo de Mohr, se obtiene el centro en (7,0) y R= raíz(13)