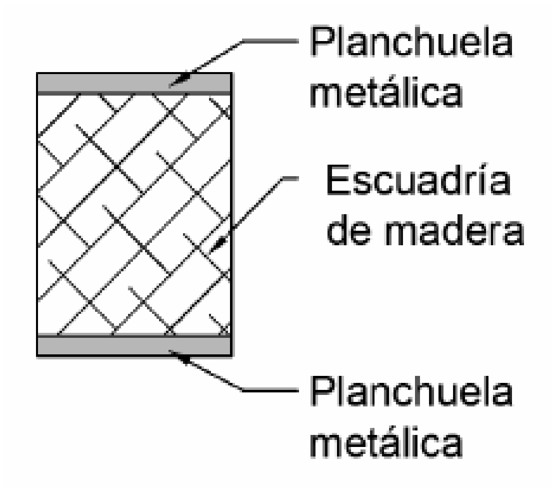
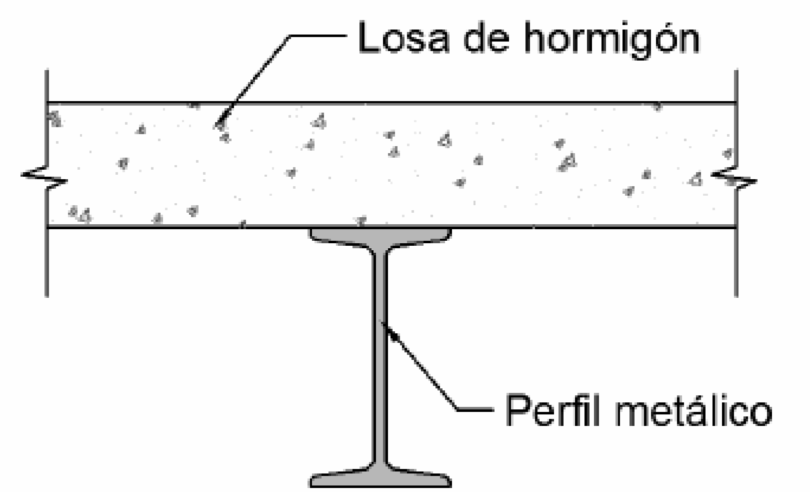
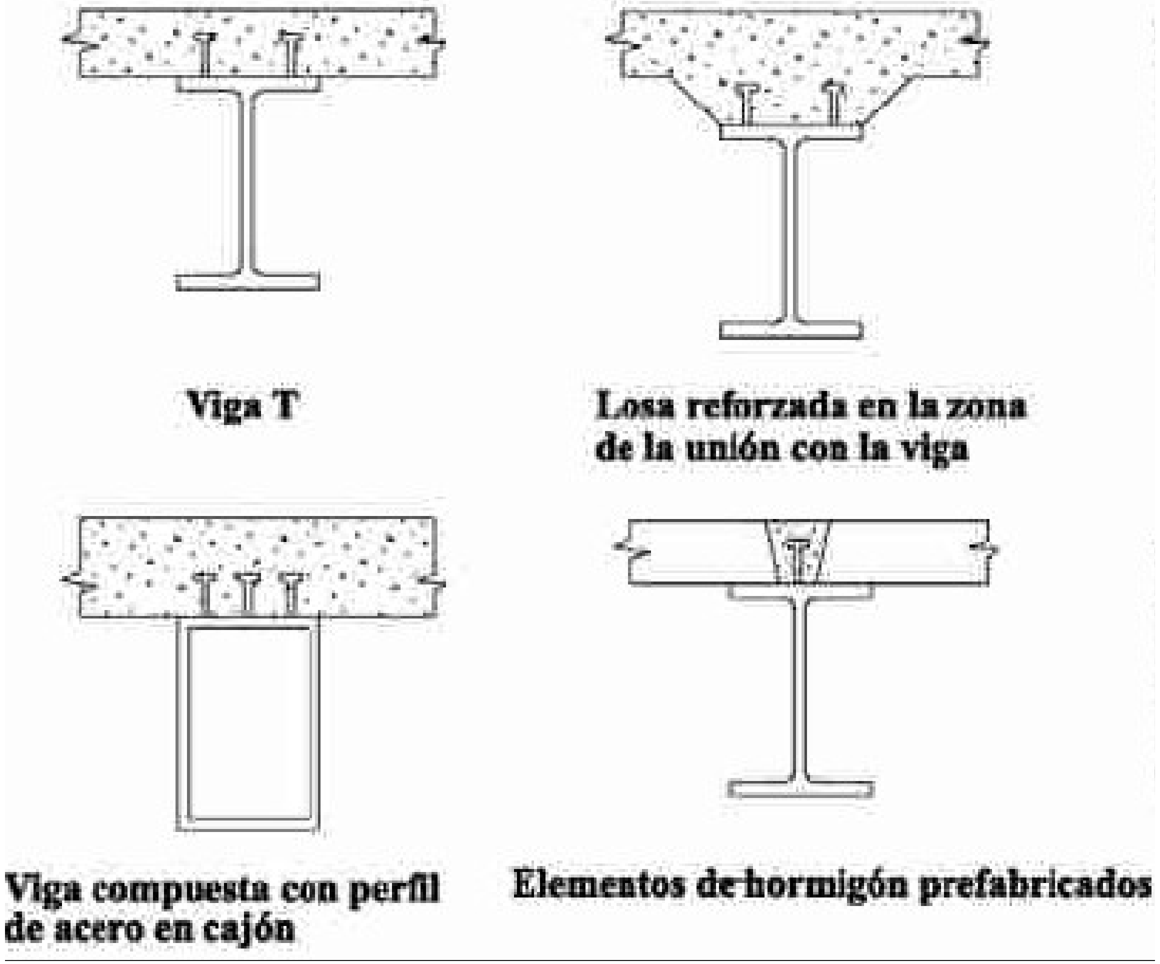
Secciones Compuestas





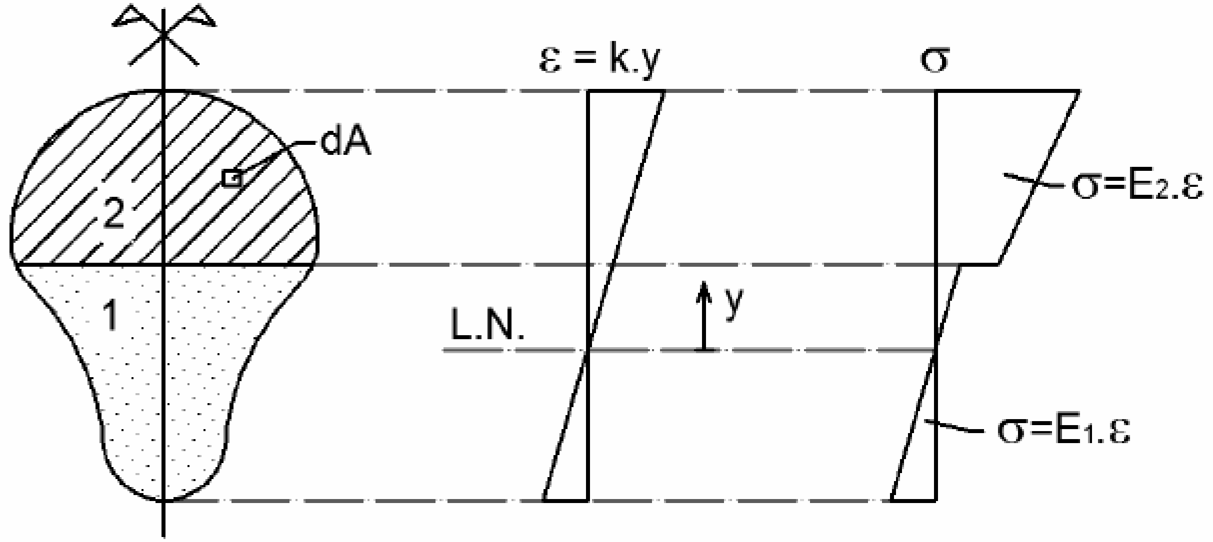
Paneles Sandwich

Sección compuesta



Hipótesis

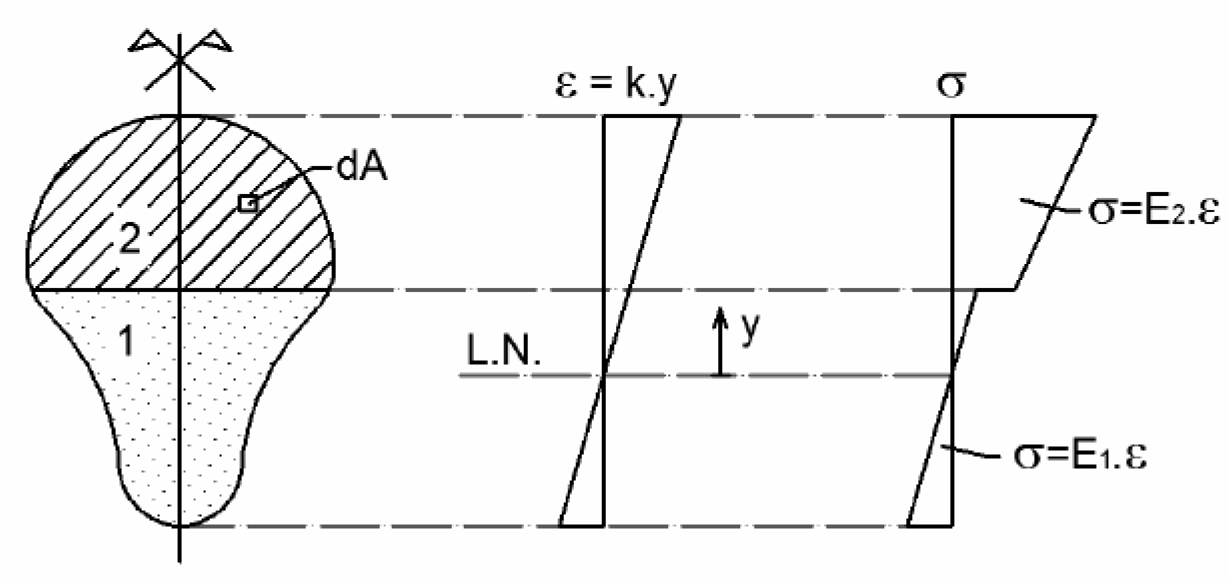
Las secciones planas se mantienen **planas y perpendiculares** al eje de la viga luego de la flexión (Navier). Por lo que las deformaciones unitarias serán proporcionales a la distancia a la línea neutra. Ambos materiales también cumplen con la **Ley de Hooke.**



E2> E1

Material 2
Módulo de elasticidad E2

Material 1
Módulo de elasticidad E1



E2> E1

Material 2
Módulo de elasticidad E2

Material 1
Módulo de elasticidad E1

Supondremos que E1< E2,

→ Al cumplir la ley de Hooke: $\sigma 1=\varepsilon.E1=k.y.E1$
$\sigma 2=\varepsilon.E2=k.y.E2$

Las def. unitarias: ε= k.y   k=1/p

Para determinar la LN y la constante k, igualamos los esfuerzos internos a las fuerzas externas

$$N=\int_{A_1}\sigma_1 dA+\int_{A_2}\sigma_2 dA \qquad M=\int_{A_1}\sigma_1 .ydA+\int_{A_2}\sigma_2 .ydA$$

$$N = \int_{A_1} \sigma_1 dA + \int_{A_2} \sigma_2 dA = \int_{A_1} E_1 kydA + \int_{A_2} E_2 kydA$$

$$N = kE_1 \left[\int_{A_1} ydA + \frac{E_2}{E_1} \int_{A_2} ydA \right]$$

$$M = \int_{A_1} \sigma_1 . ydA + \int_{A_2} \sigma_2 . ydA = \int_{A_1} E_1 ky.ydA + \int_{A_2} E_2 ky.ydA$$

$$M = kE_1 \left[\int_{A_1} y^2 dA + \frac{E_2}{E_1} \int_{A_2} y^2 dA \right]$$

Definiendo $\dfrac{E_2}{E_1} = n$

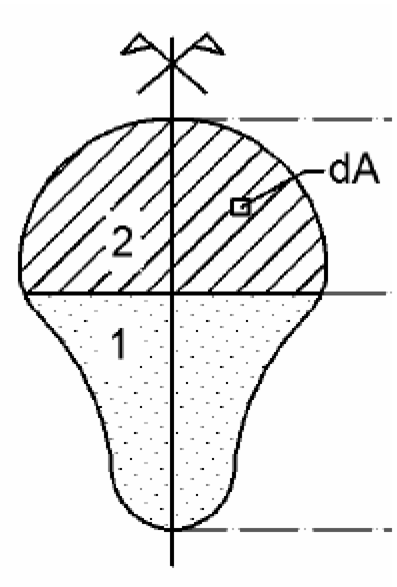
$$N = kE_1\left[\int_{A_1} ydA + n\int_{A_2} ydA\right]$$

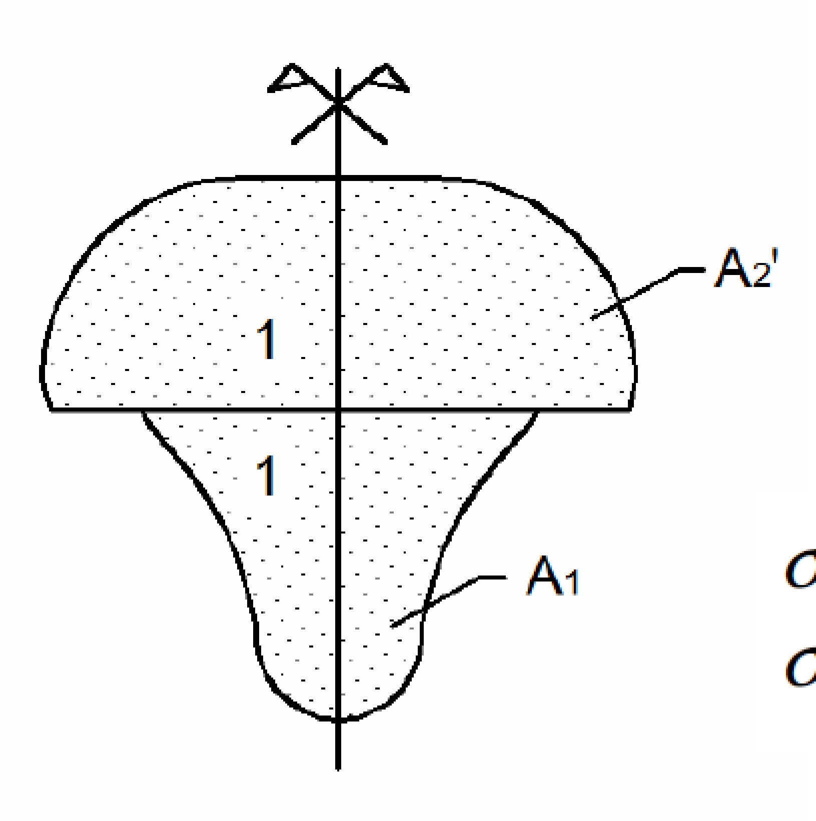
$$M = kE_1\left[\int_{A_1} y^2dA + n\int_{A_2} y^2dA\right]$$

$$n\int_{A_2} ydA = \int_{A_2'} ydA \qquad n\int_{A_2} y^2dA = \int_{A_2'} y^2dA$$

Multiplicando el ancho de la **zona 2 por n**, el problema original de 2 materiales puede ser sustituido por un problema equivalente con un material solo de módulo E1 y área Igual a **A1+A2’**, lo que es más sencillo y sabemos resolver.

Sección homogenea equivalente





Cambiamos los ejes al baricentro

→ $$\varepsilon = \varepsilon_G + ky$$

$$\sigma_1 = E_1\varepsilon = E_1 ky + E_1\varepsilon_G$$
$$\sigma_2 = E_2\varepsilon = E_2 ky + E_2\varepsilon_G$$

$$N = \int_{A1} \sigma_1 dA + \int_{A2} \sigma_2 dA = \int_{A1} E_1(ky + \varepsilon_G)dA + \int_{A2} E_2(ky + \varepsilon_G)dA$$

$$= kE_1\left[\int_{A1} ydA + \frac{E_2}{E_1}\int_{A2} ydA\right] + \varepsilon_G E_1\left[\int_{A1} dA + \frac{E_2}{E_1}\int_{A2} dA\right]$$

$$= kE_1\left[\int_{A1} ydA + \frac{E_2}{E_1}\int_{A2} ydA\right] + \varepsilon_G E_1\left[\int_{A1} dA + \frac{E_2}{E_1}\int_{A2} dA\right]$$

$A_1+n.A_2 = A_h$

0= momento de primer orden respecto al baricentro

$$N = \varepsilon_G E_1 A_h$$

N=0 → ε_G=0

$$M = \int_{A1}\sigma_1 . ydA + \int_{A2}\sigma_2 . ydA$$

$$= \int_{A1} E_1(ky+\varepsilon_G)ydA + \int_{A2} E_2(ky+\varepsilon_G)ydA$$

$$M = kE_1\left[\int_{A1} y^2 dA + \frac{E_2}{E_1}\int_{A2} y^2 dA\right] + \varepsilon_G E_1\left[\int_{A1} y dA + \frac{E_2}{E_1}\int_{A2} y dA\right]$$

0= momento de primer orden respecto al baricentro

$$M = kE_1 I_h$$

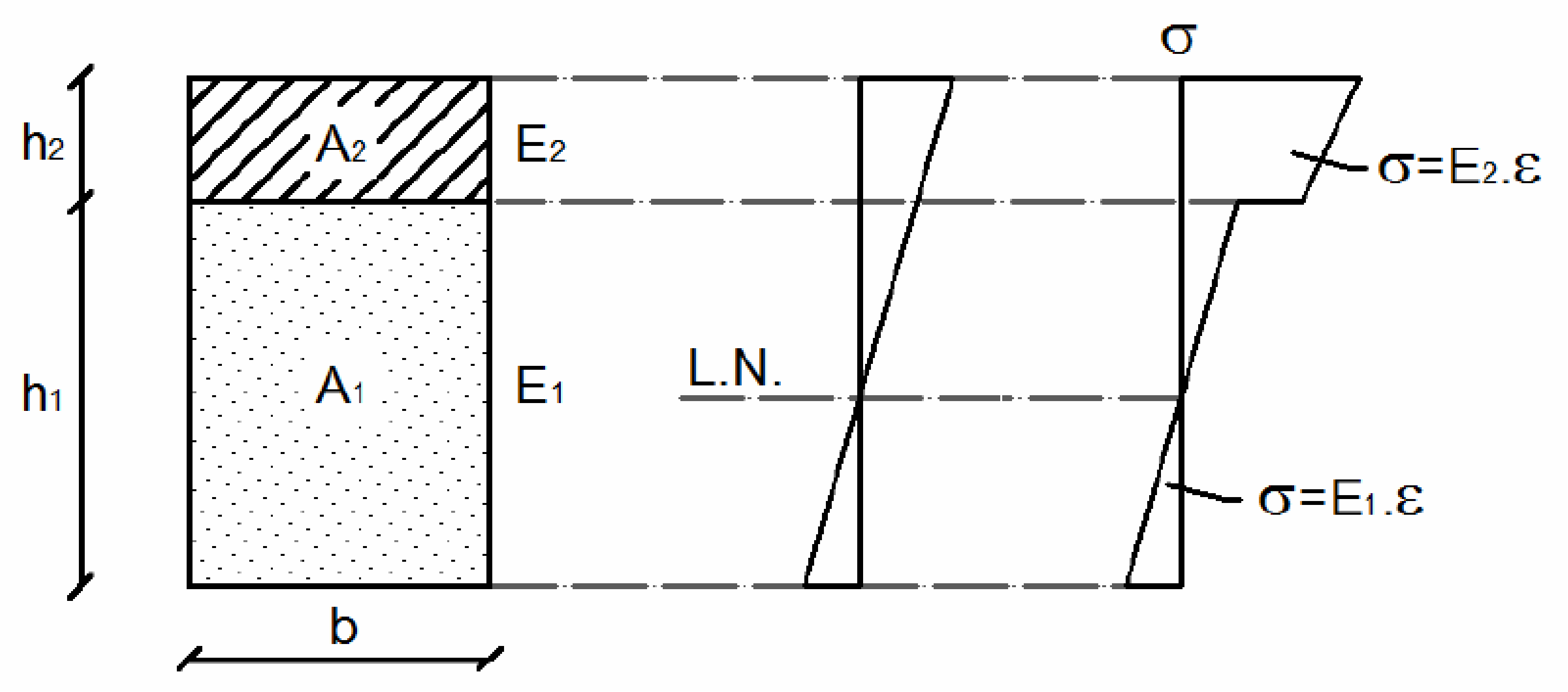
Tensiones Normales

$$M = kE_1 I_h \quad \rightarrow \quad k = \frac{M}{E_1 I_h}$$

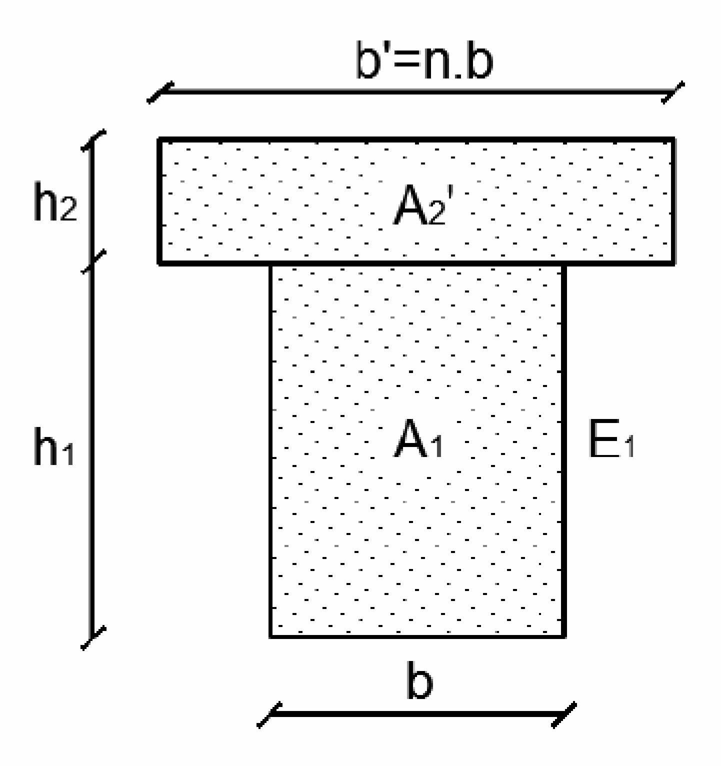
$$\sigma_1(y) = \frac{M.y}{I_h} + E_1 \varepsilon_G = \frac{M.y}{I_h} + \frac{N}{A_h}$$

$$\sigma_2(y) = \frac{E_2}{E_1}\frac{M.y}{I_h} + \frac{E_2}{E_1} E_1 \varepsilon_G = n \cdot \left(\frac{M.y}{I_h} + \frac{N}{A_h} \right)$$

Secciones en bandas horizontales



Sección homogeneizada



Tensiones Rasantes

$$\tau = \frac{V.\mu}{I.b}$$

V es el valor del cortante en la sección en estudio.
μ es el momento de primer orden del tramo de sección que se encuentra por encima de la fibra donde se está hallando la tensión, respecto del baricentro.
I es la inercia de la sección considerada (respecto de su baricentro).
b es el ancho de la sección a la altura de la fibra donde se está hallando la tensión.

Para secciones compuestas

$$\tau = \frac{V.\mu_h}{I_h.b}$$

V es el valor del cortante en la sección en estudio.

μ_h es el momento de primer orden del tramo de sección homogénea que se encuentra por encima de la fibra donde se está hallando la tensión, respecto del baricentro de la sección homogénea.

I_h es la inercia de la sección homogénea (respecto de su baricentro).

Dimensionado

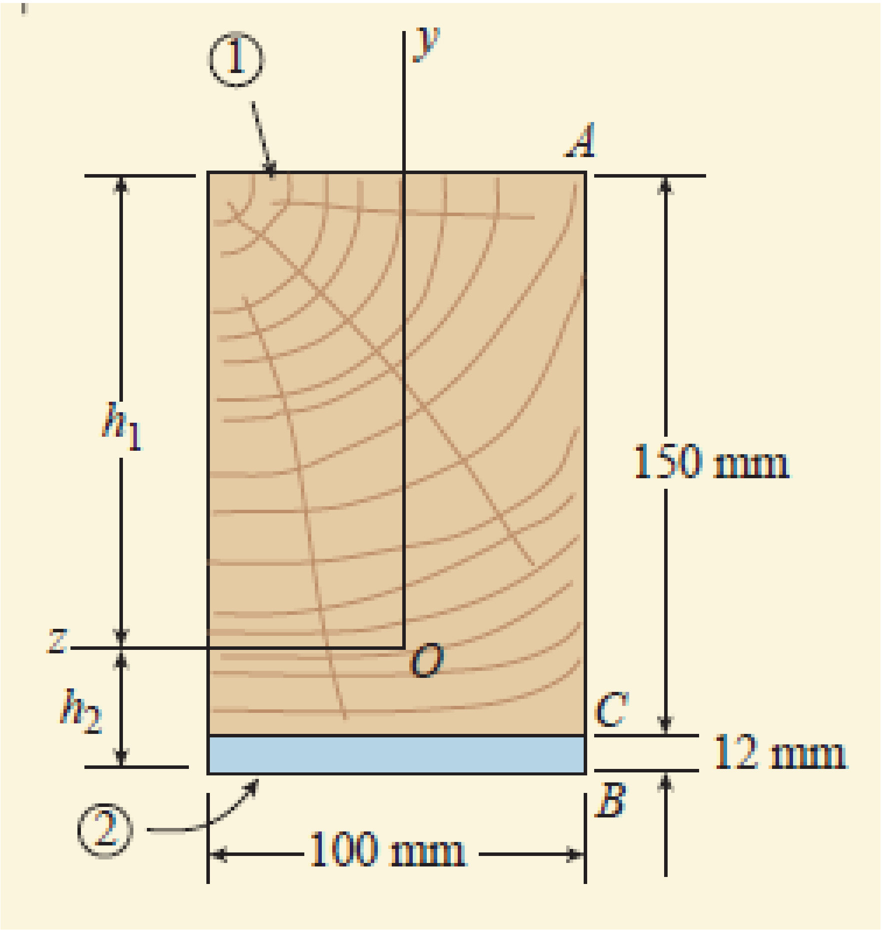
Llamaremos "R" a la fuerza rasante en una longitud s de la viga

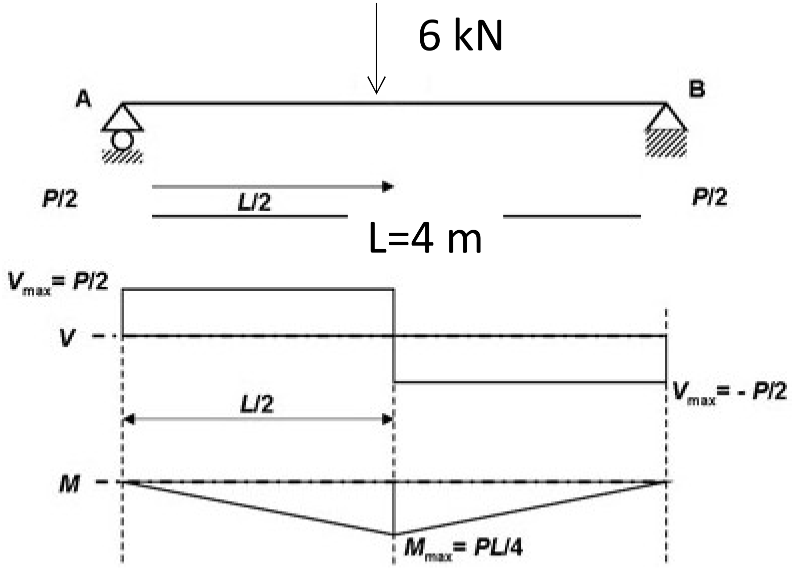
$$R = \tau.b.s = \frac{V.\mu_h}{I_h.b}.b.s \rightarrow R = \frac{V.\mu_h}{I_h}.s$$

En general nos interesará determinar el valor de la fuerza R en la superficie de contacto entre un material y otro, a los efectos de dimensionar la unión que deberá transmitir dicho esfuerzo entre las partes.

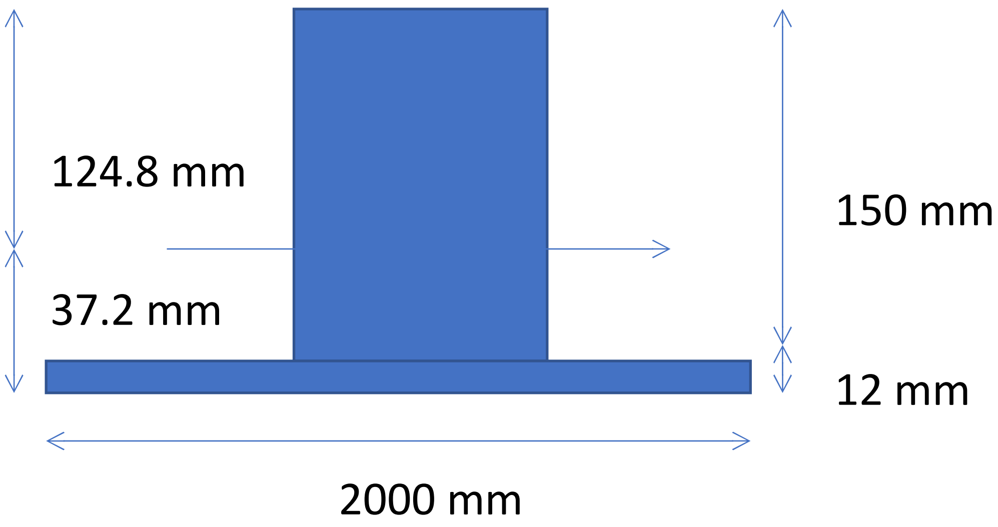
Sección Compuesta

$E_{Madera} = 10.5$ GPa $E_{Acero} = 210$ GPa





Sección Compuesta



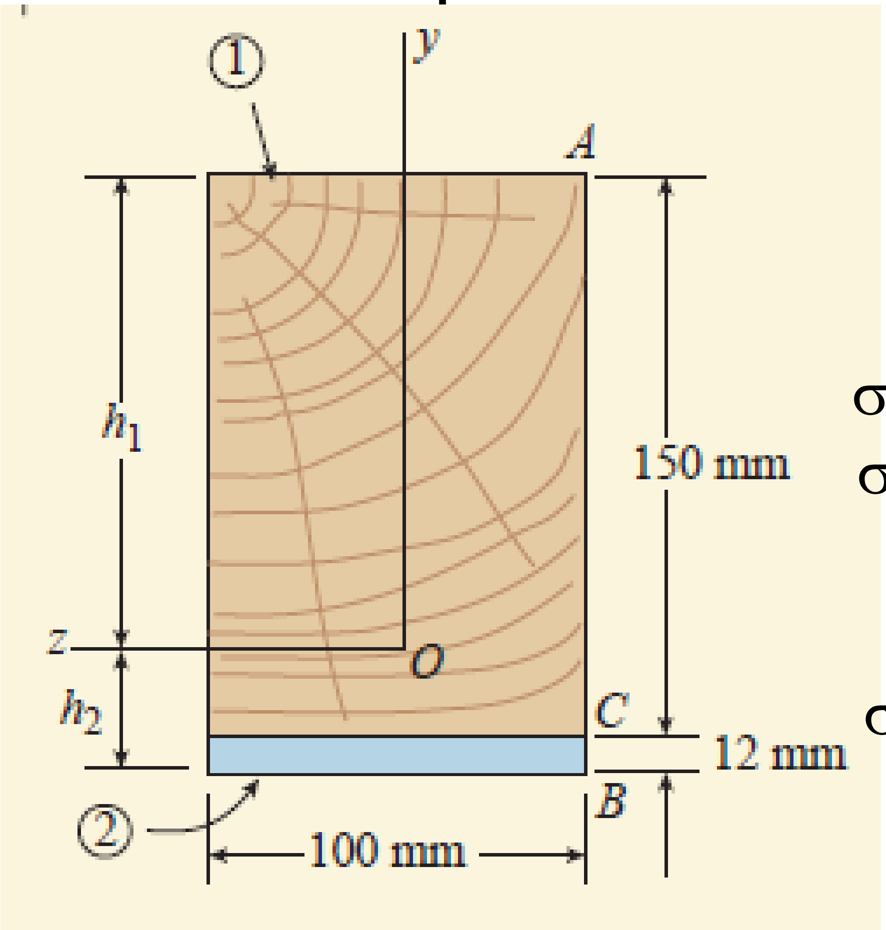
$$y_G = \frac{(150.100).75+(2000.12).156}{(150.100)+(2000.12)}$$

$$y_G = 124.8 \text{ mm}$$

$$I_{\text{homog}} = 100.(150)^3/12 + ((124.8-75)^2.(100.150) + 2000.\ 12^3/12 + 12.2000\ .(\ 37.2-6)^2$$

$$I_{\text{homog}} = 8.898 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

Sección Compuesta



$\sigma_A = E_1.\varepsilon$ $k=M/EI$

$\sigma_A = E_1.\varepsilon = E_1.k.y = E_1.y.M/(E_1 I)$

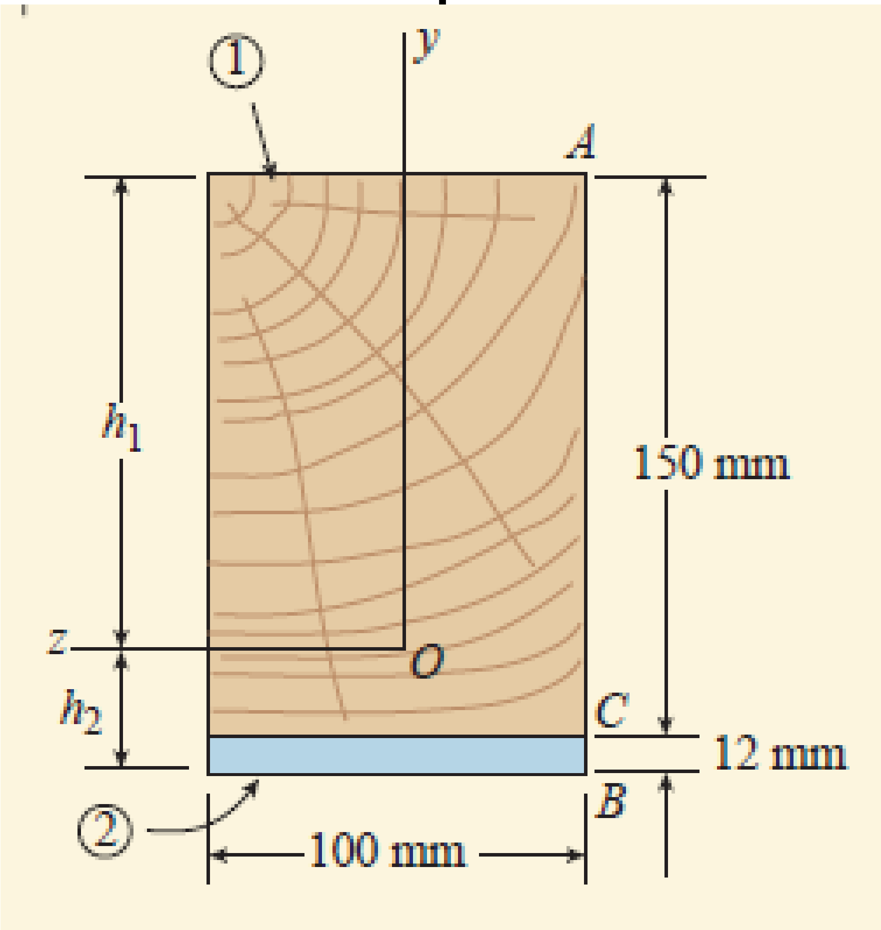
$\sigma_A = -$ 10.5 GPa.6kNm 0.1248/$(E_1 I_{homg})$

$\sigma_A = -$ 8.4 MPa (compresión)

$\sigma_{C1} =$ 10.5 GPa.6kNm 0.0252/$(E_1 I_{homg})$

$\sigma_{C1} =$ 1.7 MPa (tracción)

Sección Compuesta



$\sigma_A = E_1.\varepsilon$ $k = M/EI$

$\sigma_A = E_1.\varepsilon = E_1.k.y = E_1.y.M/(E_1 I)$

$\sigma_{C1} = 1.7$ MPa

$\sigma_{C1} = 10.5\text{GPa}.6\text{kNm } 0.0252/(E_1 I_{homg})$

$\sigma_{C2} = 210\text{GPa}.6\text{kNm } 0.0252/(E_1 I_{homg})$

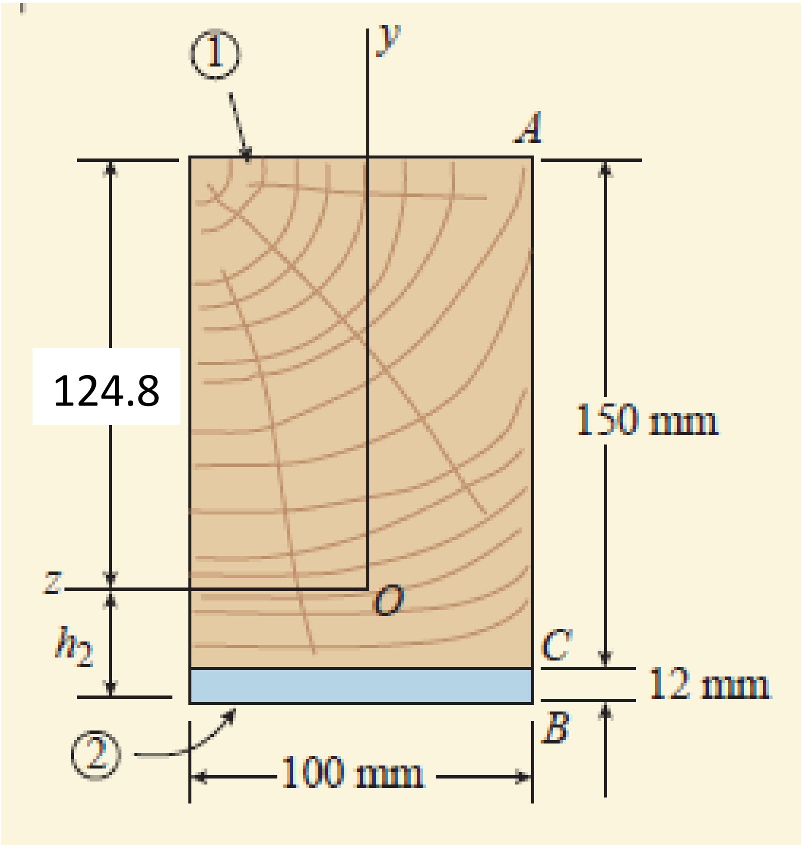
$\sigma_{C2} = 34$ MPa

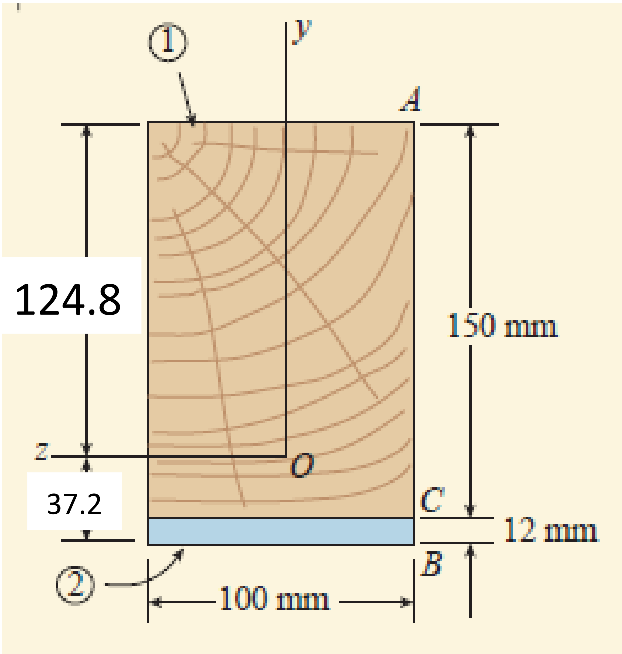
$\sigma_B = 210\text{GPa}.\ 6\text{kNm } 0.0372/(E_1 I_{homg})$

$\sigma_B = 50.2$ MPa

Sección Compuesta

$\tau_G = 3kN * (124.8*100)*124.8/2/(I_{homog}*b) = 262\ kPa$



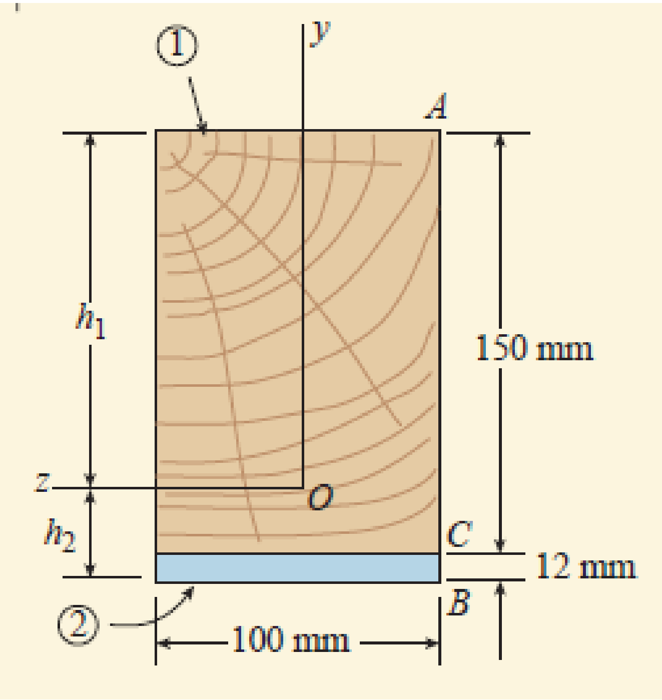


$$\tau_{C1} = 3\text{kN}.\ ((124.8*100)*124.8/2)-$$

$$(25.2*100)*25.2/2)/(I_{homog}*b) = 252\ \text{kPa}$$

$$\tau_{C2} = 3\text{kN}.\ (\ (2000*12)*(25.2+6)/(I_{homog}*b) = 252\ \text{kPa}$$

Flujo de corte



τ_{C1}= 3kN. ((124.8*100)*124.8/2)-

(25.2*100)*25.2/2)/(I_{homog}*b)= 252 kPa

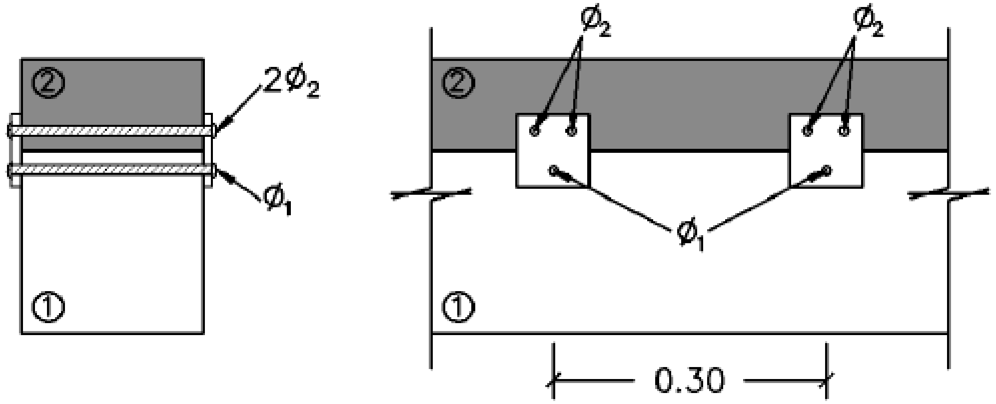
τ_{C2}= 3kN. ((2000*12)*(25.2+6)/(I_{homog}*b)= 252 kPa

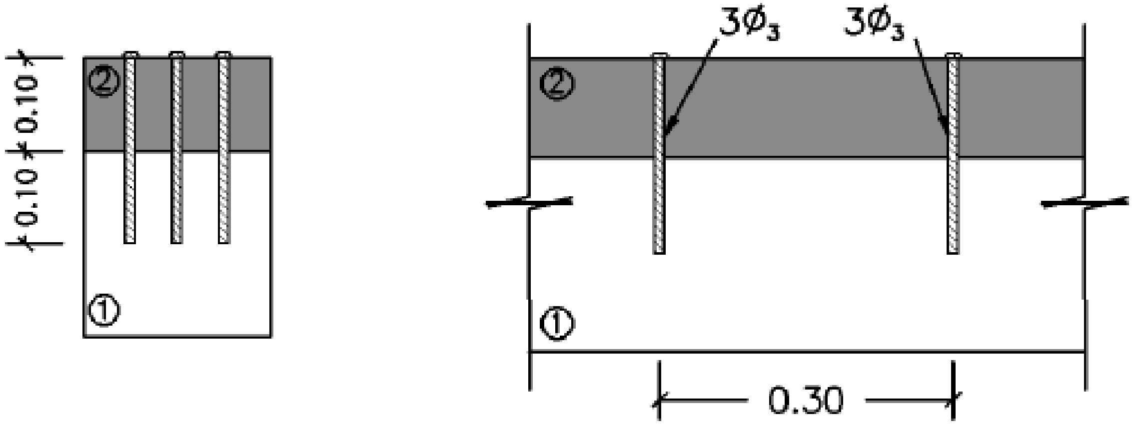
Flujo de corte = 252 kPa x 0,1 m= 252 x10^2 N/m

Defino un valor de S, separación entre los contectores, p.ej 20 cm y hallo el diámetro

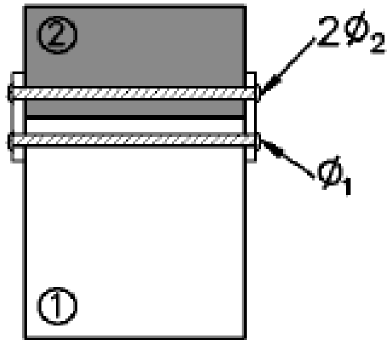
R= 504 x10 N → τmax= 70 MPa → A$\geq$ 5040/70 x 10^6=0,72 cm^2
→ r$\geq$ 0,48 cm → D= 1 cm

Conectores

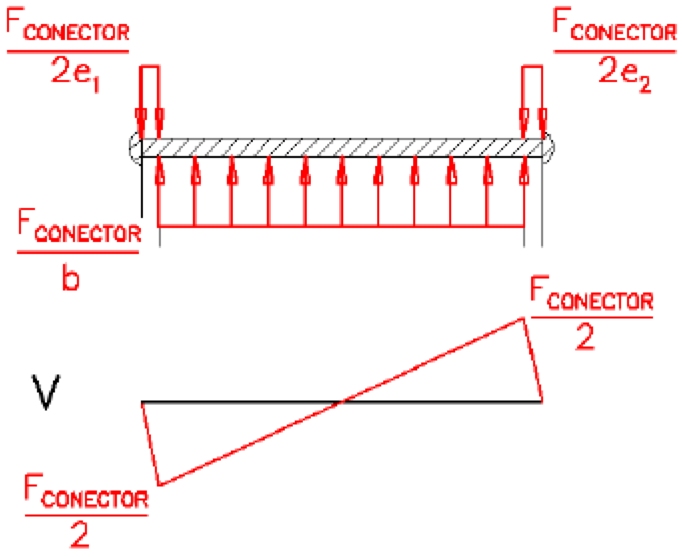




Conectores

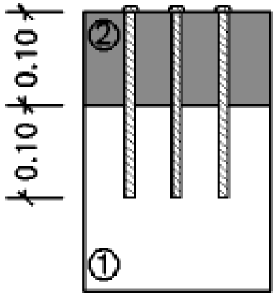


2
2Ø2
Ø1
1

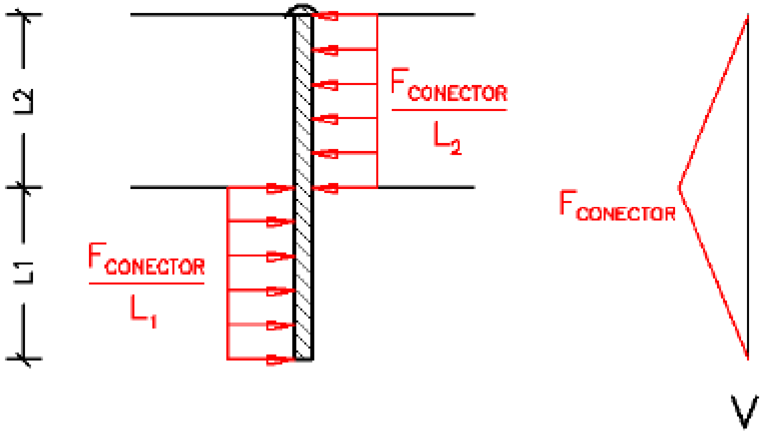


F_CONECTOR / 2e1
F_CONECTOR / 2e2
F_CONECTOR / b
F_CONECTOR / 2
V
F_CONECTOR / 2

Conectores



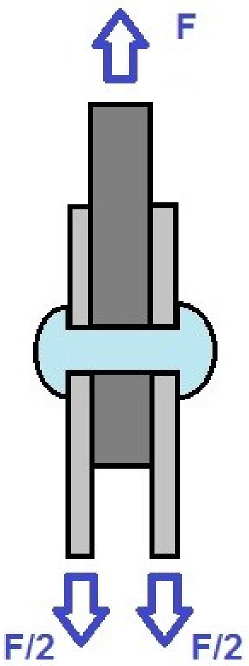
0.10
0.10
②
①

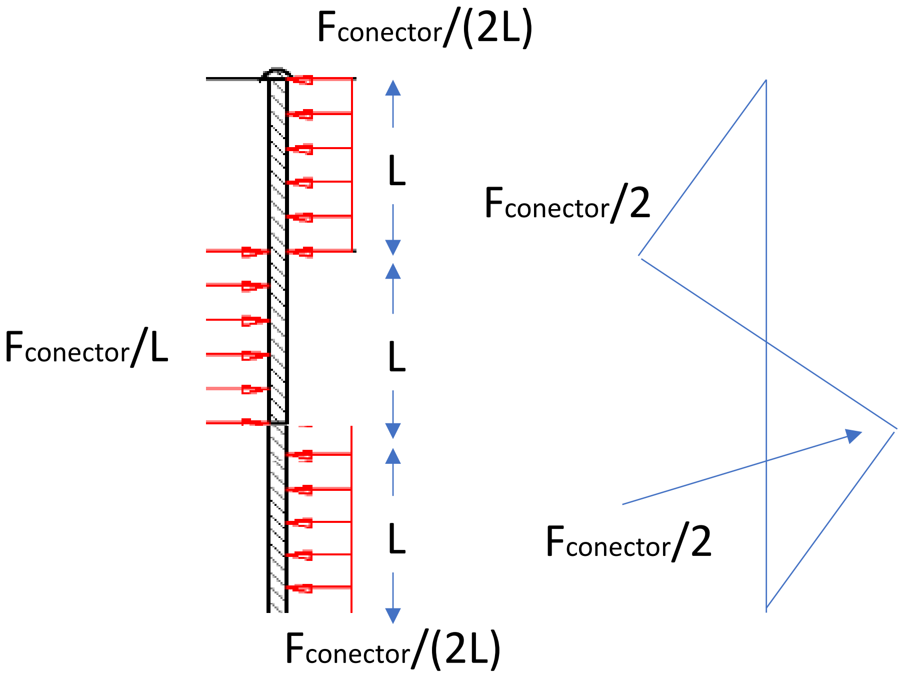


L2
L1
$\frac{F_{CONECTOR}}{L_2}$
$\frac{F_{CONECTOR}}{L_1}$
$F_{CONECTOR}$
V

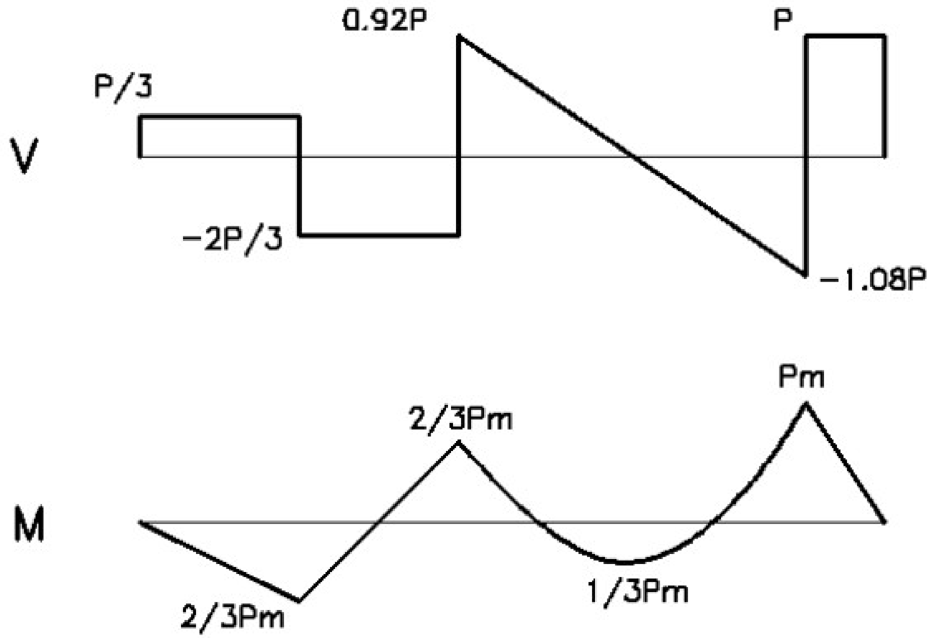
Conectores

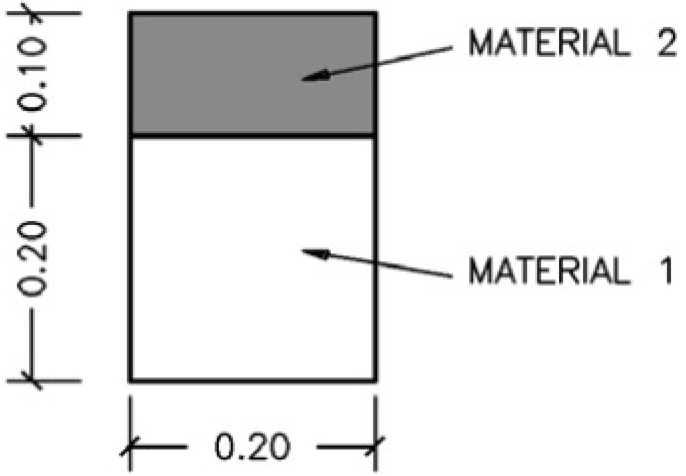
- Corte Doble





Ejemplo

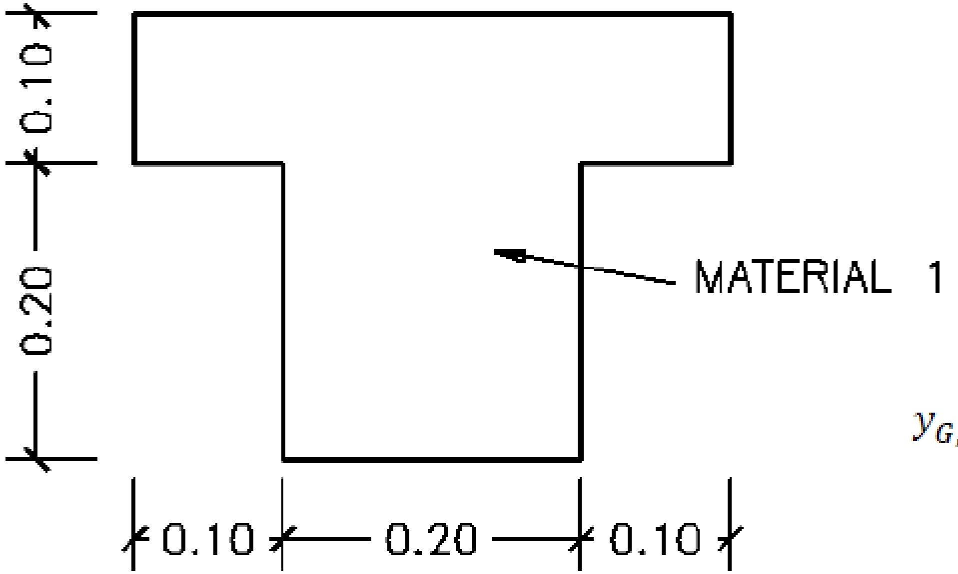




- $E_2/E_1=2$
- P=20 kN
- Tensiones admisibles: $\sigma_{adm,1} = 6$ MPa y $\sigma_{adm,2} = 9$ MPa
- Aplastamiento: σ_{adm}^{aplast} (mat.1) = 10 MPa y σ_{adm}^{aplast} (mat. 2) = 15 MPa.

Separacion de los conectores s=30 cm

Sección Homogeneizada

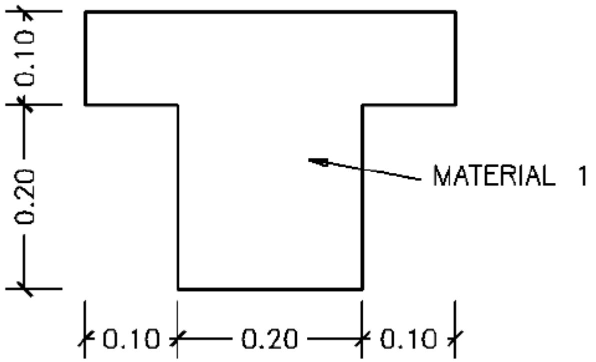


$$y_{G,hom} = \frac{20^2 \cdot 10 + 40 \cdot 10 \cdot 25}{20^2 + 40 \cdot 10} = 17.5\ cm$$

$$I_{x,hom} = \frac{20^4}{12} + 20^2 \cdot (10 - 17.5)^2 + \frac{40 \cdot 10^3}{12} + 40 \cdot 10 \cdot (25 - 17.5)^2 = 61666.7\ cm^4$$

Conectores

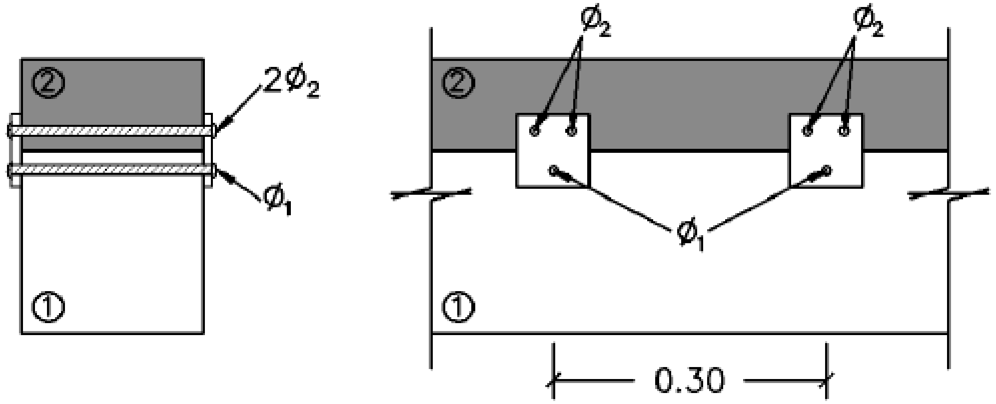
$$\tau \cdot b = \frac{V \cdot \mu_{hom}(\text{unión})}{I_{x,hom}}$$

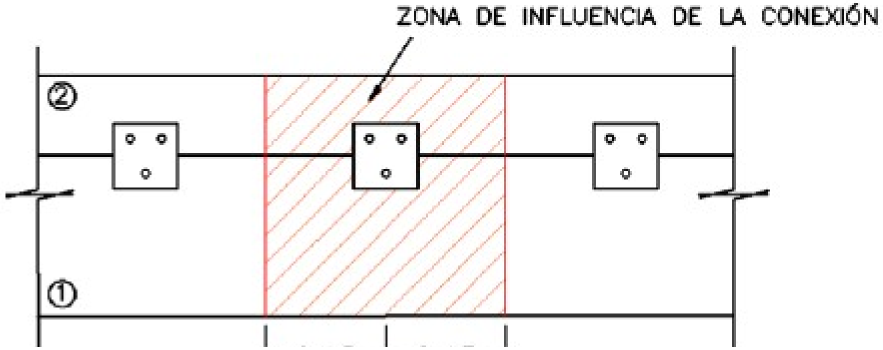


$$\mu_{hom}(\text{unión}) = 40 \cdot 10 \cdot (25 - 17.5) = 3000\ cm^3$$
$$I_{x,hom} = 61667\ cm^4$$
$$V = 1.08 \cdot P = 21.6\ kN$$

$$\tau \cdot b = \frac{21.6 \cdot 3000}{61667} = 1.05 \frac{kN}{cm}$$

Conectores



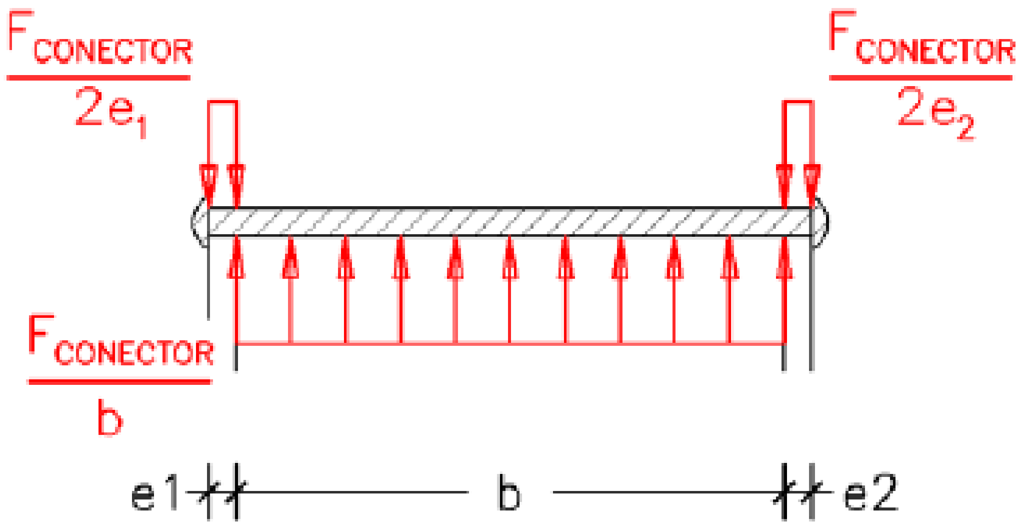


$$F_{conexión} = \tau \cdot b \cdot s = 1.05 \frac{kN}{cm} \cdot 30\ cm = 31.5\ kN$$

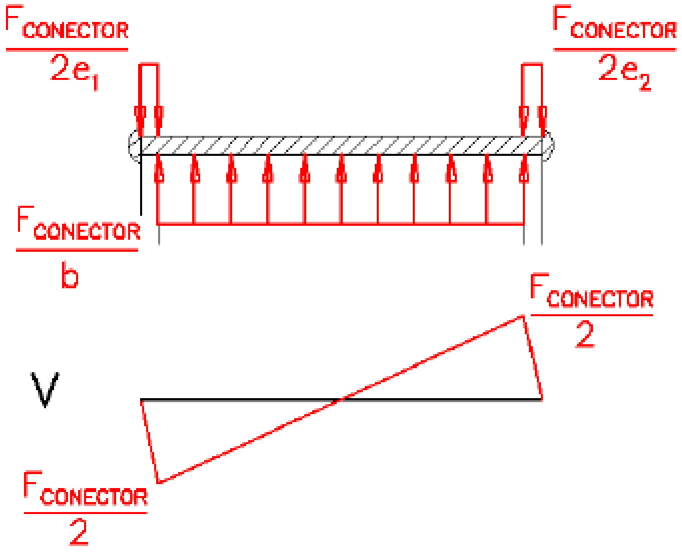
Conectores

$$F_{conectores\ sup} = \frac{F_{conexión}}{2} = \frac{31.5\ kN}{2} = 15.75\ kN$$

$$F_{conectores\ inf} = \frac{F_{conexión}}{1} = \frac{31.5\ kN}{1} = 31.5\ kN$$



Conectores



resistencia admisible al corte $(\tau_{adm} = 70\,MPa)$

$$V_{conector}^{máx}\ (\text{corte doble}) = \frac{F_{conector}}{2}$$

Tenemos que:

$$\tau_{conector\ sup}^{máx} = \frac{V_{conector\ sup}^{máx}}{A_{conector\ sup}} = \frac{\frac{15.75\ kN}{2}}{\pi \cdot {\emptyset_2}^2/_4} \leq \tau_{adm} = 7\frac{kN}{cm^2} \rightarrow\ \boldsymbol{\emptyset_2 \geq 1.20\ cm}$$

$$\tau_{conector\ inf}^{máx} = \frac{V_{conector\ inf}^{máx}}{A_{conector\ inf}} = \frac{\frac{31.5\ kN}{2}}{\pi \cdot {\emptyset_1}^2/_4} \leq \tau_{adm} = 7\frac{kN}{cm^2} \rightarrow\ \boldsymbol{\emptyset_1 \geq 1.69\ cm}$$

Aplastamiento del Material

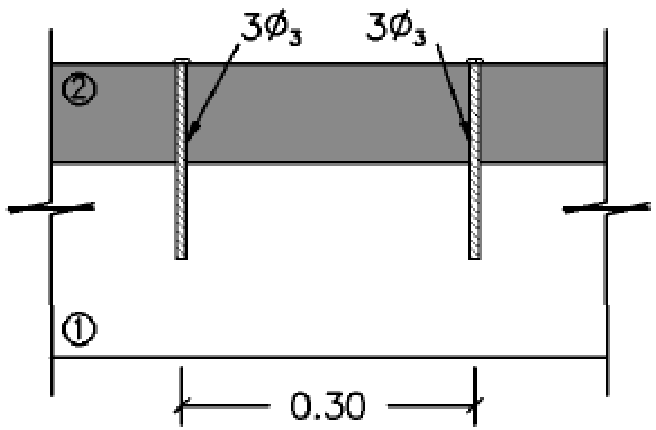
$$\sigma_{aplast} = \frac{F_{conector}}{\emptyset \cdot l}$$

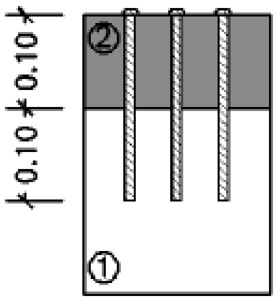
El material 2 está en contacto con los conectores superiores:

$$\sigma_{aplast} = \frac{F_{conectores\ sup}}{\emptyset_2 \cdot l} = \frac{15.75\ kN}{\emptyset_2 \cdot 20\ cm} \leq \sigma_{aplast,adm} = 1.50 \frac{kN}{cm^2} \rightarrow \boldsymbol{\emptyset_2 \geq 0.53\ cm}$$

$$\sigma_{aplast} = \frac{F_{conectores\ inf}}{\emptyset_1 \cdot l} = \frac{31.5\ kN}{\emptyset_1 \cdot 20\ cm} \leq \sigma_{aplast,adm} = 1.00 \frac{kN}{cm^2} \rightarrow \boldsymbol{\emptyset_1 \geq 1.58\ cm}$$

Conectores



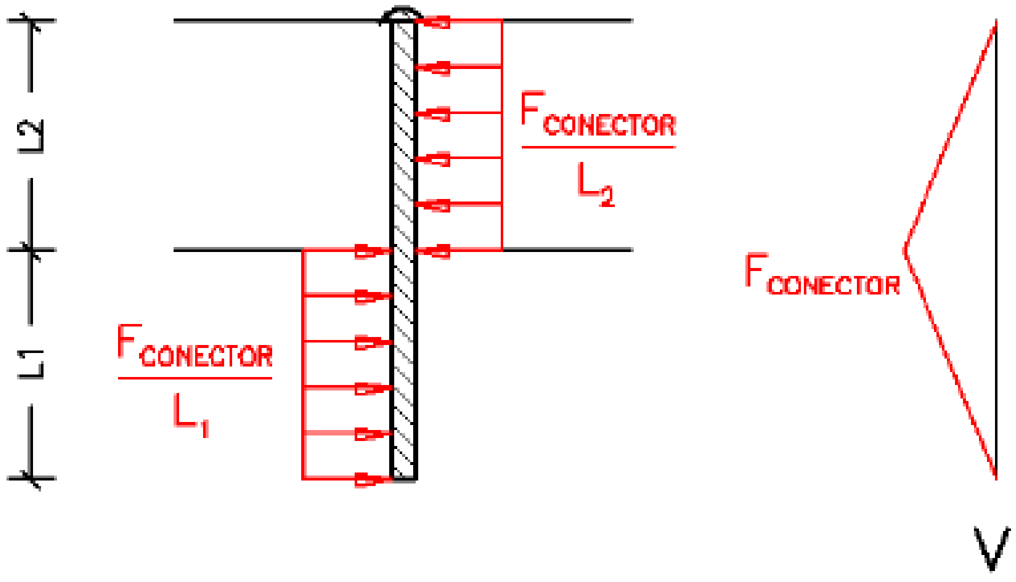


$$\tau \cdot b = \frac{21.6 \cdot 3000}{61667} = 1.05 \frac{kN}{cm}$$

$$F_{conexión} = \tau \cdot b \cdot s = 1.05 \frac{kN}{cm} \cdot 30\ cm = 31.5\ kN$$

Conectores

$$F_{conector} = \frac{F_{conexión}}{3} = \frac{31.5\ kN}{3} = 10.5\ kN$$



$$V_{conector}^{máx}\ (\text{corte simple}) = F_{conector}$$

Conectores

$$\tau_{conector} = \frac{V_{conector}}{A_{conector}}$$

$$\tau_{conector}^{máx} = \frac{V_{conector}^{máx}}{A_{conector}} = \frac{10.5\ kN}{\pi \cdot {\emptyset_3}^2 / 4} \leq \tau_{adm} = 7\frac{kN}{cm^2} \ \rightarrow \ \emptyset_3 \geq \mathbf{1.38\ cm}$$

En el material 2:

$$\sigma_{aplast} = \frac{F_{conectores}}{\emptyset_3 \cdot l} = \frac{10.5\ kN}{\emptyset_3 \cdot 10\ cm} \leq \sigma_{aplast,adm} = 1.50\frac{kN}{cm^2} \ \rightarrow \ \emptyset_3 \geq \mathbf{0.70\ cm}$$

En el material 1:

$$\sigma_{aplast} = \frac{F_{conectores}}{\emptyset_3 \cdot l} = \frac{10.5\ kN}{\emptyset_3 \cdot 10\ cm} \leq \sigma_{aplast,adm} = 1.00\frac{kN}{cm^2} \ \rightarrow \ \emptyset_3 \geq \mathbf{1.05\ cm}$$

Tensiones Normales

$$\sigma_1 = E_1\varepsilon = E_1 k y = E_1 \frac{M}{E_1 \cdot I_{hom}} y = \frac{2000}{61666.7} y = 0.0324y$$

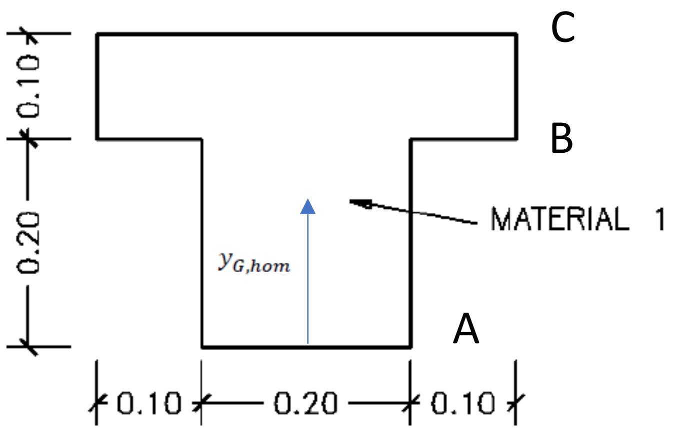
$$\sigma_2 = E_2\varepsilon = E_2 k y = E_2 \frac{M}{E_1 \cdot I_{hom}} y = 2\frac{2000}{61666.7} y = 0.0649y$$

$$\sigma_1\,(A) = \ 0.0324 \cdot 17.5 = 0.567\frac{kN}{cm^2} = 5.67\ MPa < 6\ MPa$$

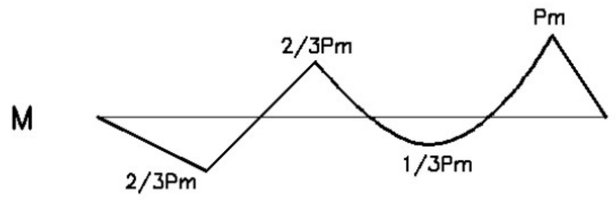
$$\sigma_1\,(B) = \ 0.0324 \cdot 2.5 = 0.081\frac{kN}{cm^2} = 0.81\ MPa < 6\ MPa$$

$$\sigma_2\,(B) = \ 0.0649 \cdot 2.5 = 0.162\frac{kN}{cm^2} = 1.62\ MPa < 9\ MPa$$

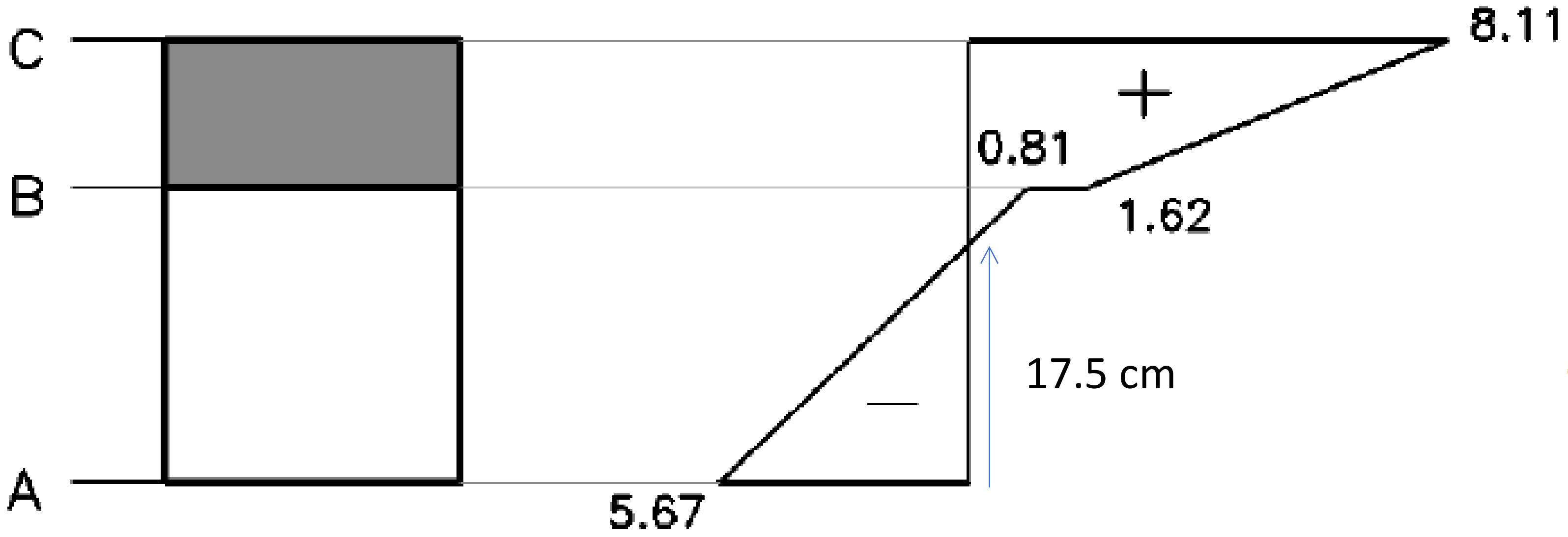
$$\sigma_2\,(C) = \ 0.0649 \cdot 12.5 = 0.811\frac{kN}{cm^2} = 8.11\ MPa < 9\ MPa$$



$$y_{G,hom} = \frac{20^2 \cdot 10 + 40 \cdot 10 \cdot 25}{20^2 + 40 \cdot 10} = 17.5\ cm$$



Tensiones Normales



$$\sigma_1\,(A) = 0.0324 \cdot 17.5 = 0.567\,\frac{kN}{cm^2} = 5.67\;MPa < 6\;MPa$$

$$\sigma_1\,(B) = 0.0324 \cdot 2.5 = 0.081\,\frac{kN}{cm^2} = 0.81\;MPa < 6\;MPa$$

$$\sigma_2\,(B) = 0.0649 \cdot 2.5 = 0.162\,\frac{kN}{cm^2} = 1.62\;MPa < 9\;MPa$$

$$\sigma_2\,(C) = 0.0649 \cdot 12.5 = 0.811\,\frac{kN}{cm^2} = 8.11\;MPa < 9\;MPa$$

Ejemplos

Ejemplo

Hallar el **momento máximo** que puede resistir una viga de sección compuesta:

6 mm

30 mm

6 mm

30 mm

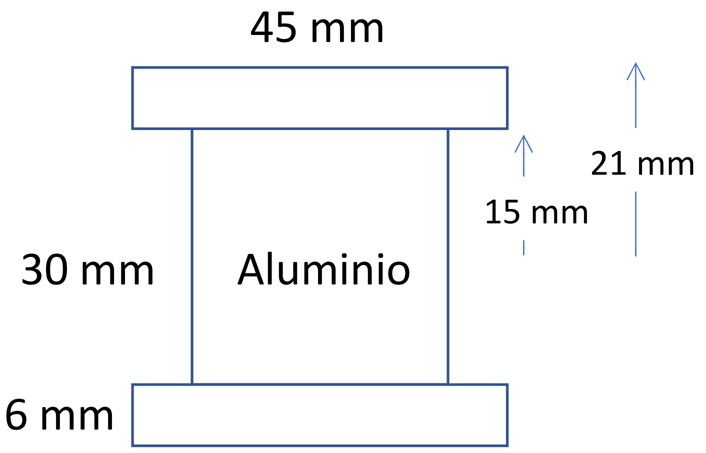
Alumino E= 70 GPa Tensión Adm= 100 MPa

Bronce E= 105 GPa Tensión Adm= 160 MPa

n= 105/70 = 1.5

Sección Homogeneizada

Sección Homogeniezada



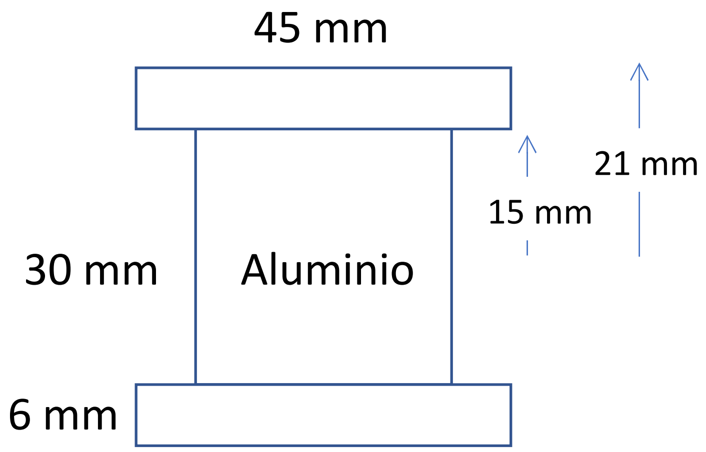
$I= 30.\ 30^3/12+ 2*\ (\ (1.5*30*6^3)/12+1.5*30*6*18^2)= 244.08\ x10^3\ mm^4= 244.08\ x\ 10^{-9}m^4$

$u=0.006*0.045*0.018\ m^3 = 0.486*10^{\wedge}(-5)\ m^3$

Tensiones

Hallar el **momento máximo** que puede resistir una viga de sección compuesta:

Sección Homogeniezada



Tensión = M/W

Tensión Max Aluminio = M/(I/0.015)

100 MPa$\geq$ M/0.1626x10-5

M$\leq$ 1,63 kN.m

La tensión en el material homogeneizado debe ser mayorada por 1.5

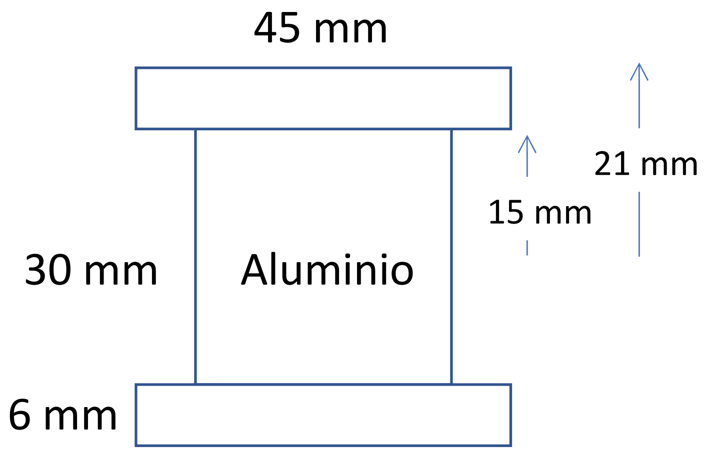
Tensión Max Bronce = n. M/(I/0.021)

160 MPa$\geq$ n. Mmax/(I/0.021)

M$\leq$ 1,86 kN.m /1.5

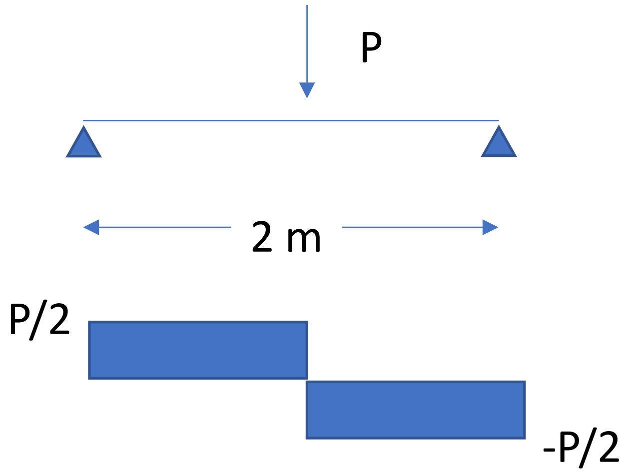
M$\leq$ 1,24 kN.m

Sección Homogeniezada



Cual es la carga max. P que resiste la viga?

Si el Momento Max se da en el centro de una viga simplemente apoyada de 200 cm de largo (con carga concentrada).

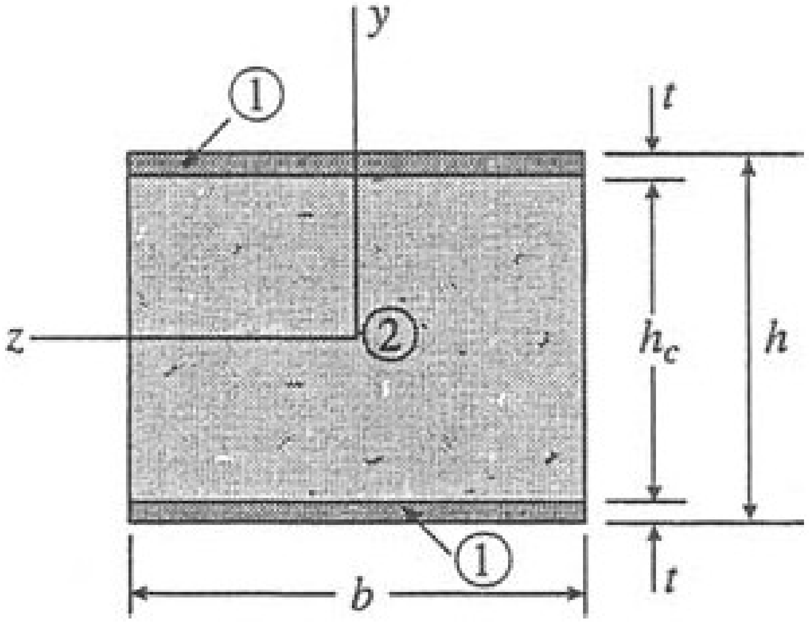


P/2*1=1,24 → P=2.48 kN

Ejemplo

Tipo de sección sandwich.

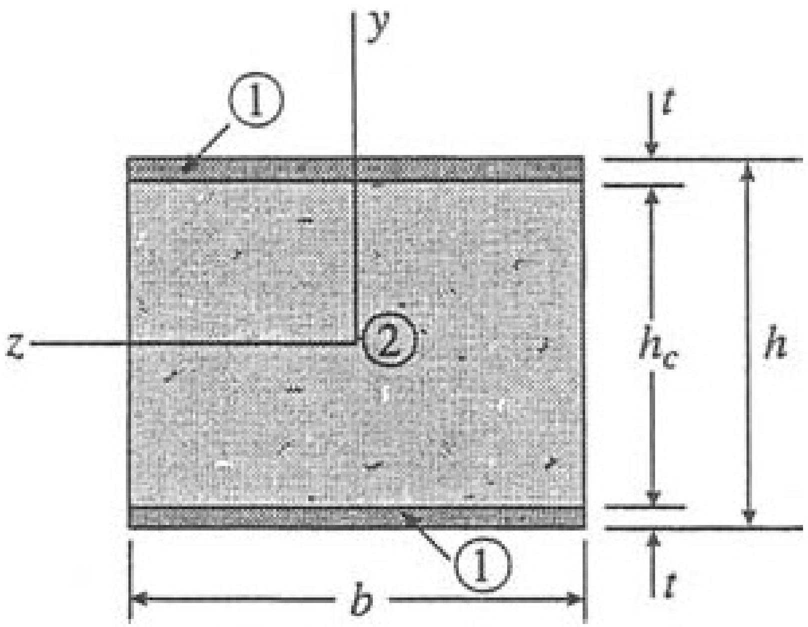
Fibra de Vidrio
Plastico en el centro



b = 50 mm,
t= 4 mm
hc= 92 mm (total *h* 100 mm)
Efg= 75 GPa
Eplastico= 1.2 GPa
M max=275 N m
Hallar las tensiones Normales

Hallamos n = 75/1.2 = 62.5 , a las chapas de fibra de vidrio las deberiamos ensanchar a 3125 mm

Ihomog= 2*(50*62.5*4^3/12+62.5*50*4*48^2) + 92^3*50/12= 6.088 x10^(-5) m^4



σ= M/W   en el plastico

σ =n*M/W en la fibra de vidrio

σ = 275*0.046/(Ihomg) = 0.2 MPa en la interface (en el plastico)

σ = 62.5* 275*0.046/(Ihomg)= 13.6 MPa en la interface (en la fibra de vidrio)

σ = 62.5* 275*0.05/(Ihomg)= 14.1 MPa en la cara superior (en la fibra de vidrio)

Método Simplificado

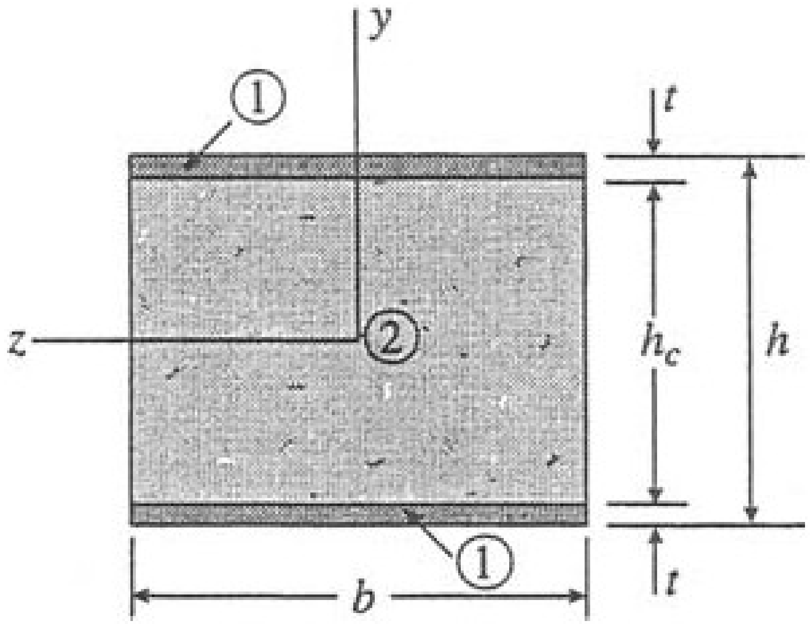
- El método simplificado se puede aplicar solamente en los casos que el material intermedio del “sandwich” tenga un módulo de elasticidad mucho más bajo que el módulo del material de las capas de refuerzo.

- Y siempre que se asuma que la transferencia de cortante esta garantizada por la adherencia entre los materiales.

Método Simplificado

- La simplificación consiste en asumir que el material intermedio no es capaz de llevar tensiones normales.
- Por lo que todo el momento lo llevará el par que se genera en el material de refuerzo.

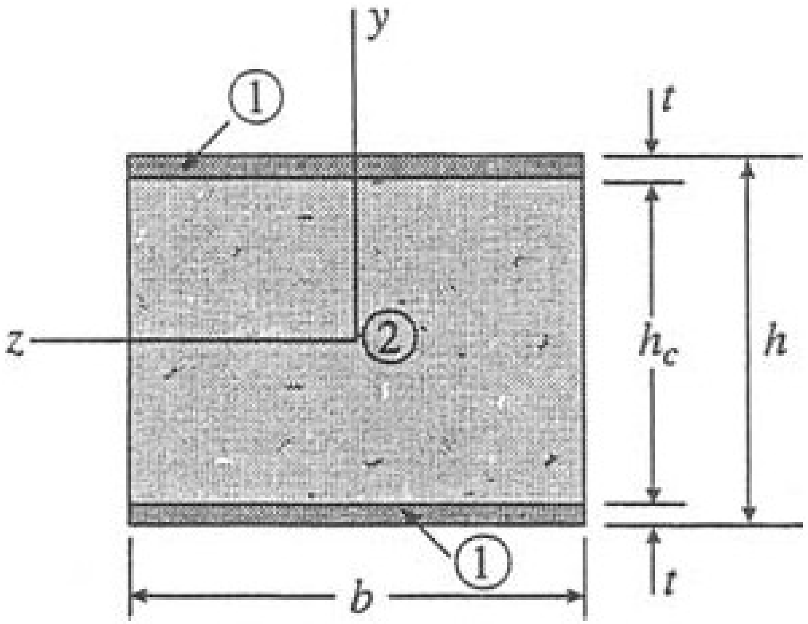
Ejemplo



b = 50 mm,
t= 4 mm
hc= 92 mm (total h 100 mm)
Efg= 75 GPa
Eplastico= 1.2 GPa
M max=275 N m
Hallar las tensiones Normales

n= 75/1.2= 62.5

Ejemplo



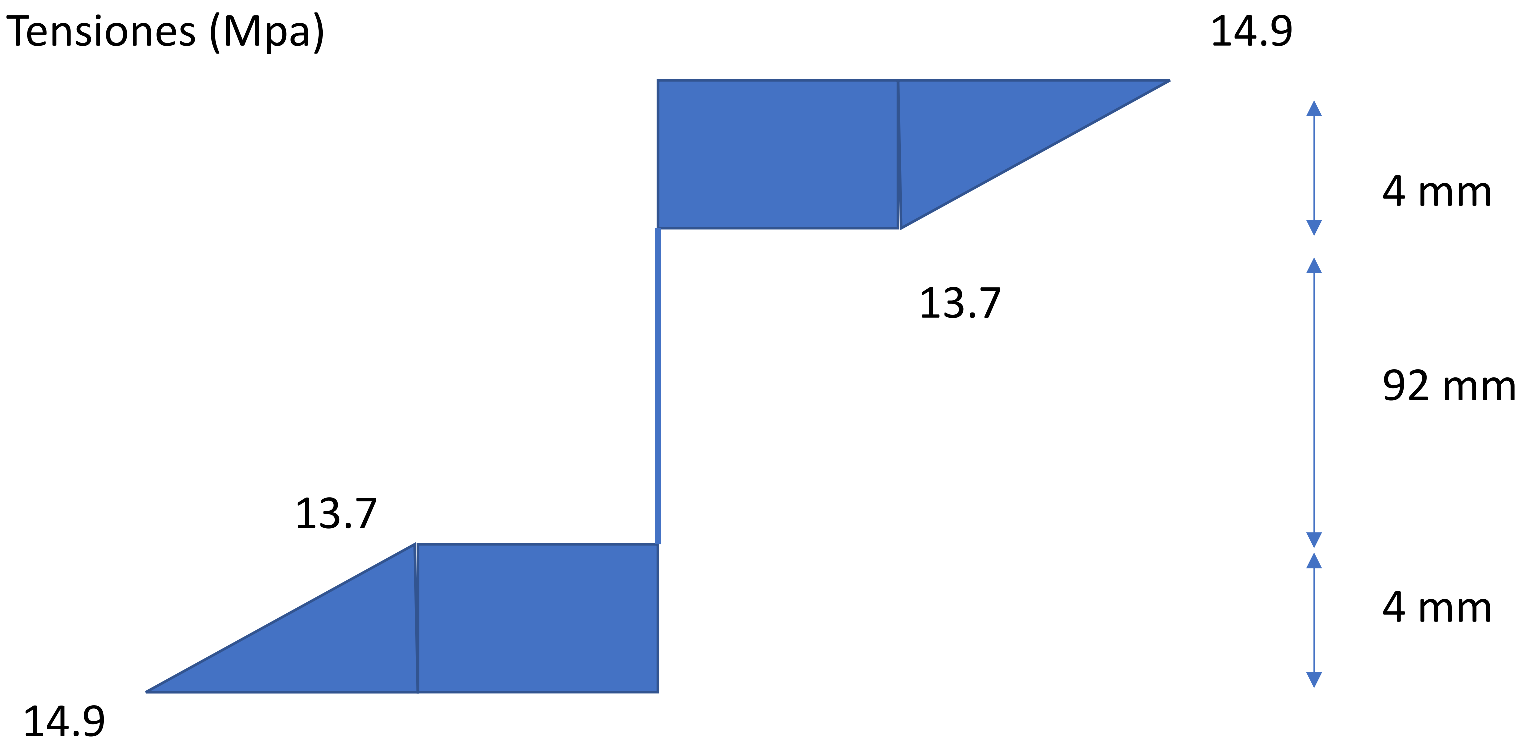
I1=2*(0.05*0.004^3/12+0.05*0.004*0.048^2)

$$I_1 = \frac{b}{12}(h^3 - h_c^3) = 0.9221 \times 10^6\,\mathrm{m}^4$$

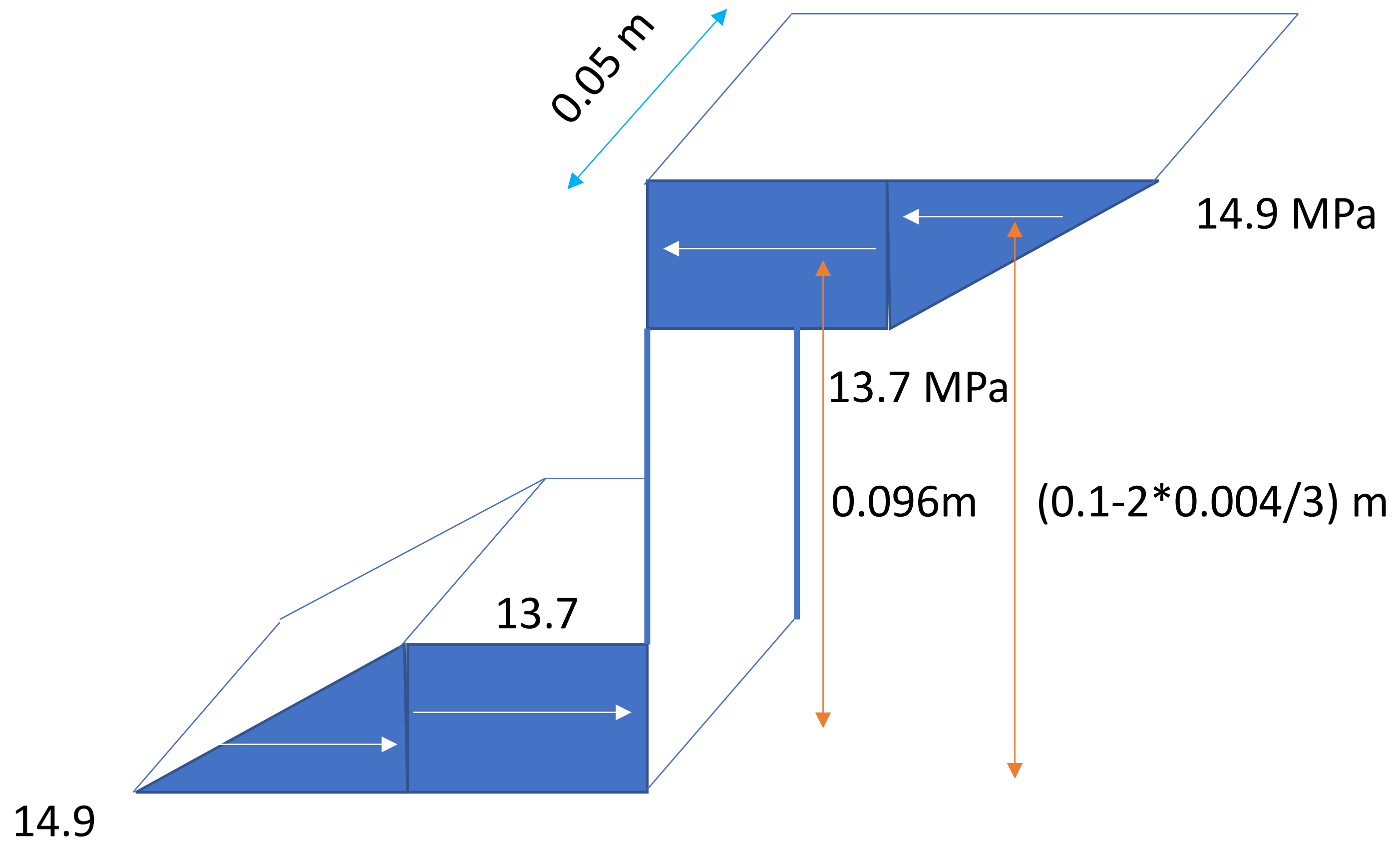
Tensiones

σ = 275*0.05/(Irefuerzo)= 14.9 MPa en la cara superior (en la fibra de vidrio)

σ = 275*0.046/(Irefuerzo)= 13.7 MPa en la cara superior (en la fibra de vidrio)



Tensiones



M=(13.7x10^6*0.004*0.096+0.6*10^6*0.004*(0.1-2*0.004/3))*0.05=275 N.m