

Nombre: \_\_\_\_\_ CI: \_\_\_\_\_ # \_\_\_\_\_  
Nombre completo Cédula HOJAS

Escribir nombre y cédula en cada hoja.

Escribir las hojas de un solo lado.

Comenzar un nuevo ejercicio en una nueva hoja.

1. **(35 puntos)** Sea  $f : D \rightarrow \mathfrak{R}$  tal que  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 1 \\ \frac{-x^2 + 4}{(x-1)^2} & x > 1 \end{cases}$

(a) Estudiar:

- i. El dominio de la función  $f$ .
- ii. Signo de la función  $f$ .
- iii. Límites infinitos y límites laterales en los puntos que corresponda.
- iv. Crecimiento de la función  $f$ .
- v. Bosquejar la función  $f$ .

- (b) i. Resolver  $f(x) = -1$ .  
ii. Bosquejar la función  $|f|$ .

2. **(30 puntos)** Sea la sucesión  $(a_n)_{n \geq 1}$  definida por recurrencia:  $a_1 = 4$  y  $a_{n+1} = \frac{2a_n + 5}{8 - a_n}$ .  
Se sabe que  $a_n \leq 5$

- (a) Probar que  $a_n \geq 1$  para todo  $n \geq 1$ .
- (b) Estudiar la monotonía de la sucesión  $(a_n)_{n \geq 1}$ .
- (c) Justificar que  $(a_n)_{n \geq 1}$  es una sucesión convergente. Halla el límite de  $(a_n)_{n \geq 1}$ .
- (d) Sea la sucesión  $(b_n)_{n \geq 1}$  definida por recurrencia:  $b_1 = 0$  y  $b_{n+1} = \frac{b_n + 1}{3 - 2b_n}$ .  
Calcular los primeros 4 términos de la sucesión  $(b_n)_{n \geq 1}$

3. **(35 puntos)** Se consideran la recta  $r = \begin{cases} x = 1 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$  y el plano  $\pi : -x + 2y + z = 3$

- (a) Hallar la recta  $s$  que pasa por el punto  $A = (0, \frac{1}{2}, 1)$ , es paralela al plano  $\pi$  y se corta con la recta  $r$ .
- (b) Hallar la recta  $t$  incluida en el plano  $\pi$ , que es perpendicular a la recta  $r$ .
- (c) Calcular la distancia entre las rectas  $s$  y  $t$ .