

Nombre: _____ CI: _____ # _____
Nombre completo Cédula HOJAS

- Escribir nombre y cédula en cada hoja.
- Escribir las hojas de un solo lado.
- Comenzar un nuevo ejercicio en una nueva hoja.

1. (10 puntos)

- (a) Resolver en \mathbb{R} la siguiente inecuación: $|\frac{x}{x-3}| \geq 5$.
- (b) Llamaremos A , al conjunto solución de la parte (a), indicar: $\overline{cota}(A)$, $cota(A)$, $supremo(A)$, $ínfimo(A)$, $máximo(A)$ y $mínimo(A)$
- (c) Expresar en notación polar, cartesiana y binómica el complejo z de argumento $\frac{\pi}{4}$ tal que sumado a $1+2i$ da un complejo de módulo 5.

2. (8 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + a & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

- (a) Hallar a para que la función f sea continua $\forall x \in \mathbb{R}$
- (b) Hallar: i. $f^{-1}(6)$ ii. $f^{-1}(-1)$

3. (12 puntos) Sea la sucesión $(a_n)_{n \geq 0}$ definida por recurrencia: $a_0 = 2$ y $a_{n+1} = \frac{9}{6 - a_n}$.

- (a) Probar que $a_n < 3$ para todo $n \geq 0$.
- (b) Probar que $a_n \geq 2$ para todo $n \geq 0$.
- (c) Probar que (a_n) es una sucesión monótona creciente $n \geq 0$.
- (d) Justificar que (a_n) es una sucesión convergente.
- (e) Halla el límite de (a_n) .

4. (10 puntos)

(a) Bosquejar f sabiendo que: $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$; f es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$; $f(1) = 3$;

$$\text{sig}(f(x)) \xrightarrow{\begin{array}{c} - \quad 0 \quad + \\ -1 \quad 0 \end{array}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2^-; \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 1; y = x - 2 \text{ es asíntota para } x \rightarrow \pm\infty$$

$$\text{sig}(f'(x)) \xrightarrow{\begin{array}{c} + \quad \cancel{0} \quad - \quad 0 \quad + \\ 0 \quad 1 \end{array}}$$

$$\text{sig}(f''(x)) \xrightarrow{\begin{array}{c} + \quad \cancel{0} \quad + \\ 0 \end{array}}$$

(b) Si además se sabe que $f(4) = 4$ y $f(\frac{1}{2}) = 4$. Resolver:

i. $f(x) < 0$ ii. $f(x) \geq 0$ iii. $f(x) > 3$ iv. $f(x) \leq 4$

(c) Responder las siguientes preguntas, justificando sus respuestas a partir del bosquejo:

i. ¿Es f inyectiva? ii. ¿Es f sobreyectiva?