Tecnólogo Industrial Mecánico
Tecnólogo en Cartografía

Examen

Matemática 1
16 de julio de 2018

Nombre: ________________________ CI: ____________ #______
Nombre completo — Cédula — HOJAS

- Escribir nombre y cédula en cada hoja.
- Escribir las hojas de un solo lado.
- Comenzar un nuevo ejercicio en una nueva hoja.

---

1. **(25 puntos)** Se considera la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ definida por recurrencia:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{a_n} \end{cases}$$

   (a) Probar que $1 \leq a_n \leq 2$ para todo $n \geq 0$.
   (b) Probar que $(a_n)_{n\geq 0}$ es monótona creciente.
   (c) Justificar que $(a_n)_{n\geq 0}$ tiene límite y calcular su valor.

2. **(30 puntos)** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3L|x+2| - 3L|x-2| - 4x$

   (a) Hallar el dominio de f y los límites laterales en los puntos de no existencia.
   (b) Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
   (c) Estudiar el crecimiento y los extremos relativos de f.
   (d) Esudiar la concavidad y los puntos de inflexión de f.
   (e) Bosquejar el gráfico de f.

3. **(20 puntos)**

   (a) Sea la matriz A $= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & a & b+\sqrt{2} \\ 0 & c & d-\sqrt{2} \end{pmatrix}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$
   Calcular el determinante de la matriz A
   (b) Determinar dos complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$, sabiendo que su suma vale $1 + 4i$; su cociente es imaginario puro y la parte real de uno de ellos es -1.
   (c) Utilizando los reales a, b, c, d obtenidos en la parte anterior. Verificar si la matriz A tiene inversa. En caso afirmativo, calcular la matriz inversa de A.

4. **(25 puntos)** Se consideran las siguientes rectas:

$$(r)\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 3x - 4y - 2z = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad (s)\begin{cases} x = -3 - 5\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases}$$

   (a) Estudiar la posición relativa de las rectas (r) y (s).
   (b) Determinar una ecuación reducida del plano (π) que contiene a (r) y pasa por el punto $P = (4, 1, 2)$.
   (c) Hallar la intersección de la recta (t) y el plano (π), donde (t) es la recta paralela a (s) que pasa por $Q = (1, 1, 1)$.
   (d) Hallar la distancia del punto $R = (1, 0, -1)$ al plano (π).