

Nombre: _____ CI: _____ # _____
Nombre completo Cédula HOJAS

- Escribir nombre y cédula en cada hoja.
- Escribir las hojas de un solo lado.
- Comenzar un nuevo ejercicio en una nueva hoja.

1. **(25 puntos)** Se considera la sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ definida por recurrencia:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = \frac{1}{3 - a_{n-1}}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

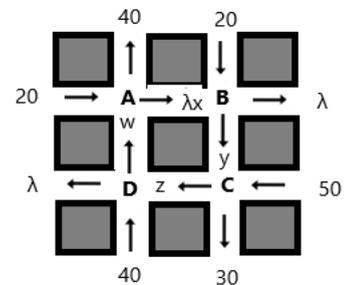
- Demostrar, por Inducción Completa, que $(a_n)^2 - 3a_n + 1 \leq 0$ para todo $n \geq 1$.
- Probar que $0 < a_n \leq 1$ para todo $n \geq 1$.
- Probar que la sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ es convergente y calcular su límite.

2. **(25 puntos)** Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 7x + 9L|x + 1|$

- Hallar el dominio de f y calcular los límites correspondientes.
- Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- Estudiar el crecimiento y los extremos relativos de f .
- Bosquejar el gráfico de f .
- ¿ Es f sobreyectiva? ¿ inyectiva? ¿ biyectiva? Justifique su respuesta.
- Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ e^{3x^2+a} + 2x - 1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$ Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que g sea continua.

3. **(25 puntos)**

Se adjunta un gráfico de una parte de la red de calles de la ciudad. Se quiere estudiar la cantidad de bicicletas w, x, y, z que circulan en determinado horario por las cuadras identificadas en el esquema. Las calles son flechadas. Además, se cuenta con información de las bicicletas que entran y salen al sector analizado. Los flujos de entrada y salida de las bicicletas a la red son iguales, dado que no está permitido estacionar ni detenerse.



Discutir según el valor de λ , en cuál calle circula la menor cantidad de bicicletas.

4. **(25 puntos)**

- Determinar la recta (r) contenida en el plano (π) $2x - y + z = 2$ que pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$ y es perpendicular a la recta (s) $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$
- Estudiar la posición relativa de la recta (r) y la recta (t) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$
- Hallar la distancia del punto $R = (0, 0, 0)$ a la recta (r) .