El parcial dura dos horas, es individual y con material. Los resultados del mismo se publicarán el día Domingo 4 de Julio. Éxitos!

Ejercicio 1 **(15 puntos)**

Dado α un número real, se define el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y - \alpha z = 1 \\ -y + z = 0 \\ \alpha x + z = \alpha \end{cases}$$

(a) Determine si es compatible determinado, compatible indeterm. o incompatible para cada valor de α

(b) Determine, cuando el sistema es compatible, las soluciones.

Ejercicio 2 **(15 puntos)**

(a) Determine cuáles de las siguientes matrices son invertibles (y halle la inversa de aquellas que lo sean)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & 7 & 12 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Realice las operaciones (i)A + 2B (ii) A.B

(c) Encuentre la matriz X que verifica $X - B^2 = A.B$

Ejercicio 3 **(15 puntos)**

Dadas las rectas $(r)\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$ y $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = \lambda \end{cases}$

(a) Determine sus ecuaciones reducidas

(b) Determine si se cortan, cruzan o son paralelas. En caso de cortarse, hallar el punto de corte.

(c) Determine, si es posible, las ecuaciones paramétricas de un plano que contenga a ambas rectas.

Ejercicio 4 **(15 puntos)**

Dados x un número real, determine el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{pmatrix}$. ¿Para qué valores de x es invertible?

Ejercicio 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -\alpha & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & \alpha \end{array}\right)$$

• si $\alpha = 0 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ compatible determinado, $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$

• si $\alpha \neq 0$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -\alpha & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & \alpha \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow -\alpha F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -\alpha & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2\alpha & 1+\alpha^2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow -2\alpha F_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -\alpha & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\alpha+\alpha^2 & 0 \end{array}\right)$

* si $\underbrace{(1-\alpha)^2 = 0}_{\alpha = 1} \rightarrow$ compati. indeterminado! $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \rightarrow x + 2y - z = 1 \Rightarrow \underline{x + y = 1} \\ \rightarrow y = z \\ \end{array}$

así, $x = 1 - y$, $z = y$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

* si $(1-\alpha^2) \neq 0 \rightarrow$ compatible determinado! $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -\alpha & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\alpha)^2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \rightarrow x = 1 \\ \rightarrow y = z \Rightarrow \\ \rightarrow z = 0 \end{array}$ $\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}$

Ejercicio 2

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & 7 & 12 \end{vmatrix} = 12 - 2.7.4 - 4.7 + 3.2.12 = 0 \Rightarrow$ no invertible

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 + 3.4 - 1 - 3^2 = 3 \Rightarrow$ invertible

Hallemos B^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \leftarrow -3F_3 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -8 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \leftarrow +11F_1 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 11 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \leftarrow \tfrac{1}{3} \\ \leftarrow - \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \leftarrow -F_2 \\ \\ \leftarrow +F_2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & \frac{-8}{3} & \frac{-1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right) \underset{\text{reordeno}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -8/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 11/3 & 1/3 \end{array}\right.$$

(b)

$$A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & 7 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \\ 9 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

$$A.B = \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & 7 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 & 20 & 16 \\ 3 & -1 & -1 \\ 33 & 62 & 50 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 7 \\ 15 & 17 & 14 \end{pmatrix}$$

(c) $$X = A.B + B^2 = \begin{pmatrix} 13 & 20 & 16 \\ 3 & -1 & -1 \\ 33 & 62 & 50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 7 \\ 15 & 17 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 25 & 20 \\ 7 & 7 & 6 \\ 48 & 79 & 64 \end{pmatrix}$$

ercicio 3

(a)

$$(r)\begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases} \qquad (r')\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$$

(b)

$$(r)\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} \qquad (r')\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\\ 3\\ 0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

no son paralelas

$(r \cap r')$ sustituyo paramétricas de (r) en reducidas de (r')

$0+\lambda=3 \rightarrow \lambda=3$ ✓

$0+\lambda=3 \rightarrow \lambda=3$ ✓

se cortan en $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\\ 3\\ 0\end{pmatrix}$

(c)

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\\ 3\\ 0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

implícita:

$$0 = \begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & y-3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x-3-(y-3) \Rightarrow \boxed{x-y=0}$$

Ejercicio 4

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ \leftarrow -F_1 \\ = \\ \leftarrow -F_1 \\ \leftarrow -F_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ x-1 & 1-x & 0 & 0 \\ x-1 & 0 & 1-x & 0 \\ x-1 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (x-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)^3 \cdot \left(-x \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{-1} - 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}_{-1+x+x} \right) = (x-1)^3 \cdot (x+1-x-x^2) =$$

$$= (x-1)^3 \cdot (1-x^2)$$

la matriz es invertible $\Leftrightarrow$ su det. es $\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $x \neq \pm 1$