Examen de Matemática I
Viernes 6 de Diciembre de 2013

El examen dura tres horas, es individual y sin material. El mismo es múltiple opción y vale un total de 100 puntos. Se aprueba con 50 puntos.
Son 8 ejercicios en total, 5 de múltiple opción y 3 para escribir el resultado correcto. Las respuestas correctas suman $12,5$ puntos. Las respuestas incorrectas en la sección múltiple opción restan 3 puntos. Las respuestas incorrectas en la otra sección no alteran el puntaje. No responder no altera el puntaje.
Entregue solamente la hoja de la propuesta. En los ejercicios 1-5, indique cuál de las soluciones es verdadera encerrándola en un círculo. Hay una única. En los ejercicios 6-8, escriba el resultado correcto.
Éxitos!

Nombre y Cédula:

Ejercicio 1
Dadas las funciones $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \;/\; f(x) = x - 1$, $g(x) = x^2 - 3x$, entonces

1. Ambas funciones son inyectivas,
2. Ambas funciones son sobreyectivas,
3. La función f es biyectiva pero g no lo es,
4. La función g es biyectiva pero f no lo es,
5. Ninguna de las anteriores

Ejercicio 2 Considere la función definida en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ según la fórmula $f(x) = \frac{1+\cos(e^x-1)}{x^2}$. Se desea definirla en 0 de modo que quede continua. Entonces

1. Debe ser $f(0) = 0$.
2. Debe ser $f(0) = 2$.
3. Debe ser $f(0) = \frac{1}{2}$.
4. Debe ser $f(0) = 1$.
5. No se puede definir $f(0)$ de manera que f resulte continua en 0.

Ejercicio 3 Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ con α, $\beta \in \mathbb{R}$.

1. Si $\alpha = 2$ y $\beta = 1$, entonces $det(A) = -1$.
2. Si $\beta = 2$, entonces $det(A) = 0$ si y sólo si $\alpha = 2$ o $\alpha = -1$.
3. Si $\alpha = 0$, entonces $\det(A) < 0$ para todo $\beta \in \mathbb{R}$.
4. Si $\alpha = 1$ y $\beta = -1$, entonces $det(A) = 0$.
5. Si $\beta = \alpha^2$, entonces $det(A) = 0$ para $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4 Sean $A = \{x \in \mathbb{R}$ tales que $3x + 1 > x + 9$ y $x + 5 < 2 - 3x\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R}$ tales que $2x - 6 < 0$ y $x - 4 > -5\}$. Entonces,

1. B no está acotado superiormente.
2. B no está acotado inferiormente.
3. A y B tienen algún elemento en común.
4. A es vacío.
5. Ninguna de las anteriores

Ejercicio 5 Sean la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & a^2 \end{pmatrix}$,

el vector $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, y el vector de incógnitas

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Entonces:

1. si $a = 1$, el sistema $AX = b$ es incompatible para todo vector b.

2. existen valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $AX = b$ es compatible indeterminado para todo vector b.

3. si $a = 0$, el sistema $AX = b$ es incompatible para todo vector b.

4. el sistema $AX = b$ es compatible determinado cualesquiera sean $a \in \mathbb{R}$ y el vector b

5. existen valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $AX = b$ es compatible determinado para todo vector b.

Ejercicio 6 Una ecuación implícita del plano que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es paralelo al plano $x + 3y - 2z = 4$ es ....

Ejercicio 7 La sucesión definida por $x_0 = 0$ y $x_{n+1} = \frac{1}{2-x_n}$ tiene límite ....

Ejercicio 8 La matriz inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$.