Sistemas Lineales 2

Examen, julio de 2015

- Escriba **nombre y apellido** en todas las hojas.
- Utilice las hojas de un solo lado. Resuelva problemas diferentes en hojas diferentes.
- Sea prolijo. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Explique y detalle todos sus pasos. Si algo no es claro para el evaluador, Ud. podría perder los puntos de la pregunta.
- Al entregar cuente las hojas y firme la planilla.
- No escriba ni raye el sobre.

Problema 1

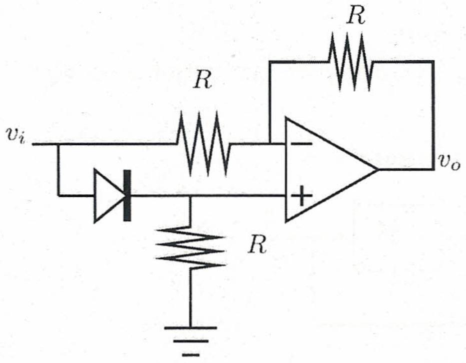


Figura 1:

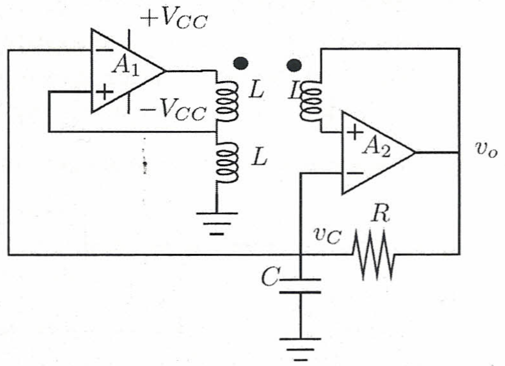


Figura 2:

a. En el circuito de la figura 1, hallar v_o en función de v_i.

b. En el circuito de la figura 2 el operacional A_1 funciona en zona no lineal y el operacional A_2 en zona lineal, ambos son ideales y el transformador es perfecto. Además en $t = 0$ el condensador está cargado a $\frac{-V_{cc}}{2}$, las bobinas descargadas y A_1 está saturado a $+V_{cc}$.
Se pide hallar y dibujar $v_C(t)$ y $v_o(t)$ hasta que el sistema llegue al régimen y calcular el período de v_C y v_o en régimen.

c. Mostrar que la señal v_o en la figura 3 resulta ser un diente de sierra de período $2RC$.

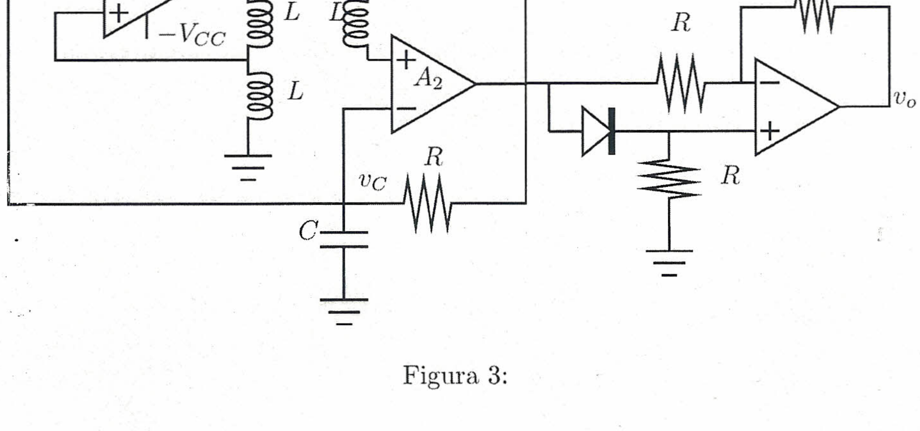
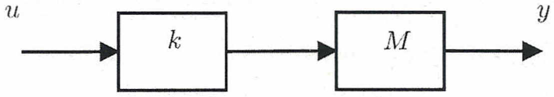


Figura 3:

Problema 2

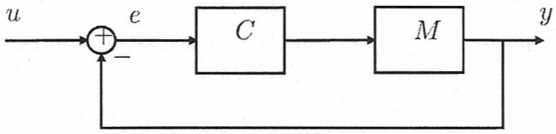
La transferencia $M(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_0}{s+\omega_0}$, $\omega_0 > 0$ describe un modelo simplificado de un motor de corriente continua, con la tensión de alimentación como entrada ($u(t)$) y la frecuencia angular de giro de su eje como salida ($y(t)$).

1. Se propone en primera instancia la siguiente forma de conexión, donde la alimentación del motor es amplificada por un bloque de ganancia $k \geq 0$.



   a) Estudiar la estabilidad del sistema en función de $k \geq 0$.
   b) Para una entrada del tipo escalón ($u(t) = Y(t)E$):
      1) Calcular la respuesta $y(t)$ $\forall t \geq 0$.
      2) Calcular el valor final de la respuesta en régimen.
      3) Calcular el tiempo de asentamiento (tiempo necesario para que la respuesta $y(t)$ alcance el 95 % de su valor en régimen), **ver nota**.

2. Suponga el esquema de conexión realimentado de la siguiente figura:



   a) Para el caso de $C(s) = k$, $k > 0$: repetir los cálculos de la parte **1**. Para comparar estos resultados con los de la parte 1, grafique las respuestas $y(t)$ en un caso y otro en los mismos ejes e indique en la gráfica los valores respectivos de valores finales y tiempo de asentamiento.
   b) Calcular el valor final del error ($e(t) = u(t) - y(t)$) en régimen para una entrada escalón.
   c) Para el caso de $C(s) = \frac{k\omega_0^2}{s(s+10\omega_0)}$, $k \geq 0$ estudiar la estabilidad del sistema en función de $k \geq 0$ mediante el criterio de Nyquist y
   d) calcular el valor final de la respuesta en régimen y del error en régimen ante una entrada escalón.

Nota: $e^{-3} \approx 0{,}05$.

Problema 3

Considere los circuitos de las figuras 4 y 5, donde los amplificadores operacionales son ideales.

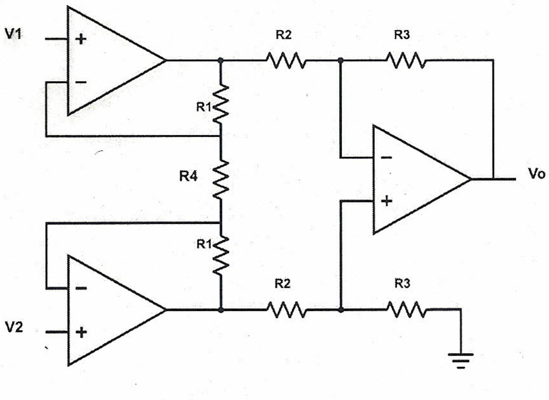


Figura 4:

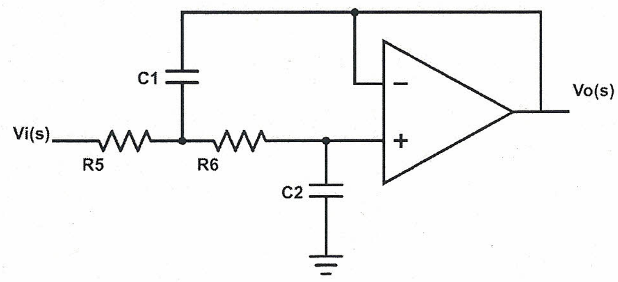


Figura 5:

a. Calcule V_o en función de V_1, V_2 para la figura 4.

b. Calcule la impedancia vista en cada entrada y a la salida.

La siguiente es la transferencia de un filtro Butterworth de segundo orden y frecuencia de corte ω_c:

$$H(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + \omega_c^2}.$$

c. Realice el diagrama de Bode de amplitud y fase calculando e indicando la respuesta en continua, la respuesta (módulo y fase) en la frecuencia de corte y la velocidad de caída (dB/dec) en alta frecuencia.

d. Calcule las condiciones que deben cumplir R_5, R_6, C_1, C_2 en el circuito de la figura 5 para que el circuito se comporte como un filtro Butterworth de segundo orden y frecuencia de corte ω_c.

e. Calcule la impedancia vista a la entrada.

Los circuitos de las figuras 4 y 5 se conectan según la figura 6 . Suponga que se dan las condiciones de la parte d y que $R_1 = R_2 = R_3 = R4$.

f. Calcule la salida $V_o(t)$ en régimen para

$$V_1(t) = Y(t)[1 + cos(10\omega_c t) + sen(\omega_c t)],$$

$$V_2(t) = Y(t)[1 + cos(10\omega_c t) - sen(\omega_c t)].$$

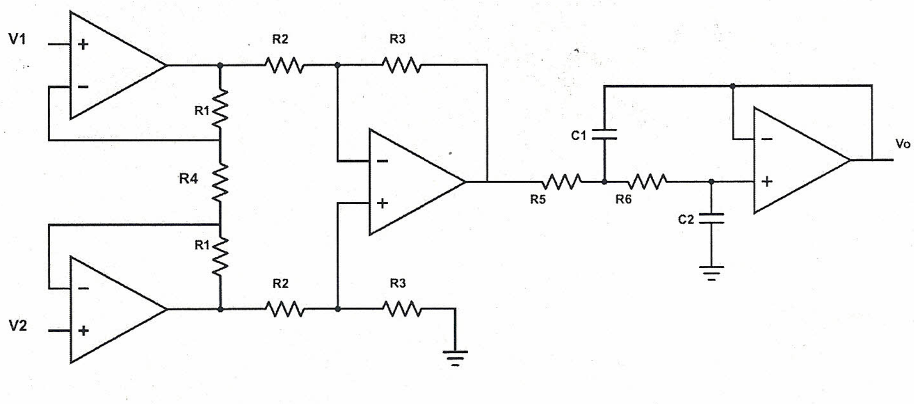


Figura 6:

Problema 0

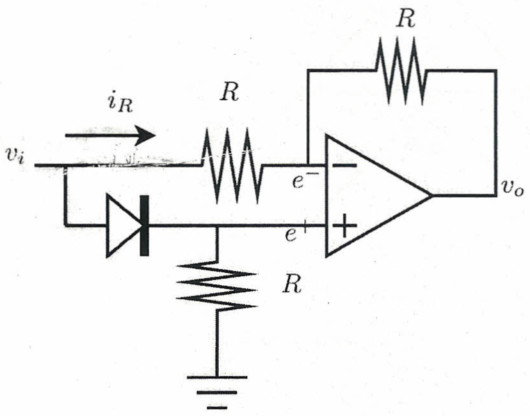


Figura 1:

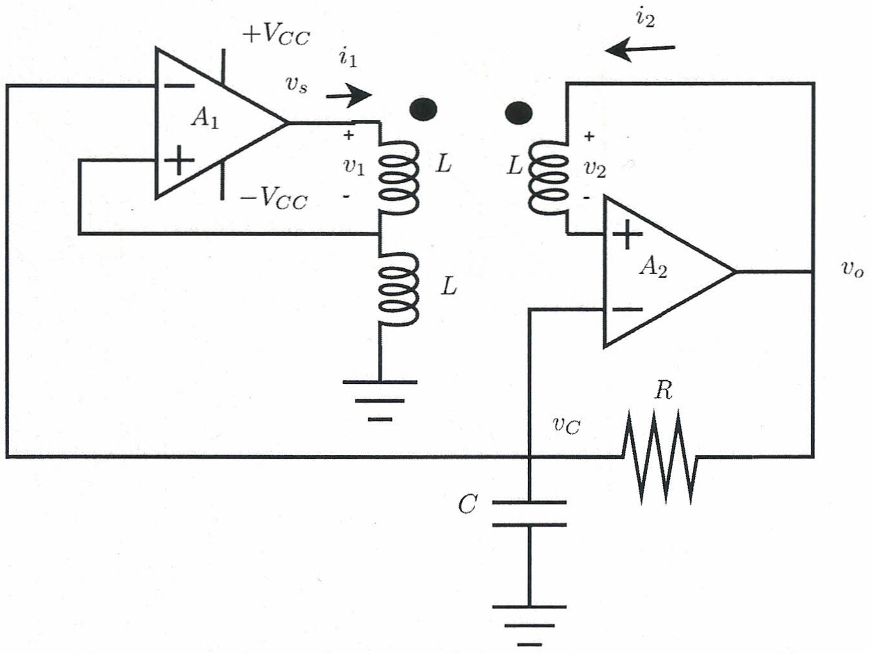


Figura 2:

a. Discutimos según el signo de v_i:

- Cuando $v_i \geq 0$ suponemos que el diodo conduce, lo cual se verifica automáticamente ya que $i_D = \frac{v_i}{R} \geq 0$. Por el cortocircuito virtual tenemos $e^- = v_i$ por lo que $i_R = 0$ y $v_o = v_i$
- Cuando $v_i < 0$ el diodo está abierto, esto se verifica viendo que $v_D = v_i < 0$ por lo que $e^+ = 0$ y el amplificador se comporta como un inversor, o sea $v_o = -v_i$

En resumen el circuito hace una rectificación de onda completa $v_o = |v_i|$.

b. El transformador es perfecto por lo que $M = \sqrt{LL} = L$

Notando que $I2 = 0$ $V_1(s) = LsI_1$ y $V_2 = LsI_1$

$V_s = 2LsI_1 = 2V_1 = 2E^+$

Por lo tanto $e^+ = \frac{v_s}{2} = v_1 = v_2$.

Finalmente tenemos que $v_2 = v_r$ por cortocircuito virtual. O sea $v_2 = Ri = RC\frac{d}{dt}v_c$ entonces:

$$v_c(t) = v_C(0) + \frac{1}{RC}\int_0^t v_2(u)du = v_C(0) + \frac{1}{2RC}\int_0^t v_s(u)du$$

$$v_o(t) = v_C(t) + \frac{v_s}{2}$$

En $t = 0$, A_1 esta saturado a $v_s = +V_{CC}$ y $v_C(0) = -\frac{V_{CC}}{2}$

Por las cuentas que hicimos antes: $e^+ = V_{CC}/2$, $e^-(0) = v_C(0) = -V_{CC}/2$ y verificamos que $e^+ > e^-$ mientras esa relación se mantenga el operacional seguirá saturado a $+V_{CC}$.

Para $t \geq 0$ mientras siga el operacional saturado se cumple $\boxed{v_C(t) = -\frac{V_{CC}}{2} + \frac{V_{CC}}{2RC}t}$, $\boxed{v_o(t) = \frac{V_{CC}}{2RC}t}$

Esto se cumple hasta que $v_c(t_1) = e^+(t_1) = \frac{V_{CC}}{2}$. Esto se da para $t_1 = 2RC$

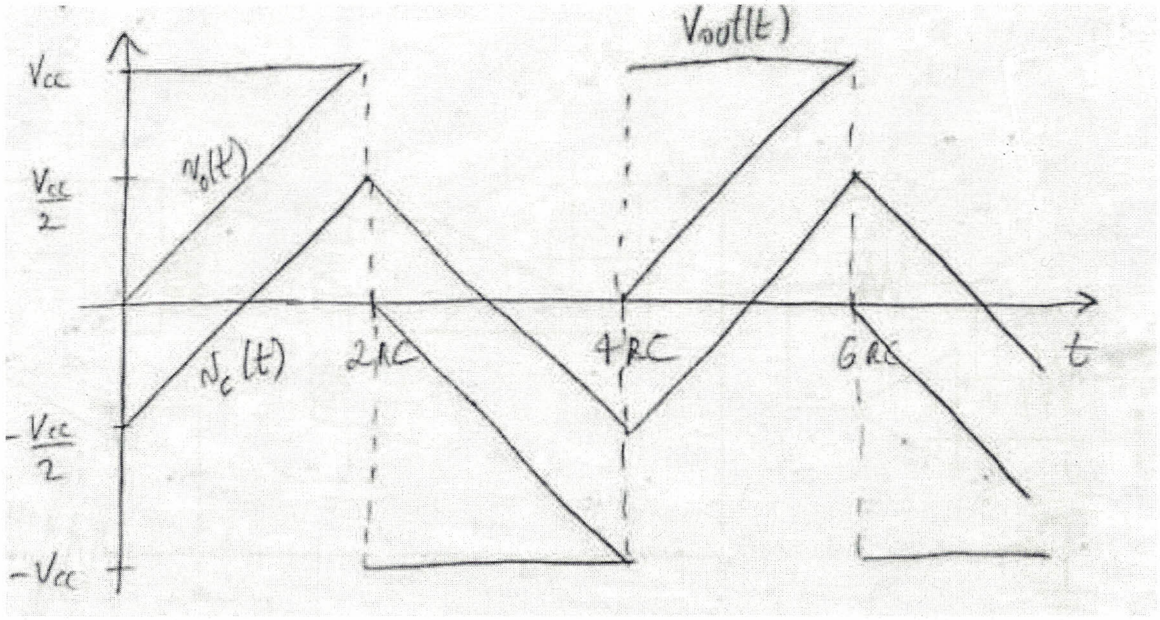


Figura 3:

Sea $t' = t - t_1$ y asumiendo ahora A_1 saturado a -V_{CC}.

$v_C(t' = 0) = V_{CC}/2$, $e^+ = -V_{CC}/2$.

Usando las relaciones que ya conocemos entre v_c y v_s tenemos: $\boxed{v_C(t') = \frac{V_{CC}}{2} - \frac{V_{CC}}{2RC}t'}$, $\boxed{v_o(t') = -\frac{V_{CC}}{2RC}t'}$

Esto se verifica hasta que $e^- = e^+ = \frac{-V_{CC}}{2}$, esto ocurre para $t' = 2RC$ nuevamente. En ese momento A_1 está saturado a V_{CC}y el condensador tiene el mismo valor que al comienzo por lo que llegamos al régimen y el período de v_C y v_o es $4RC$.

c. Usando la primera parte v_o es ahora el valor absoluto de la v_o de la parte anterior por lo cual las rampas negativas quedan positivas y nos queda una diente de sierra de alto V_{CC} y período $2RC$.

Sistemas Lineales 2

Problema 2: Solución

1. (a) $H(s) = \frac{k\omega_0}{s+\omega_0}$ estable $\forall k$ (polo en $s_0 = -\omega_0$).
   i. $u(t) = EY(t) \Rightarrow Y(s) = \frac{E}{s}\frac{k\omega_0}{s+\omega_0} = kEY(t)(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\omega_0} \Rightarrow y(t) = kEY(t)(1-e^{-\omega_0 t})$.
   ii. $y(t) \to kE$ o $Y(s)s = \frac{ek\omega_0}{s+\omega_0} \to kE$.
   iii. $y(t^*) = 0.95kE = (1-e^{-3})kE \Rightarrow t^* = \frac{3}{\omega_0}$.

2. (a) $H(s) = \frac{C(s)H(s)}{1+C(s)H(s)} = \frac{k\omega_0}{s+(k+1)\omega_0}$ estable $\forall k$.
   i. $y(t) = \frac{k}{k+1}EY(t)(1-e^{-\omega_0(k+1)t})$.
   ii. $y(t) \to \frac{k}{k+1}E$.
   iii. $t^* = \frac{3}{(k+1)\omega_0}$.

   (b) $e(t) \to \frac{1}{k+1}E$.

3. $-G_{ol} = \frac{k\omega_0^3}{s(s+\omega_0)(s+10\omega_0)}$. El diagrama de bode y Nyquist se presenta en las siguientes figuras:

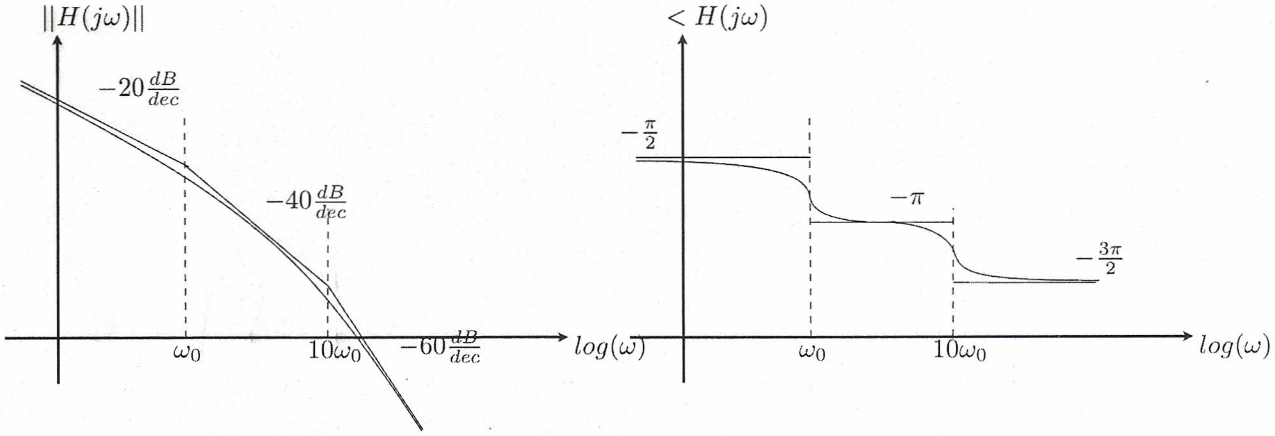


Figure 1:

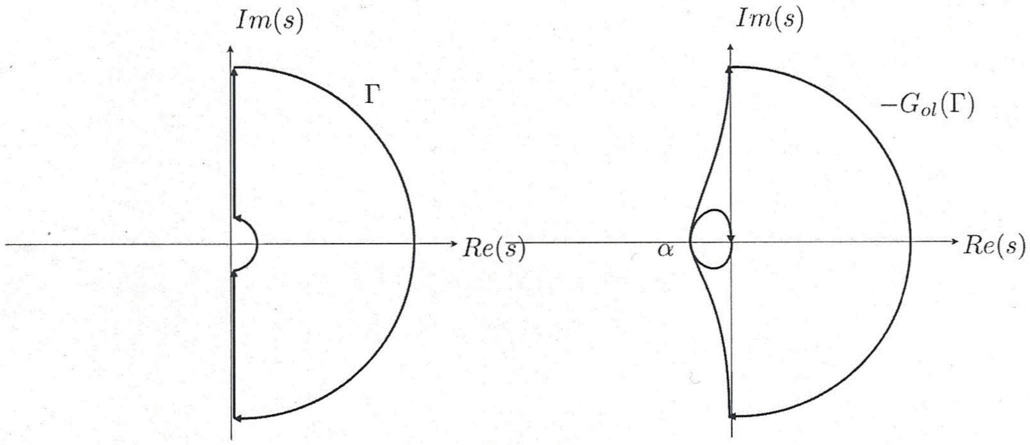


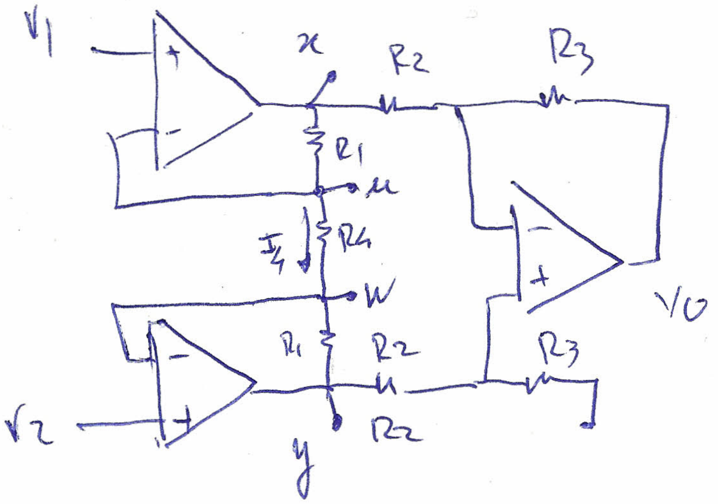
Figure 2:

$-G_{ol}(re^{j\theta}) \approx \frac{k\omega_0^3}{10\omega_0^2 re^{j\theta}}$. El cruce del diagrama por el semieje real negativo se da en α, calculado del siguiente modo: $\frac{k\omega_0^3}{j\omega_\alpha(j\omega_\alpha+\omega_0)(j\omega_\alpha+10\omega_0)} = \alpha \Rightarrow \omega_\alpha = \sqrt{10}\omega_0, \quad \alpha = -\frac{k}{110}$. Para que el sistema sea estable el número de vueltas de la curva de Nyquist entorno al $-1+j0$ debe ser cero, entonces $\alpha = -\frac{k}{110} < -1 \Rightarrow k > 110$.

4. $H(s) = \frac{k\omega_0^3}{s(s+\omega_0)(s+10\omega_0)+k\omega_0^3}$, para los valores de k que aseguran la estabilidad del sistema (obtenidos en la parte anterior), ante una entrada escalón: $u(t) = EY(t) \Rightarrow sY(s) = H(s).\frac{E}{s}s \rightarrow EH(0) = y(+\infty) = E$. $e(+\infty) = 0$.

Solución Problema 3. Ex Julio 2015

SISTEMAS LINEALES 2



Por tierra virtual

$u = V_1$

$w = V_2$

$\Rightarrow I_4 = \dfrac{V_1 - V_2}{R_4}$

$\Rightarrow x = V_1 + R_1 I_4$

$$\boxed{x = V_1 + \frac{R_1}{R_4}(V_1 - V_2)}$$

$$\boxed{y = V_2 - \frac{R_1}{R_4}(V_1 - V_2)}$$

$$V_o = -\frac{R_3}{R_2} x + y \frac{R_3}{R_3 + R_2}\left[1 + \frac{R_3}{R_2}\right]$$

$$V_o = -\frac{R_3}{R_2} x + \frac{R_3}{R_2} y = \frac{R_3}{R_2}(y - x) = \frac{R_3}{R_2}\left[V_2 - V_1 - \frac{2R_1}{R_4}(V_1 - V_2)\right]$$

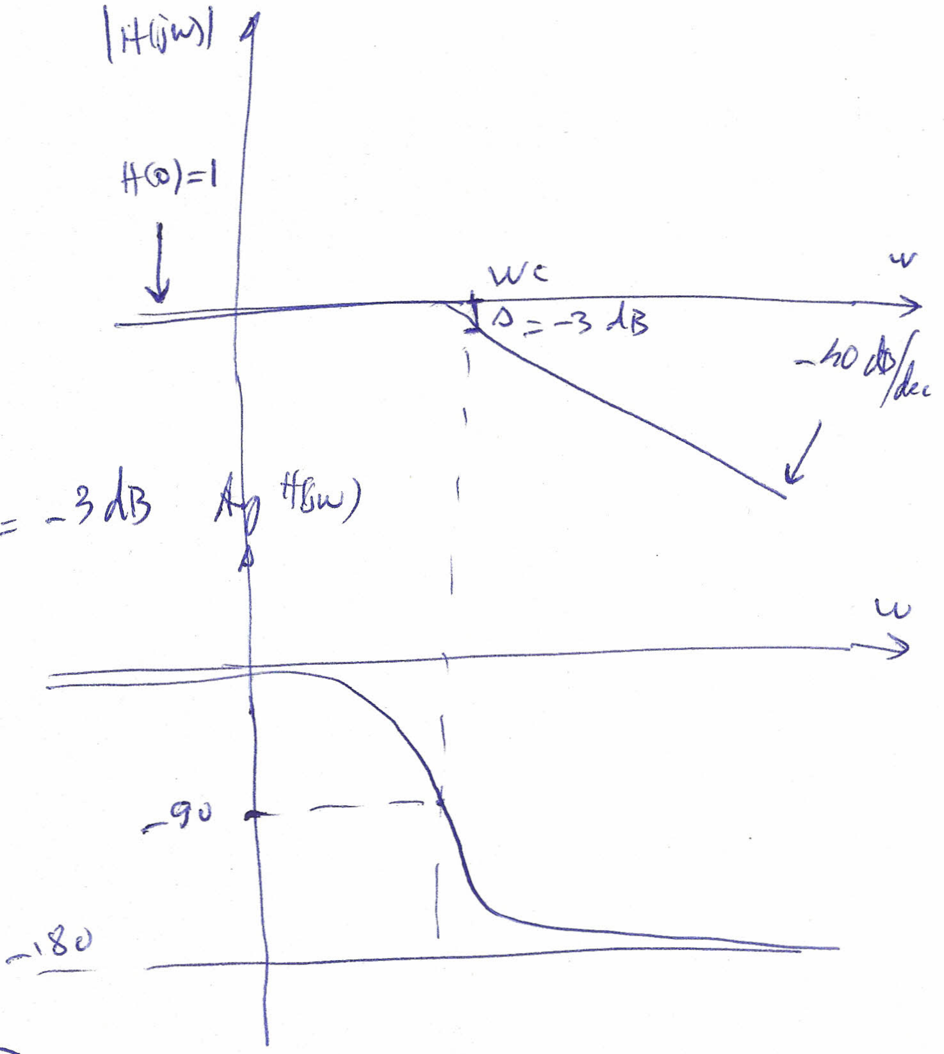
$$\Rightarrow \boxed{V_o = -\frac{R_3}{R_2}\left(1 + \frac{2R_1}{R_4}\right)(V_1 - V_2)} \quad a$$

b) $Z_{in} = \infty$ en ambas entradas, (op ideal).

$Z_{out} = 0$, operacional ideal realimentado.

e.

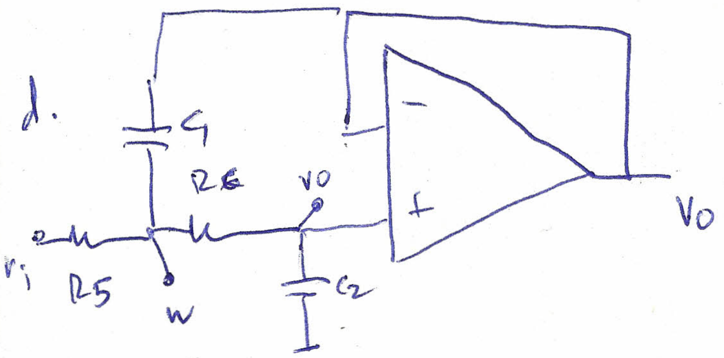
$$H(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\,\omega_c s + \omega_c^2}$$



$$\Delta = H(j\omega_c)\Big|_{dB} - 0 =$$

$$= \left|\,\left|\frac{\omega_c^2}{j\sqrt{2}\,\omega_c^2}\right|\,\right|_{dB} = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|_{dB} = -3\,dB$$

d.



$$\begin{cases} \dfrac{w - V_i}{R_5} + \dfrac{w - V_o}{R_6} + C_1 s\,(w - V_o) = 0 \\[2ex] V_o = \dfrac{\frac{1}{C_2 s}}{R_6 + 1/C_2 s}\, w \end{cases} \Rightarrow \boxed{V_o = \frac{1}{1 + R_6 C_2 s}\, w}$$

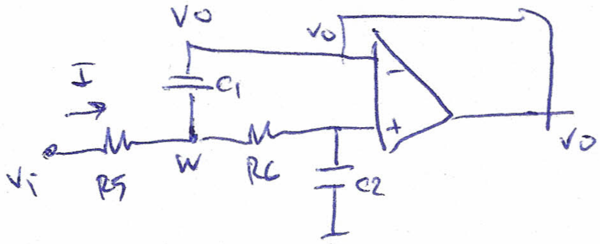
$$\Rightarrow \boxed{\frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{R_5 R_6 C_1 C_2 s^2 + (R_5 + R_6) C_2 s + 1}}$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{1}{R_5R_6C_1C_2}}{s^2 + \frac{(R_5+R_6)C_2}{R_5R_6C_1C_2}s + \frac{1}{R_5R_6C_1C_2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{w_c^2 = \frac{1}{R_5R_6C_1C_2};}$$

$$\boxed{\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{R_5R_6C_1C_2}} = \frac{(R_5+R_6)}{R_5R_6 \cdot C_1}.}$$

e.



$$I = \frac{V_i - W}{R_5} = \frac{V_i - (1 + R_6C_2s)V_o}{R_5} = \frac{V_i - (1+R_6C_2s)H(s).V_i}{R_5}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1 - (1+R_6C_2s)H(s)}{R_5} . V_i$$

$$\Rightarrow Z_{in} = \frac{V_i}{I} = \frac{R_5}{1-(1+R_6C_2s)H(s)}$$

f. $$V_o(s) = -\frac{R_3}{R_2}\left(1 + 2\frac{R_1}{R_4}\right). H(s) . [V_1(s) - V_2(s)]$$

$$\Rightarrow W(s) = -3H(s)\,(V_1(s) - V_2(s))$$

4.

$V_1(t) - V_2(t) = 2\, Y(t)\, \sin w_c(t)$

$\Rightarrow$ en régimen $\quad V_0(t) = 2\left[-3\,|H(jw_c)|\right] \sin\left(w_c t + \mathrm{Arg}\, H(jw_c)\right)$

$|H(jw_c)| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\mathrm{Arg}\, H(jw_c) = -\pi/2.$

$\Rightarrow \boxed{V_0(t) = -6\,\dfrac{\sqrt{2}}{2} \sin(w_c t - \pi/2)}$