Deconvolución de imágenes: Aplicaciones de la SVD

Pablo Musé

pmuse@fing.edu.uy

Departamento de Procesamiento de Señales
Instituto de Ingeniería Eléctrica
Facultad de Ingeniería

5 de noviembre de 2012

Motivación

Todas las imágenes que adquirimos con un cámara, telescopio, microscopio, etc, son (en mayor o menor medida) borrosas

Causas extrínsecas

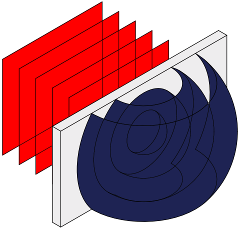
Mala utilización de la cámara, características de la escena

- Captura fuera de foco
- Solo cierto rango de profundidades en foco
- Vibración o movimiento de la cámara
- Movimiento de la escena

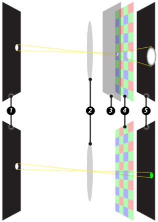
Causas intrínsecas a la cámara

Fenómenos ópticos y de construcción

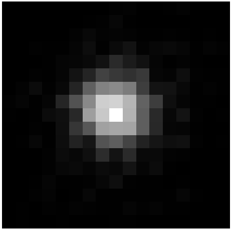
- Difracción de la luz
- Aberraciones de los lentes
- Promediado en los captores



Difracción



Formación de imagen



Point Spread Function

Modelo de formación de la imagen (niveles de gris)

- **Dominio de la imagen:** $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, típicamente rectángulo.
- **Imagen "verdadera":** $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
- ***Point spread function*** - respuesta a un fuente puntual, respuesta del sistema de adquisición: $h : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
- **Ruido de adquisición** (fotónico, térmico, cuantificación): n (carácter aleatorio, cierto conocimiento estadístico).

Imagen observada o adquirida

$$\boxed{g = h * f + n}$$

En imágenes digitales

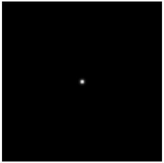
u, h, v, n definidos en una grilla rectangular de $L \times M = N$ pixels, $g(i,j) = (h * f)(i,j) + n(i,j)$.

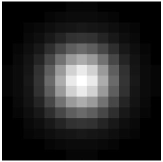
$$\xrightarrow{\text{vectorización}} \boxed{\mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{f} + \mathbf{n}}, \quad \text{con } \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{n} \in \mathbb{R}^{N \times 1}, \ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}.$$

Ejemplos de PSF y efectos

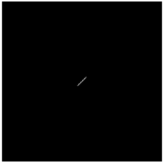
Original

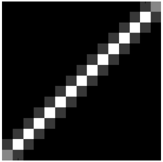
Gaussiana isotrópica





Movimiento





Deconvolución

Objetivo

Dada la imagen observada g, recuperar la imagen original f.

Dos versiones del problema

- Deconvolución ciega: h es desconocido y se estima conjuntamente con f.
- Deconvolución no ciega: conocemos h (se calibra previamente; ejemplos: microscopía, astronomía). **HOY**

Solución naïve

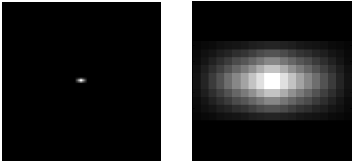
$$\mathbf{f}_{\text{naïve}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{g} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{f} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{n} = \mathbf{f} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{n}.$$

¿Tiene sentido? ¿Andará bien?

Solución naïve: resultados

Original f

Point spread function h



$h * f$

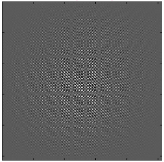
$\mathbf{n} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I}_N)$

$g \ (\sigma = 0)$

$f_{\text{naïve}}$

$g \ (\sigma = 0.01)$

$f_{\text{naïve}}$



Análisis de la solución naïve (1)

Descomposición SVD de $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T}, \text{ donde } \mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}_N, \quad \mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}_N,$$

$$\mathbf{\Sigma} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n), \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_N \geq 0.$$

Suponemos por ahora que $\sigma_N > 0$. Entonces $\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^T}$.

Representación útil

$$\mathbf{A} = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \ldots\ \mathbf{u}_N]\,\mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N)\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_N^T \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$$

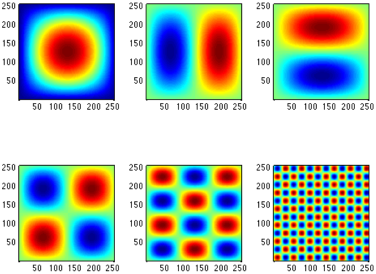
Idem: $\mathbf{A}^{-1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i}\mathbf{v}_i\mathbf{u}_i^T$

Análisis de la solución naïve (2)

$$\mathbf{f}_{\text{naïve}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{g} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i}\mathbf{v}_i\mathbf{u}_i^T\mathbf{g} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\mathbf{u}_i^T\mathbf{g}}{\sigma_i}\right)\mathbf{v}_i$$

Es una expansion en la base de los vectores singulares derechos

Desvectorizando: $f_{\text{naïve}}(m,n) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\mathbf{u}_i^T\mathbf{g}}{\sigma_i}\right) v_i(m,n)$.



Seis componentes v_i de la base de vectores singulares derechos para la PSF Gaussiana

Análisis de la solución naïve (3)

Error de estimación

$$\mathbf{f}_{\text{naïve}} - \mathbf{f} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{n} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{n}}{\sigma_i} \right) \mathbf{v}_i$$

Características del problema de deconvolución

- Usualmente $\left|\mathbf{u}_i^T \mathbf{n}\right|$ pequeños y del mismo orden de magnitud $\forall\, i$.
- Los valores singulares decaen a valores cercanos a cero $\Rightarrow$ $\mathrm{cond}(\mathbf{A}) = \sigma_1/\sigma_N$ **muy grande**, probema mal condicionado.
- Los vectores singulares correspondientes a σ_i chicos generalmente representan información de alta frecuencia.

Consecuencia del enfoque naïf

Cuando i crece, $\frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{n}}{\sigma_i}$ crece rápidamente (excitación del ruido) amplificando los $\mathbf{v}_i$ de alta frecuencia.

Regularización por filtrado espectral

El principio

Veremos dos métodos simples que conducen a una mejor restauración, basados en el principio de considerar pesos w_i de forma que

$$\mathbf{f}_{\text{estimado}} = \sum_{i=1}^{N} w_i \left(\frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{g}}{\sigma_i} \right) \mathbf{v}_i, \quad \text{con } \frac{w_i}{\sigma_i} \longrightarrow 0 \text{ si } \sigma_i \to 0.$$

- Truncado de la SVD
- Regularización de Tikhonov

Truncado de la SVD (TSVD)

Para algún $k < N$, $w_i = 1$ si $i \leq k$, $w_i = 0$ si $i > k$:

$$f_{\text{TSVD}} = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{g}}{\sigma_i} \right) \mathbf{v}_i = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \ldots \ \mathbf{v}_k] \, (\operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k))^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_N^T \end{bmatrix}.$$

Regularización de Tikhonov

$$\forall\ i = 1, 2, \ldots, N, \quad w_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda} \quad \text{con } \lambda > 0.$$

$$\mathbf{f}_\lambda = \sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda} \left(\mathbf{u}_i^T \mathbf{g} \right) \mathbf{v}_i .$$

Interpretación

- $\mathbf{f}_\lambda$ es la solución al problema $\min_{\mathbf{f}} \left\{ \|\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{f}\|_2^2 \right\}$.
- El segundo término impide que $\|\mathbf{f}\|_2^2 = \sum_{i=1}^N \frac{\left(\mathbf{u}_i^T \mathbf{g}\right)^2}{\sigma_i^2}$ crezca demasiado
- λ se llama parámetro de regularización: controla el compromiso entre ajuste al dato observado y la regularidad de la solución frente a ruido.

Resultados

Dato $\mathbf{g}$

TSVD ($k = 1798$, tol $= 0.5$)

Tikhonov ($\lambda = 0.0016$)

Original $\mathbf{f}$

TSVD ($k = 6040$, tol $= 0.1$)

Tikhonov ($\lambda = 0.01$)