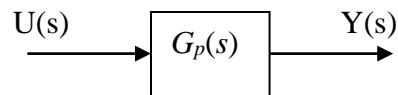


17 CONTROL POR MODELO INTERNO (IMC)

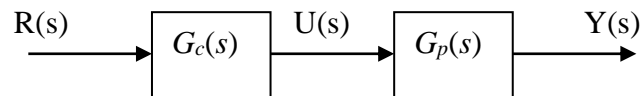
*CONTROL EN BUCLE ABIERTO*

La metodología de diseño denominada control por modelo interno (“Internal Model Control”) se deriva lógicamente del intento de realizar lo que se denomina control en bucle abierto, o sea intentar el control del proceso sin tener en cuenta la retroalimentación. Por lo tanto, comenzaremos primero por analizar estos conceptos.

Como en este caso no se mide la variable de salida a controlar es necesario contar con algún tipo de modelo del proceso que nos permita predecir la salida en función de la entrada. Supongamos que tenemos el proceso caracterizado por la función de transferencia  $G_p(s)$



Consideremos que deseamos determinado comportamiento de la variable de salida  $Y$ , dado por el set point  $R$  y que se concreta mediante un controlador que manipula la entrada  $U$ :



Se trata entonces de diseñar  $G_c$  de modo de obtener el comportamiento deseado.

*Ley de control estática*

La ley de control más simple que se puede proponer es que sea constante,  $G_c = K_c$ . Supongamos que el proceso es de primer orden  $G_p(s) = K_p / (\tau_p s + 1)$  Entonces la relación entre la entrada  $R$  y la salida  $Y$  es

$$Y(s) = \frac{K_c K_p}{\tau_p s + 1} R(s)$$

Si ocurre un cambio en el set point en escalón de altura  $M$

$$Y(s) = \frac{K_c K_p M}{\tau_p s + 1} \frac{1}{s}$$

Y la respuesta en el dominio del tiempo es

$$y(t) = K_c K_p M (1 - e^{-t/\tau_p})$$

Obsérvese que para que no haya offset debe elegirse  $K_c = 1/K_p$

Obsérvese también que la rapidez de la respuesta es la misma que la del proceso.

*Ley de control dinámica*

Con la intención de acelerar la respuesta del proceso puede pensarse en una ley de control dinámica. Idealmente la opción sería

$$G_c = \frac{1}{G_p}$$

De ese modo

$$Y(s) = G_c(s)G_p(s)R(s) = R(s)$$

Y tendríamos un control perfecto. Lamentablemente esto no es posible en cualquier aplicación práctica. En efecto la variable manipulable (intermedia) sería

$$U(s) = G_c(s)R(s) = \frac{\tau_p s + 1}{K_p} R(s)$$

que en el dominio del tiempo equivale a

$$u(t) = \frac{\tau_p}{K_p} \frac{dr}{dt} + \frac{1}{K_p} r(t)$$

Y obsérvese que en un salto en escalón de  $r$  es imposible definir la derivada (o bien, equivaldría a un pulso de altura infinita). Para que el sistema sea físicamente realizable el orden del denominador de la función de transferencia debe ser mayor o igual al del numerador. Por eso se propone utilizar un filtro

$$f(s) = \frac{1}{\lambda s + 1}$$

donde  $\lambda$  es el parámetro ajustable del filtro. El controlador quedaría de la siguiente manera:

$$G_c(s) = \frac{f(s)}{G_p(s)} = G_p^{-1}(s)f(s)$$

Y para un proceso de primer orden

$$G_c(s) = \frac{\tau_p s + 1}{K_p} \frac{1}{\lambda s + 1} = \left( \frac{1}{K_p} \right) \frac{\tau_p s + 1}{\lambda s + 1}$$

queda un controlador lead-lag. La respuesta de la variable de salida frente a cambios en el set point es

$$Y(s) = G_c(s)G_p(s)R(s) = f(s)R(s)$$

Y con el filtro elegido

$$Y(s) = \frac{1}{\lambda s + 1} R(s)$$

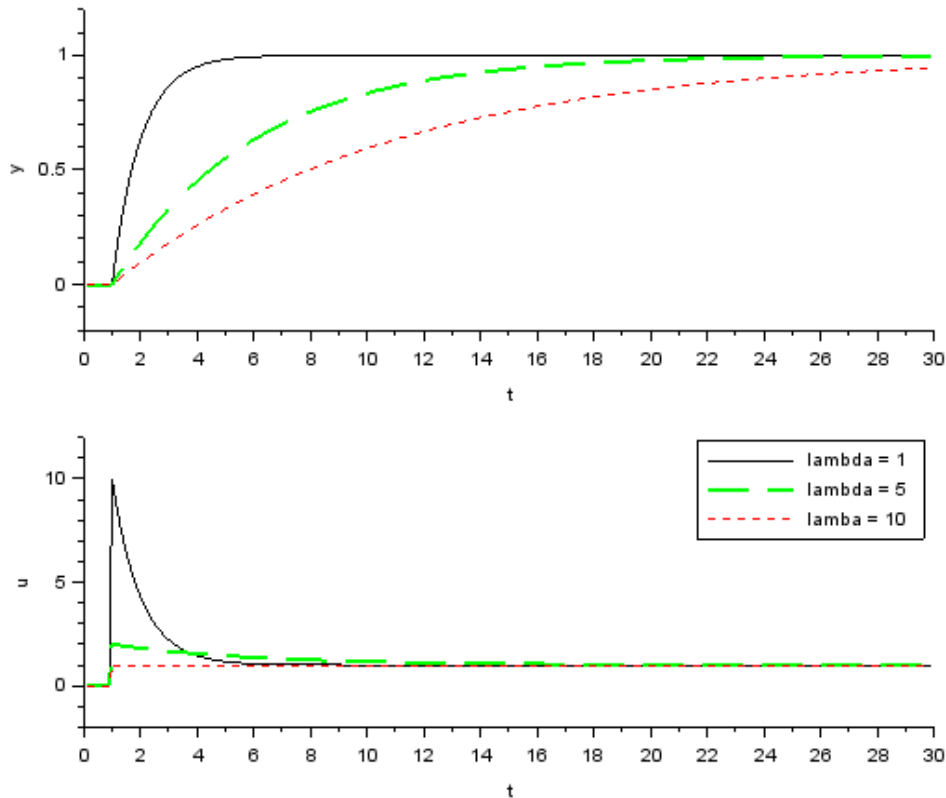
O sea va a tener una respuesta de primer orden con constante de tiempo  $\lambda$ . Cuanto más chico sea  $\lambda$  respecto a  $\tau_p$ , más rápida será la respuesta en comparación con el controlador estático. Si se hace un escalón de altura M en el set point la respuesta en la salida será

$$y(t) = M(1 - e^{-t/\lambda})$$

Pero atención que la variable intermedia tiene la siguiente dinámica

$$u(t) = \frac{M}{K_p} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\tau_p}{\lambda} \right) e^{-t/\lambda} \right]$$

En la figura siguiente se observa que esta variable intermedia puede llegar a tomar valores muy altos si se toma un  $\lambda$  muy chico.



*Sistemas con respuesta inversa*

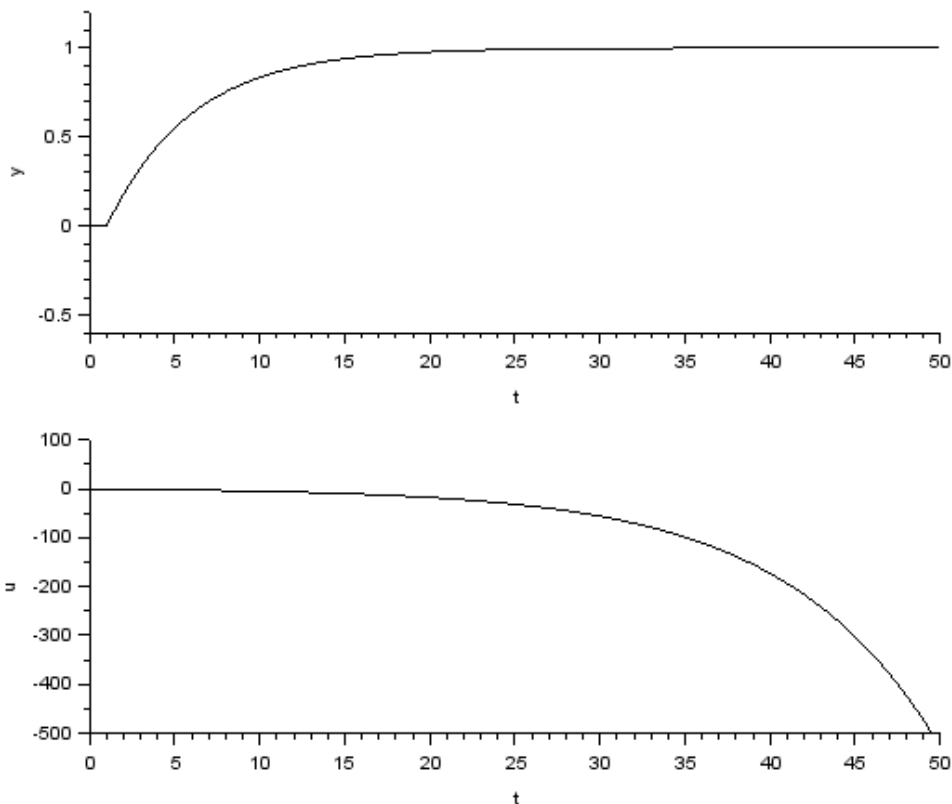
Considérese por ejemplo una función de transferencia del tipo

$$G_p(s) = \frac{K_p(-\beta s + 1)}{(\tau_{p1}s + 1)(\tau_{p2}s + 1)}$$

con  $\beta$  positivo estricto (sistemas con “right-half plane zeros”). Si seguimos el mismo procedimiento que antes

$$G_c(s) = \frac{1}{K_p} \frac{(\tau_{p1}s + 1)(\tau_{p2}s + 1)}{(-\beta s + 1)(\lambda s + 1)}$$

que tiene un polo positivo, y por lo tanto es inestable. Obsérvese que la inestabilidad es en la variable intermedia como puede verse en la siguiente figura, y no se observa al graficar la variable de salida:



Un camino para resolver el problema podría consistir en eliminar el término que está dando problemas en el denominador, pero entonces la función de transferencia queda impropia, esto es, físicamente no realizable. Por lo tanto se recurre a un filtro de segundo orden

$$f(s) = \frac{1}{(\lambda s + 1)^2}$$

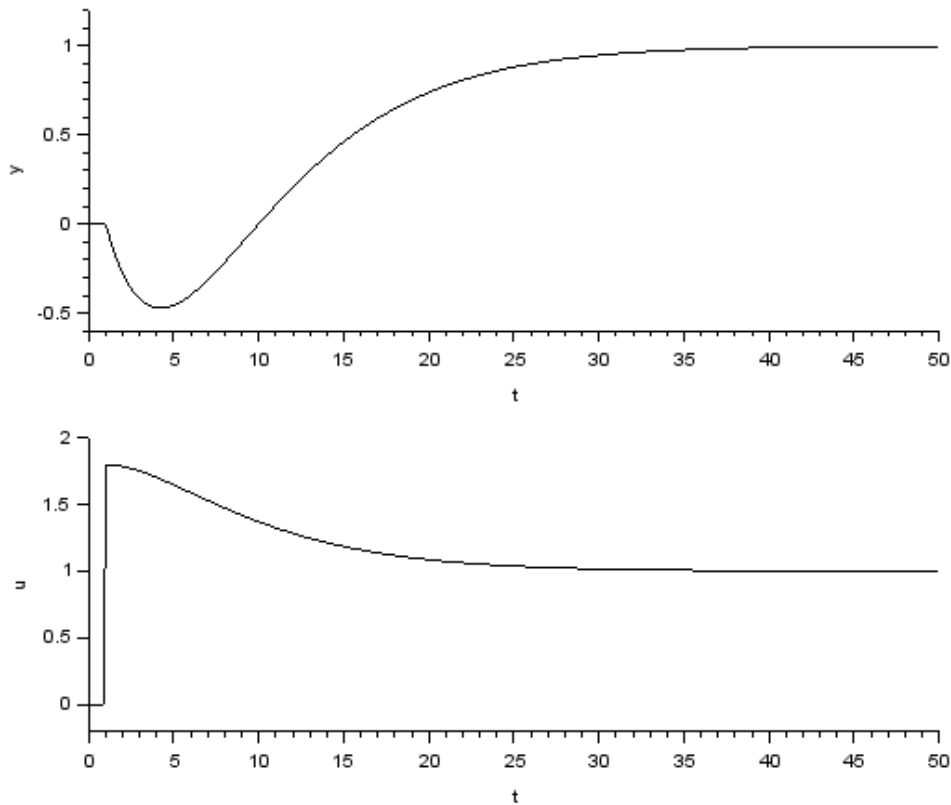
quedando el controlador

$$G_c(s) = \frac{1}{K_p} \frac{(\tau_{p1}s + 1)(\tau_{p2}s + 1)}{(\lambda s + 1)^2}$$

Y la salida

$$Y(s) = \frac{(-\beta s + 1)}{(\lambda s + 1)^2} R(s)$$

que también muestra respuesta inversa.



*PROCEDIMIENTO GENERAL*

Considérese un modelo de proceso  $G$ . El primer paso consiste en factorizar el modelo según  $G = G_+G_-$ , donde  $G_+$  contiene todos términos con “zeros” positivos y tiempos muertos, y que por lo tanto al invertir generan problemas;  $G_-$  contiene el resto del modelo. Luego, el controlador se determina según

$$G_c = \frac{1}{G_-} f$$

donde  $f$  es un filtro que de orden tal que la función del controlador sea propia (orden del denominador mayor o igual al del numerador).

Para la factorización suelen seguirse dos métodos:

- Factorización simple, por ejemplo  $G = (-\beta s + 1) \times \frac{K_p}{(\tau_{p1}s+1)(\tau_{p2}s+1)}$   
que requeriría un filtro de orden 2 como ya vimos
- Factorización “todo pasa”, por ejemplo  $G = \frac{(-\beta s+1)}{(\beta s+1)} \times \frac{K_p(\beta s+1)}{(\tau_{p1}s+1)(\tau_{p2}s+1)}$

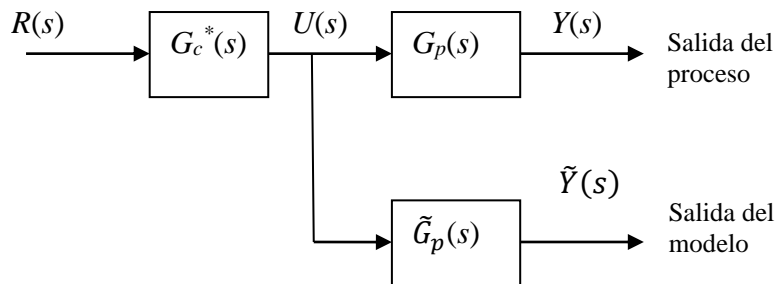
que requiere un filtro de orden 1

Si el proceso es estable y el controlador es estable, entonces todo el sistema es estable pues están en serie.

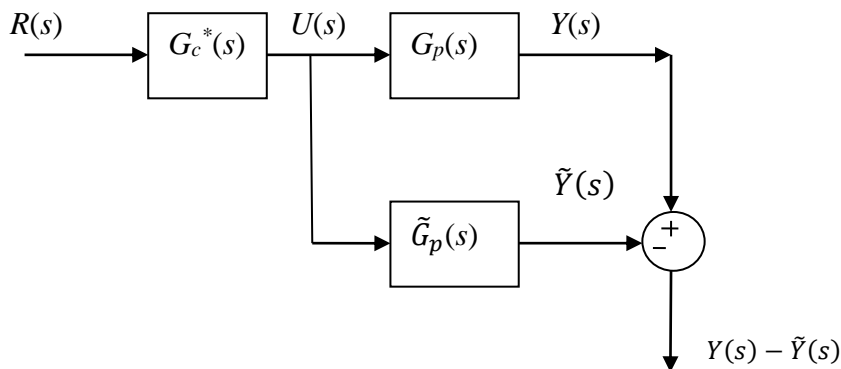
*CONTROL POR MODELO INTERNO*

Sin perjuicio de la sencillez del planteo de control en serie, la base del mismo radica en que el modelo del proceso se ajuste perfectamente al proceso real, lo cual evidentemente no sucede en la inmensa mayoría de las situaciones reales. Para tener en cuenta esas imperfecciones se ha desarrollado el denominado control por modelo interno (Internal Model Control, IMC), que considera el modelo de proceso en el bucle de retroalimentación.

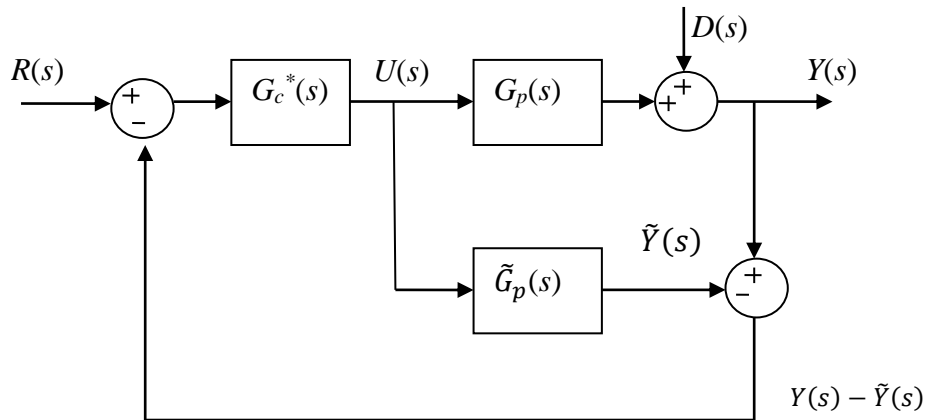
Sea  $G_p$  el proceso a controlar y  $\tilde{G}_p$  el modelo de dicho proceso. Si consideramos ambas funciones en paralelo,



la resta entre las señales de salida nos dará la diferencia entre los resultados reales y las predicciones del modelo.



Incorporando las perturbaciones y cerrando el bucle feedback se obtiene el IMC:



El procedimiento para el diseño de los controladores IMC es similar al que vimos antes para controlador de bucle abierto: Se factoriza el modelo del proceso entre un término invertible y otro no invertible

$$\tilde{G}_p(s) = \tilde{G}_{p+}(s)\tilde{G}_{p-}(s)$$

El controlador se construye con el inverso de la parte invertible, agregando un filtro de forma adecuada

$$G_c^*(s) = \tilde{G}_{p-}^{-1}(s)f(s)$$

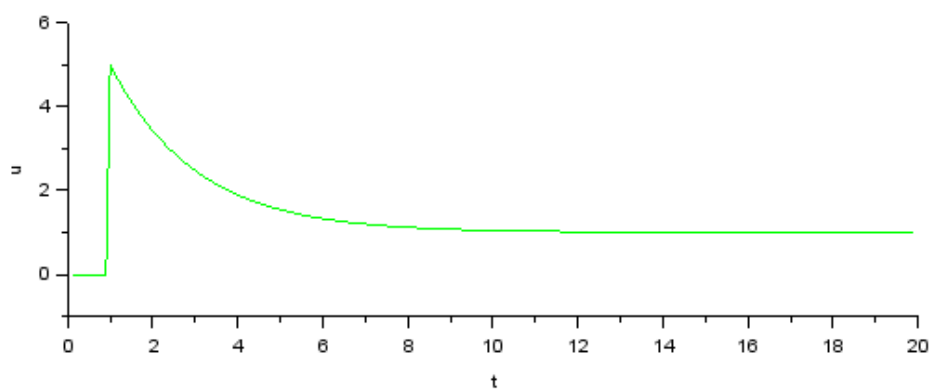
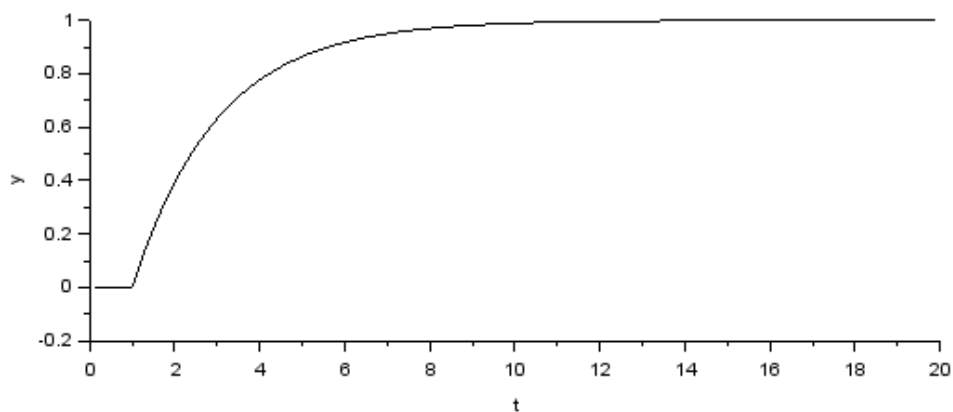
donde  $f(s) = \frac{1}{(\lambda s+1)^n}$  con  $n$  elegido de manera que la función de transferencia sea propia.

Si asumimos que el modelo es perfecto  $G_p(s) = \tilde{G}_p(s)$ . De este modo la salida del sistema con control IMC queda

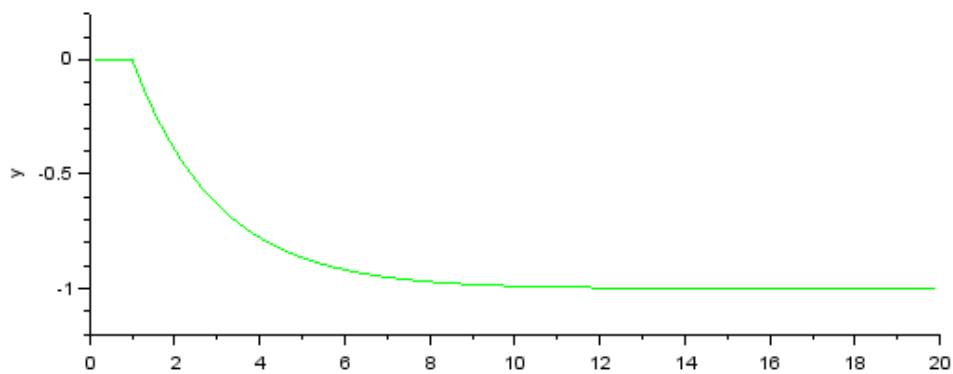
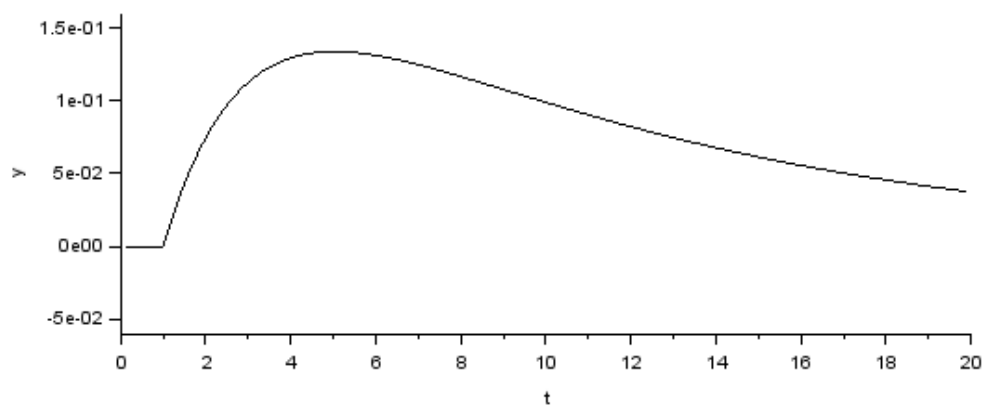
$$Y(s) = G_p(s)G_c^*(s)R(s) = G_p(s)\tilde{G}_{p-}^{-1}(s)f(s)R(s)$$

quedaría  $Y(s) = \tilde{G}_{p+}(s)f(s)R(s)$  o sea, siempre se mantiene la naturaleza “no invertible” del proceso.

Sea por ejemplo el siguiente proceso de primer orden  $\tilde{G}_p(s) = \frac{1}{10s+1}$  asumiendo que el modelo es perfecto  $G_c^*(s) = \frac{10s+1}{\lambda s+1}$  tomando, por ejemplo  $\lambda = 2$  el resultado para un cambio en el set point unitario es el que muestra la siguiente gráfica:



Sin embargo para un cambio en la carga, asumiendo que la función de transferencia es la misma que la del proceso





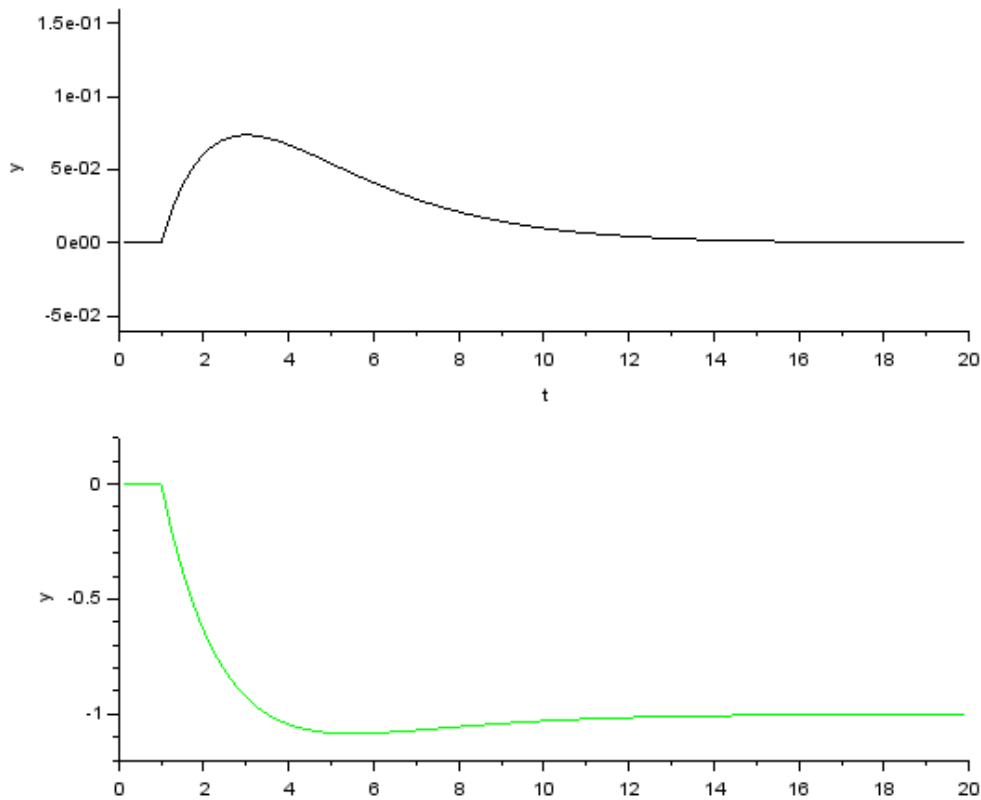
Puede verse que para rechazar las perturbaciones (“disturbance rejection”) el sistema con control IMC “demora” bastante en volver al estado estacionario. Para una mejor performance en el manejo de perturbaciones en la carga puede elegirse  $f(s) = \frac{\gamma s + 1}{(\lambda s + 1)^n}$  donde  $\gamma$  se selecciona para cancelar los efectos del término con menor constante de tiempo en la función del controlador.

Para el ejemplo anterior puede elegirse  $n = 2$  y entonces  $G_c^*(s) = \frac{(\tilde{\tau}_p s + 1)(\gamma s + 1)}{\tilde{K}_p (\lambda s + 1)^2}$ .

Asumiendo un modelo perfecto y que la función de transferencia de la carga es igual a la del proceso ( $D(s) = G_p(s)L(s)$ ), en este caso  $Y(s) = G_p(1 - G_c^*G_p)L(s)$  y se llega a que

$$Y(s) = \frac{(2\lambda - \gamma)s \left[ \frac{\lambda^2}{2\lambda - \gamma} s + 1 \right] \tilde{K}_p}{(\lambda s + 1)^2 \tilde{\tau}_p s + 1} L(s)$$

Se elige  $\gamma$  de modo de cancelar la constante de tiempo del proceso, o sea  $\gamma = \frac{2\lambda\tilde{\tau}_p - \lambda^2}{\tilde{\tau}_p}$  mejorando respecto al anterior como puede observarse en la siguiente figura.



Eventualmente en casos en que el set point cambia en forma de rampa puede elegirse  $f(s) = \frac{n\lambda s + 1}{(\lambda s + 1)^n}$ . El menor valor de  $\lambda$  la respuesta es más rápida, a mayor valor de  $\lambda$  la respuesta es más robusta.

Ejemplo: proceso de primer orden con tiempo muerto

$$\tilde{G}_p = \frac{\tilde{K}_p e^{-\tilde{\theta}s}}{\tilde{\tau}_p s + 1}$$

$$\tilde{G}_p(s) = \tilde{G}_{p+}(s)\tilde{G}_{p-}(s) = e^{-\tilde{\theta}s} \times \frac{\tilde{K}_p}{\tilde{\tau}_p s + 1}$$

$$G_c^*(s) = \tilde{G}_{p-}^{-1}(s)f(s) = \frac{\tilde{\tau}_p s + 1}{\tilde{K}_p} \times \frac{1}{\lambda s + 1} = \frac{1}{\tilde{K}_p} \left( \frac{\tilde{\tau}_p s + 1}{\lambda s + 1} \right)$$

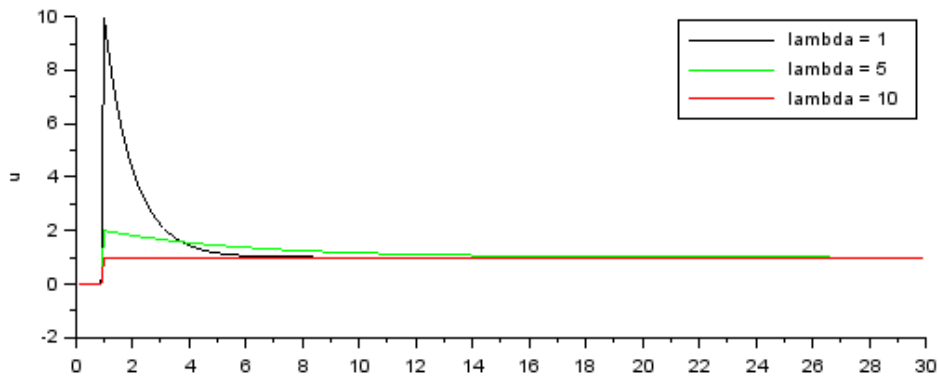
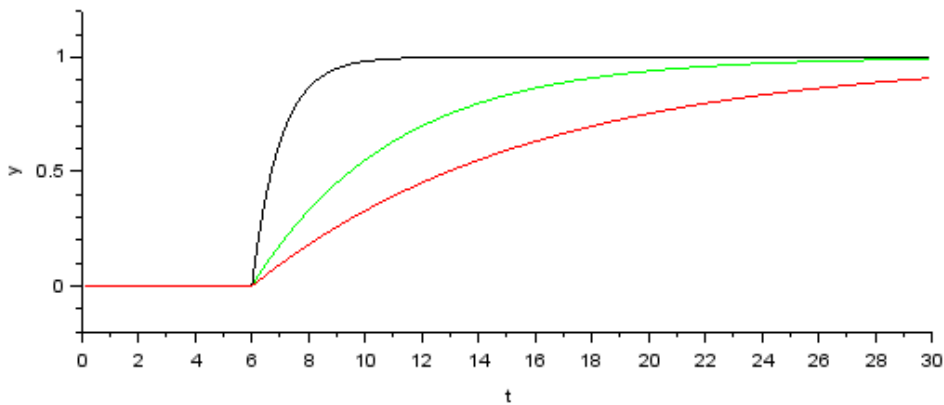
Asumiendo un modelo perfecto

$$Y(s) = \tilde{G}_{p+}(s)f(s)R(s) = \frac{e^{-\tilde{\theta}s}}{\lambda s + 1} R(s)$$

Esto es, para un salto del set point de magnitud  $R$

$$y(t) = 0 \quad 0 \leq t \leq \theta$$

$$y(t) = R[1 - e^{-(t-\theta)/\lambda}] \quad t \geq \theta$$



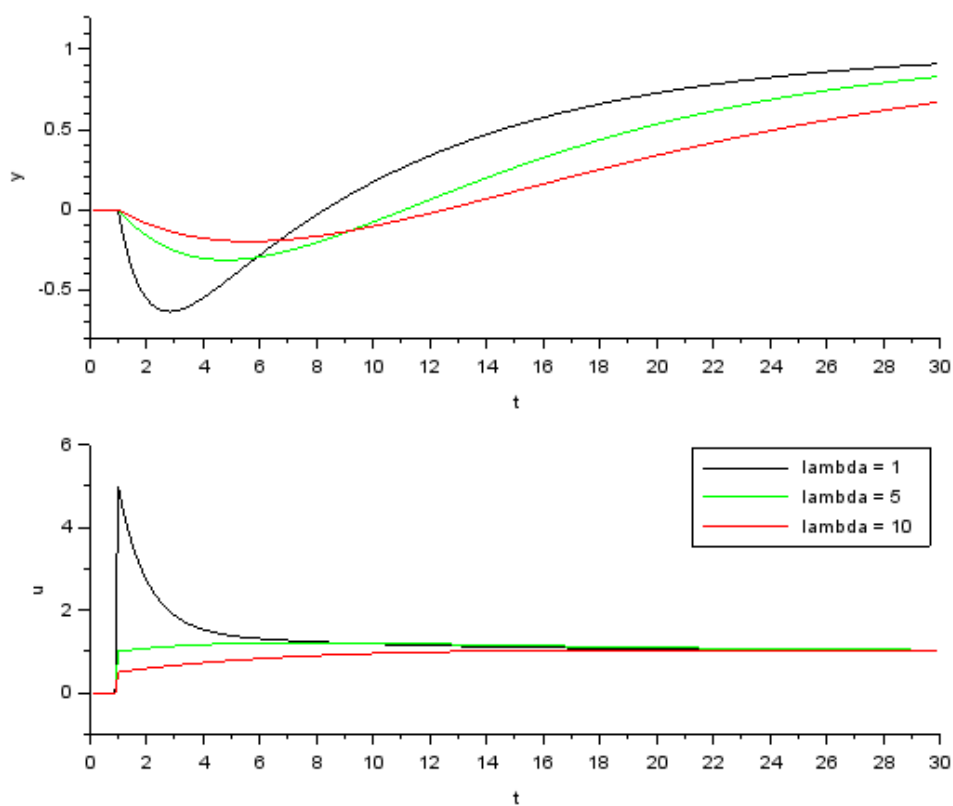
*Ejemplo: Proceso de segundo orden con “zeros” positivos*

$$\tilde{G}_p(s) = \frac{-9s + 1}{(15s + 1)(3s + 1)}$$

Factoreando 
$$\tilde{G}_p(s) = \frac{-9s+1}{9s+1} \times \frac{(9s+1)}{(15s+1)(3s+1)}$$

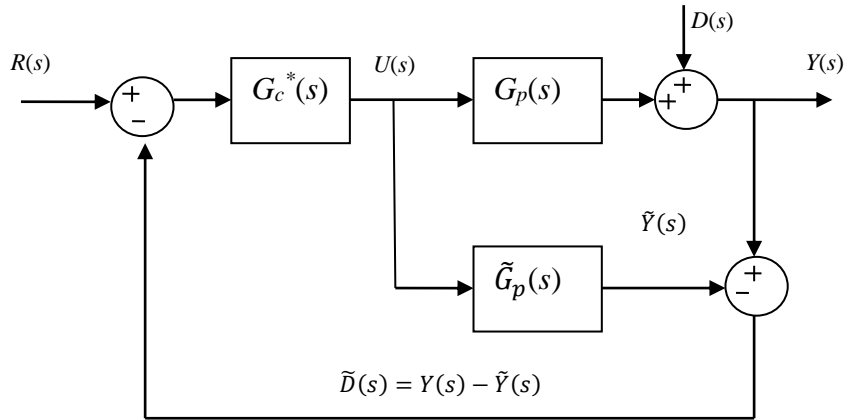
El controlador queda

$$G_c^* = \frac{(15s + 1)(3s + 1)}{(9s + 1)(\lambda s + 1)}$$

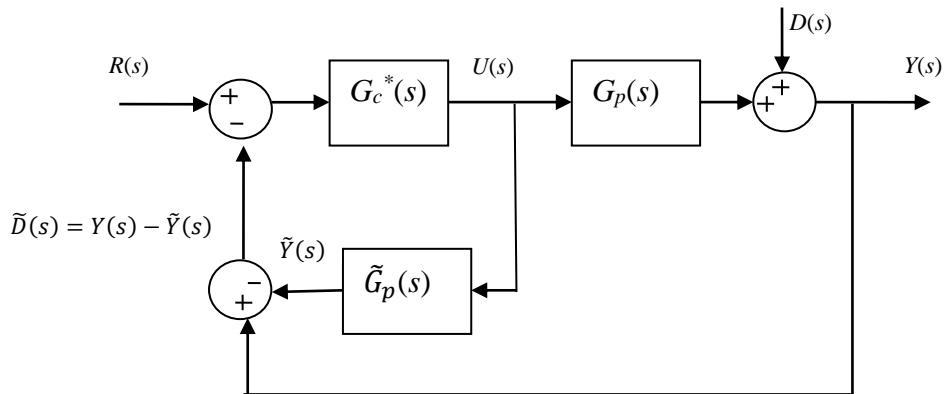


FORMATO FEEDBACK EQUIVALENTE DEL IMC

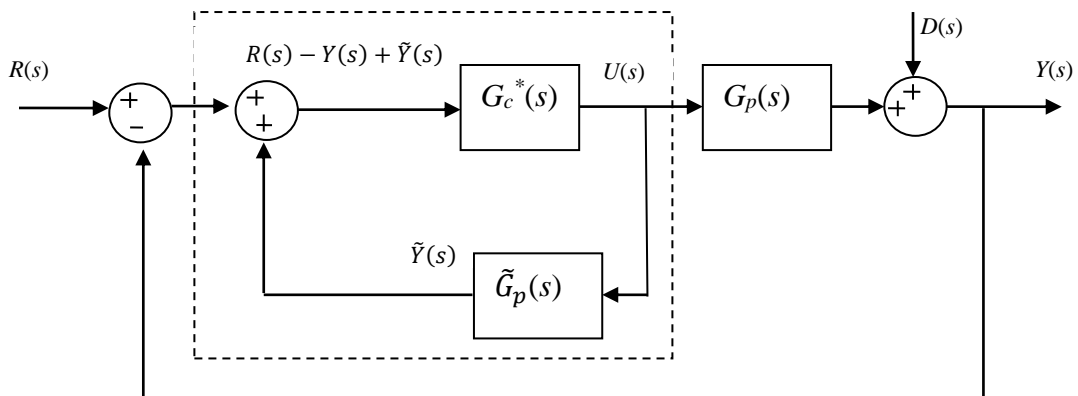
Consideremos el esquema del IMC



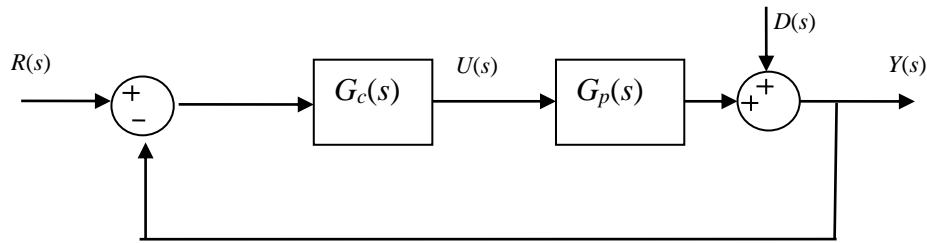
Modificando ligeramente el dibujo



Y con un nuevo arreglo del dibujo



La zona agrupada por la línea punteada corresponde con el bloque del controlador clásico en un bucle feedback:



O sea que 
$$G_c(s) = \frac{G_c^*(s)}{1 - \tilde{G}_p(s)G_c^*(s)}$$

*Controlador PID basado en IMC para un proceso de primer orden*

Sea 
$$\tilde{G}_p(s) = \frac{K_p}{\tau_p s + 1}$$

$$G_c^*(s) = \tilde{G}_p^{-1}(s)f(s) = \frac{\tau_p s + 1}{K_p} \frac{1}{\lambda s + 1} = \frac{1}{K_p} \frac{\tau_p s + 1}{\lambda s + 1}$$

$$G_c(s) = \frac{G_c^*(s)}{1 - \tilde{G}_p(s)G_c^*(s)} = \frac{\frac{\tau_p s + 1}{K_p(\lambda s + 1)}}{1 - \frac{K_p}{\tau_p s + 1} \frac{\tau_p s + 1}{K_p(\lambda s + 1)}} = \frac{\tau_p s + 1}{K_p \lambda s}$$

Y recordando que en un controlador PI  $G_c(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right)$  resulta

$$K_c = \frac{\tau_p}{K_p \lambda} \quad \tau_I = \tau_p$$

Obsérvese que con la lógica de diseño IMC solo hay que ajustar la ganancia del controlador pues el  $\tau_I$  se toma igual a la constante de tiempo del proceso. Teniendo en cuenta que un menor valor de  $\lambda$  implica una respuesta más rápida, con esta propuesta implica una ganancia del controlador mayor; y viceversa.

Si se pretende mantener el set point y rechazar las perturbaciones se considera el filtro  $f(s) = \frac{\gamma s + 1}{(\lambda s + 1)^n}$  donde  $\gamma$  debe seleccionarse para compensar adecuadamente dichas perturbaciones. Asumiendo que la transferencia de la carga es igual a la del proceso y que el modelo del proceso es perfecto, se llegaba como vimos antes a  $\gamma = \frac{2\lambda\tilde{\tau}_p - \lambda^2}{\tilde{\tau}_p}$ . Asimilando a la forma PI se llega a que

$$K_c = \frac{2\tau_p - \lambda}{K_p \lambda} \quad \tau_I = \frac{2\tau_p \lambda - \lambda^2}{\tau_p} \quad \text{debiendo ser } \lambda < 2\tau_p$$

Controlador PID basado en IMC para un proceso de segundo orden

$$\text{Sea } \tilde{G}_p(s) = \frac{K_p}{(\tau_{p1}s+1)(\tau_{p2}s+1)}$$

$$G_c^*(s) = \tilde{G}_p^{-1}(s)f(s) = \frac{(\tau_{p1}s+1)(\tau_{p2}s+1)}{K_p} \frac{1}{\lambda s+1}$$

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{G_c^*(s)}{1 - G_p(s)G_c^*(s)} = \frac{\frac{(\tau_{p1}s+1)(\tau_{p2}s+1)}{K_p(\lambda s+1)}}{1 - \frac{K_p}{(\tau_{p1}s+1)(\tau_{p2}s+1)} \frac{(\tau_{p1}s+1)(\tau_{p2}s+1)}{K_p(\lambda s+1)}} \\ &= \frac{\tau_{p1}\tau_{p2}s^2 + (\tau_{p1} + \tau_{p2})s + 1}{K_p \lambda s} \end{aligned}$$

Y recordando que en un controlador PID  $G_c(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s\right)$  resulta

$$K_c = \frac{\tau_{p1} + \tau_{p2}}{K_p \lambda} \quad \tau_I = \tau_{p1} + \tau_{p2} \quad \tau_D = \frac{\tau_{p1}\tau_{p2}}{\tau_{p1} + \tau_{p2}}$$

Así pueden deducirse otras para otras funciones de proceso; un resumen se presenta en la siguiente tabla:

$G_p(s)$	$f(s)$	$K_c$	$\tau$	$\tau_D$
$\frac{K_p}{\tau_p s + 1}$	$\frac{1}{\lambda s + 1}$	$\frac{\tau_p}{K_p \lambda}$	$\tau_p$	-
$\frac{K_p}{\tau_p s + 1}$	$\frac{\gamma s + 1}{(\lambda s + 1)^2}$	$\frac{2\tau_p - \lambda}{K_p \lambda}$	$\frac{2\tau_p \lambda - \lambda^2}{\tau_p}$	-
$\frac{K_p}{(\tau_{p1}s+1)(\tau_{p2}s+1)}$	$\frac{1}{\lambda s + 1}$	$\frac{\tau_{p1} + \tau_{p2}}{K_p \lambda}$	$\tau_{p1} + \tau_{p2}$	$\frac{\tau_{p1}\tau_{p2}}{\tau_{p1} + \tau_{p2}}$
$\frac{K_p}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$	$\frac{1}{\lambda s + 1}$	$\frac{2\zeta\tau}{K_p \lambda}$	$2\zeta\tau$	$\frac{\tau}{2\zeta}$
$\frac{K_p(-\beta s + 1)}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$	$\frac{-\beta s + 1}{\lambda s + 1}$	$\frac{2\zeta\tau}{K_p(\beta + \lambda)}$	$2\zeta\tau$	$\frac{\tau}{2\zeta}$
$\frac{K_p}{s}$	$\frac{1}{\lambda s + 1}$	$\frac{1}{K_p \lambda}$	-	-
$\frac{K_p}{s}$	$\frac{2\lambda s + 1}{(\lambda s + 1)^2}$	$\frac{2}{K_p \lambda}$	$2\lambda$	
$\frac{K_p}{s(\tau_p s + 1)}$	$\frac{1}{\lambda s + 1}$	$\frac{1}{K_p \lambda}$	-	-

$\frac{K_p}{s(\tau_p s + 1)}$	$\frac{2\lambda s + 1}{(\lambda s + 1)^2}$	$\frac{2\lambda + \tau_p}{K_p \lambda}$	$2\lambda + \tau_p$	$\frac{2\lambda \tau_p}{2\lambda + \tau_p}$
-------------------------------	--	---	---------------------	---

*Procesos que incluyen tiempo muerto*

Veamos un ejemplo: derivar las relaciones para el ajuste por IMC de un PID para un modelo de primer orden con tiempo muerto.  $\tilde{G}_p(s) = \frac{\tilde{K}_p e^{-\theta s}}{\tilde{\tau}_p s + 1}$

Utilizaremos la aproximación de Padé 1/1:

$$\tilde{G}_p(s) = \frac{\tilde{K}_p}{\tilde{\tau}_p s + 1} \frac{\left(1 - \frac{\theta}{2}s\right)}{\left(1 + \frac{\theta}{2}s\right)}$$

Factoreamos de este modo:

$$\tilde{G}_{p+}(s) = 1 - \frac{\theta}{2}s \quad \tilde{G}_{p-}(s) = \frac{\tilde{K}_p}{(\tilde{\tau}_p s + 1)\left(1 + \frac{\theta}{2}s\right)}$$

Elegimos  $f(s) = \frac{1}{\lambda s + 1}$

Entonces  $G_c^*(s) = \frac{(\tau_p s + 1)\left(1 + \frac{\theta}{2}s\right)}{K_p(\lambda s + 1)}$

Y por lo tanto el controlador PID equivalente es  $G_c(s) = \frac{(\tau_p s + 1)\left(1 + \frac{\theta}{2}s\right)}{K_p\left(\lambda + \frac{\theta}{2}\right)s}$

por lo que los parámetros del controlador PID son

$$K_c = \frac{\tau_p + \frac{\theta}{2}}{K_p\left(\lambda + \frac{\theta}{2}\right)} \quad \tau_I = \tau_p + \frac{\theta}{2} \quad \tau_D = \frac{\tau_p \theta}{2\tau_p + \theta}$$

Con similar razonamiento se pueden deducir las expresiones para otras funciones de proceso con tiempo muerto.

*Procesos inestables*

Consideremos un proceso de primer orden inestable  $\tilde{G}_p(s) = \frac{\tilde{K}_p}{-\tilde{\tau}_u s + 1}$

donde  $\tau_u$  es un valor positivo.

Usaremos el filtro  $f(s) = \frac{\gamma s + 1}{(\lambda s + 1)^2}$  y para hallar el valor de  $\gamma$  sustituiremos  $s$  por el polo de la función de transferencia e igualaremos a 1:

$$f\left(\frac{1}{\tau_u}\right) = \frac{\gamma/\tau_u + 1}{\left(\lambda/\tau_u + 1\right)^2} = 1$$

$$\gamma = \lambda\left(\frac{\lambda}{\tau_u} + 2\right)$$

Por lo tanto el controlador será:  $G_c(s) = \frac{\gamma}{K_p(2\lambda-\gamma)} \frac{(\gamma s+1)}{\gamma s}$

que corresponde a

$$K_c = \frac{-(\lambda+2\tau_u)}{K_p\lambda} \quad \tau_I = \lambda\left(\frac{\lambda}{\tau_u} + 2\right)$$

El siguiente es el resultado para el proceso  $\frac{1}{-s+1}$  y  $\lambda = 2$

