Eficiencia espectral y probabilidad de error en modulación M-QAM

Modulación de amplitud de pulsos con símbolos μ-arios

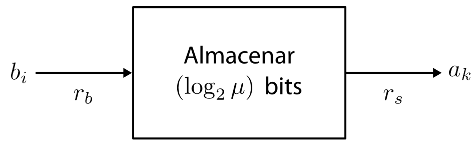
Para simplificar el análisis de la modulación M-QAM comenzaremos recordando los resultados del análisis de performance (ancho de banda B_T, probabilidad de error de símbolo P_{se}) para la transmisión de pulsos codificados en amplitud con símbolos μ-arios (PAM $\mu - aria$).

Consideremos una fuente que genera bits b_i equiprobables a una tasa de r_b bits por segundo, es decir con una duración del tiempo de bit $T_b = {}^1\!/_{r_b}$.

Para la transmisión de símbolos μ-arios a_k a partir de los bits b_i se deben "almacenar" $\log_2 \mu$ bits. De esta forma cada uno de los posibles símbolos a_k toma $2^{\log_2 \mu} = \mu$ posibles valores. Así

$$a_k = 0, 1, \ldots, (\mu - 1).$$

Conceptualmente podemos esquematizar esta operación con el siguiente diagrama de bloques



La relación entre las tasas de transferencia de bits r_b y de símbolos r_s se obtiene a través del análisis de los tiempos de bits y de símbolo. Para generar un símbolo a_k es necesario observar $\log_2 \mu$ bits por lo que la duración del símbolo es

$$T_s = (\log_2 \mu) T_b$$

de donde es inmediato que

$$r_s = \frac{r_b}{\log_2 \mu}.$$

Teniendo en cuenta el criterio de Nyquist para la determinación del ancho de banda en transmisión de pulsos PAM bandabase

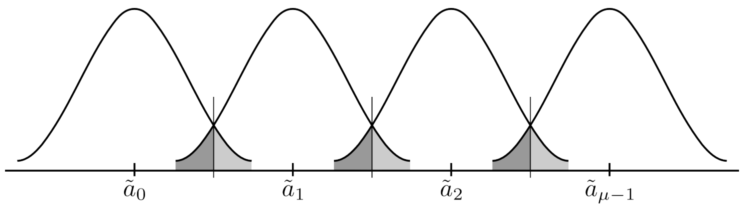
$$B_T \geq \frac{r_s}{2}.$$

Lo cual implica que el ancho de banda al transmitir símbolos μ-arios se reduce en $\log_2 \mu$ respecto a transmitir bits.

Para el cálculo de la probabilidad de error en cada uno de los símbolos a_k, el desarrollo realizado se basa en que las amplitudes recibidas y_k corresponden a los valores de amplitud recibidos $\tilde{a}_k$ contaminados con un ruido gaussiano aditivo

$$y_k = \tilde{a}_k + n_k$$

con $n_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$. El análisis del error de símbolo total se puede esquematizar en la siguiente figura



La probabilidad de error total corresponden a la suma de las áreas sombreadas de la figura y bajo las hipótesis usuales se puede escribir como

$$P_{se} = 2\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) \tag{1}$$

donde A es la diferencia entre dos símbolos consecutivos cualquiera ($\tilde{a}_{j+1} - \tilde{a}_j = A$, con $j = 0, \ldots, (\mu - 2)$).

Considerando una codificación de Gray de los símbolos a_k, de forma que entre dos símbolos consecutivos solo hay cambio en un bit, y considerando una SNR razonablemente alta, podemos asumir que cuando se comete un error en un símbolo únicamente se comete error en uno de los $\log_2 \mu$ bits. Así, la probabilidad de error de bit queda

$$P_{be} \approx \frac{P_{se}}{\log_2 \mu}. \tag{2}$$

Eficiencia espectral de modulación M-QAM

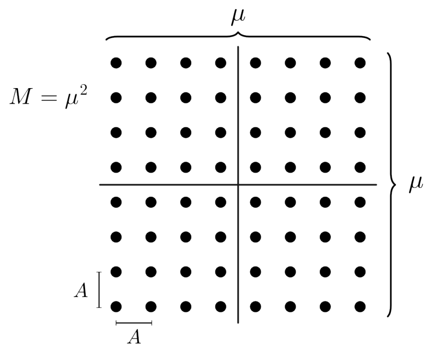
La modulación M-QAM modula un símbolo que toma M posibles valores a partir de dos modulaciones en amplitud PAM, una en fase y otra en cuadratura, donde cada una de ellas tiene $\sqrt{M} = \mu$ símbolos. Es decir

$$x_c(t) = A \sum_k I_k p(t - kT_M) \cos(\omega_c t) - A \sum_k Q_k p(t - kT_M) \sin(\omega_c t)$$

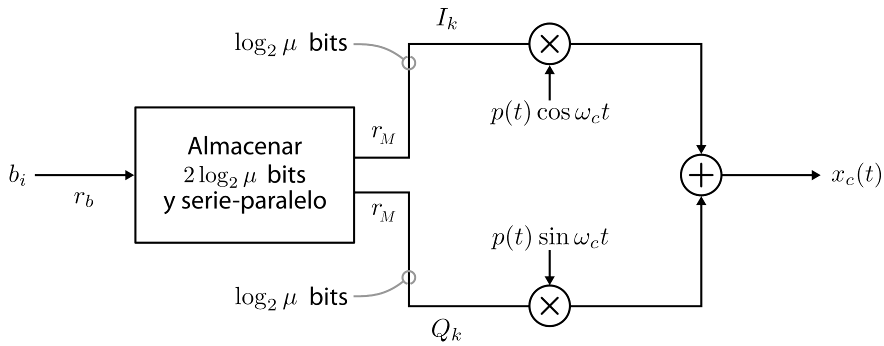
donde

$$I_k = \pm 1/2, \pm 3/2, \ldots, \pm 1/2(\mu - 1), \quad Q_k = \pm 1/2, \pm 3/2, \ldots, \pm 1/2(\mu - 1)$$

son los símbolos de la PAM en fase y en cuadratura respectivemante, y T_M es la duración del símbolo M-QAM (I_k, Q_k). El esquema de la constelación M-QAM se puede ver en la siguiente figura



Un diagrama de bloques de la generación de la señal M-QAM se puede esquematizar en la siguiente figura



Para generar un símbolo M-QAM (con M posibles valores) es necesario "agrupar" $\log_2 M$ bits, de forma que

$$T_M = (\log_2 M)T_b = 2(\log_2 \mu)T_b$$

de donde es inmediato que

$$r_M = \frac{r_b}{2\log_2 \mu}.$$

Esta es la tasa de transferencia de símbolo I_k, Q_k y también del símbolo (I_k, Q_k). El ancho de banda de transmisión también queda definido por esta tasa r_M, siguiendo el mismo criterio que en la parte anterior (pero el doble por ser pasabanda)

$$B_T \geq 2\frac{r_M}{2} = \frac{r_b}{2\log_2 \mu}.$$

De esta forma la eficiencia espectral para M-QAM queda

$$EE = \frac{r_b}{B_T} = 2\log_2 \mu = \log_2 M.$$

Para el cálculo de la probabilidad de error de símbolo tenemos que analizar cómo es la detección del mismo. Siendo una PAM en fase y otra en cuadratura la detección del símbolo consiste en la detección de cada uno de los dígitos I_k y Q_k independientemente, por lo que cada uno de ellos tiene una probabilidad de error dada por la ecuación 1. La probabilidad de error para el símbolo M-QAM

P_M, considerando independencia entre I_k y Q_k se calcula como

$$\begin{aligned} P_M &= 1 - P(\text{noerror}) = 1 - (1 - P_{se}(I_k))\,(1 - P_{se}(Q_k)) \\ &\approx 2P_{se} = 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) \end{aligned}$$

La ecuación anterior se relaciona con la energía de símbolo E_s mediante la amplitud A y los valores de $\overline{I_k^2}$ y $\overline{Q_k^2}$.

Finalmente, para relacionar P_M con la probabilidad de error de bit P_{be}, sigue valiendo la ecuación 2.