GP 3: Análisis de circuitos de CA en estado estacionario
GP 4: Análisis de circuitos de CA - Filtros pasivos

Unidades temáticas relacionadas:
UT III: MEDICIÓN DE SEÑALES VARIABLES EN EL TIEMPO
UT IV: CIRCUITOS DE "CORRIENTE ALTERNA"

Introducción y repaso:

a) Diferencias y semejanzas entre las Teorías de Circuitos para CC y para CA

En CC: $V(t)$ = constante, $I(t)$ = constante

1ª Ley de Ohm para CC: $R(\Omega) = V(V) / I(A)$; R es la *resistencia;* $R = 1/G$; $1\Omega = 1/S$
$G(S) = I(A) / V(V)$; G es la *conductancia;* $G = 1/R$; $1S = 1/\Omega$

En CA:
Tensiones y corrientes *armónicas*, equivalencia como *Nos. complejos*:

Las tensiones y las corrientes varían en el tiempo en forma sinusoidal (senos o cosenos) y se denominan *funciones armónicas*. Son tensiones y corrientes físicas reales que pueden visualizarse mediante instrumentos de medida, y que pueden representarse mediante números complejos equivalentes:

$$V(t) = Vo\ \mathrm{sen}(\omega t + \varphi_V) \equiv Vo\ e^{j(\omega t + \varphi V)}$$
$$I(t) = Io\ \mathrm{sen}(\omega t + \varphi_I) \equiv Io\ e^{j(\omega t + \varphi I)}$$

donde: **T(s)** ≡ período de la sinusoide; **f(Hz) = 1/T(s)** ≡ frecuencia, $1Hz = 1s^{-1}$ = 1 cps; **ω(rad/s) = 2πf** ≡ frecuencia angular

NOTA: Los ángulos de fase φ_V y φ_I son las *fases iniciales (para t=0)* de cada señal. Cualquiera de ellas puede tomarse arbitrariamente como 0, pero no ambas, dado que están relacionadas por $\varphi_V - \varphi_I = \varphi_z$ (véase más abajo).

1ª Ley de Ohm para CA: $Z(\Omega) = V(V) / I(A)$; Z es la *impedancia compleja;* $Z = 1/Y$; $1\Omega = 1/S$
$Y(S) = I(A) / V(V)$; Y es la *admitancia compleja;* $Y = 1/Z$; $1S = 1/\Omega$

Reemplazando $V(t) = Vo\ e^{j(\omega t + \varphi V)}$ e $I(t) = Io\ e^{j(\omega t + \varphi I)}$ resulta:

$$Z(\Omega) = V(V) / I(A) = Vo\ e^{j(\omega t + \varphi V)} / Io\ e^{j(\omega t + \varphi I)} = Vo/Io * e^{j(\varphi V - \varphi I)}$$

o alternativamente:
$$Y(S) = I(A) / V(V) = Io\ e^{j(\omega t + \varphi I)} / Vo\ e^{j(\omega t + \varphi V)} = Io/Vo * e^{-j(\varphi V - \varphi I)}$$

donde:
$$|Z| = 1/|Y| = Vo/Io \text{ y } \varphi_Z = \varphi_V - \varphi_I$$

Corolario: En circuitos de CA, la 1ª Ley de Ohm y las Leyes de Kirchoff, resultan idénticas que las equivalentes para circuitos de CC, excepto que las Resistencias (Conductancias) se reemplazan por Impedancias (Admitancias) complejas, y las corrientes y tensiones constantes se reemplazan por *funciones armónicas complejas*.

Conexión de Impedancias Z (Admitancias Y): series y paralelos

dos Impedancias Z_1 y Z_2 conectadas *en serie* equivalen a la suma compleja de ambas Impedancias --> $Z_{serie} = Z_1 + Z_2$
recíprocamente, $1/Y_{serie} = 1/Y_1 + 1/Y_2$ o bien $Y_{serie} = (Y_1 * Y_2) / (Y_1 + Y_2)$ *(sumas, productos y cocientes, como Nos. complejos)*

dos Admitancias Y_1 e Y_2 conectadas *en paralelo* equivalen a la suma compleja de ambas Admitancias --> $Y_{//} = Y_1 + Y_2$
recíprocamente, $1/Z_{//} = 1/Z_1 + 1/Z_2$ o bien $Z_{//} = (Z_1 * Z_2) / (Z_1 + Z_2)$ *(sumas, productos y cocientes, como Nos. complejos)*

Resistencia real y Reactancia imaginaria:

Resistencia: $R = 1 * R = R * e^{j*0}$; $ReR = R$, $ImR = 0$; $|R| = R$, $\varphi_R = 0$
Reactancia capacitiva: $X_C = -j/\omega C = 1/\omega C * e^{-j\pi/2}$; $ReX_C = 0$, $ImX_C = -1/\omega C$; $|X_C| = 1/\omega C$, $\varphi_{Xc} = -\pi/2$
Reactancia inductiva: $X_L = j\omega L = \omega L * e^{j\pi/2}$; $ReX_L = 0$, $ImX_L = \omega L$; $|X_C| = \omega L$, $\varphi_{XL} = \pi/2$

NOTA: R es siempre un No real positivo; X (capacitiva o inductiva) es un No complejo *imaginario puro*
NOTA: R, X y Z se expresan en Ω; G e Y se expresan en S= 1/Ω

Impedancia compleja: $Z = R + j * X = ReZ + j * ImZ = |Z| * e^{j\varphi z}$

donde:
$ReZ = |Z| * \cos(\varphi_Z) = R$; $ImZ = |Z| * \mathrm{sen}(\varphi_Z) = X/j = -jX$ **NOTA:** $1/j = -j$
$|Z|^2 = Z * Z^* = [ReZ^2 + ImZ^2] = R^2 + X * X^* = R^2 + |X|^2$;
$\cos(\varphi_Z) = ReZ / |Z| = R/|Z|$ $\quad \varphi_Z = \cos^{-1}(ReZ/|Z|) = \cos^{-1}(R/|Z|)$
$\mathrm{sen}(\varphi_Z) = ImZ / |Z| = X/j|Z| = -jX/|Z|$ $\quad \varphi_Z = \mathrm{sen}^{-1}(ImZ/|Z|) = \mathrm{sen}^{-1}(-jX/|Z|)$
$\varphi_Z = \mathrm{tg}^{-1}(ImZ/ReZ) = \mathrm{tg}^{-1}(-j * X/R)$

GP 3: Circuitos de CA
GP 4: Filtros RC

NOTA: para determinar *el cuadrante* de φ_Z (1º ó 4º cuadrante, según que la reactancia resulte inductiva o capacitiva, respectivamente), es necesario calcular 2 (dos) de las funciones trigonométricas que lo definen, o identificarlo por *el signo* de ImZ (recuerde que R es siempre positiva). Si ImZ es positiva, φ_Z está en el 1er cuadrante, y X es *reactancia inductiva* con una inductancia equivalente L = ImZ/ω; si ImZ es negativa, φ_Z está en el 4º cuadrante, y X es *reactancia capacitiva* con una capacidad equivalente C = - ω * ImZ;

b) Circuito divisor de tensión con impedancias

El circuito de la Fig. GP 3-1 muestra un divisor de tensión formado por impedancias genéricas (ignore las figuras internas con R,L y C) $Z_1=|Z_1|\,e^{j\varphi z1}$ y $Z_2=|Z_2|\,e^{j\varphi z2}$. La tensión de entrada es Ve=Vo $e^{j(\omega t)}$ (suponer el nodo *b* a tierra) y la de salida en el nodo *a* es Vs = $V_1\,e^{j(\omega t+\varphi VS)}$ (ignore los valores numéricos en el circuito de la Figura).

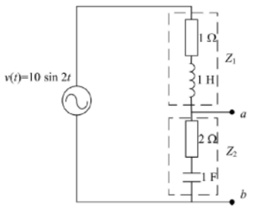

Figura GP 3-1 Divisor de tensión con impedancias

Siguiendo el mismo procedimiento desarrollado antes para el divisor de tensión resistivo, se puede calcular el Equivalente de Thevenin de este circuito:

$$V_{eq} = V_{CA} = Ve * Z_2 / (Z_1+Z_2)$$
$$Z_{eq} = Z_1//Z_2 = (Z_1 * Z_2) / (Z_1+Z_2)$$

La *función de transferencia* compleja A = Vs/Ve resulta en A = $Z_2 / (Z_1+Z_2)$ con: $|A| = |Z_1|/|Z_1+Z_2|$ y $\varphi_A = \varphi_{Z1} - \varphi_{(Z1+Z2)}$

NOTA: tener en cuenta que $|Z_1+Z_2| \neq |Z_1|+|Z_2|$ y que $\varphi_{(Z1+Z2)} \neq \varphi_{Z1} + \varphi_{Z2}$

d) Filtros capacitivos

El divisor de tensión con impedancias genérico planteado arriba adopta dos configuraciones de interés: el *filtro pasa-bajos* y el *filtro pasa-altos*. En el filtro pasa-bajos Z_1 es una resistencia ideal R y Z_2 un capacitor ideal (X_C = -j/ωC = (1/ωC) * $e^{-j\pi/2}$). En el filtro pasa-altos, R y C están intercambiadas respecto del pasa-bajos.

Función de transferencia del filtro RC simple, configuración pasa-bajos:

Reemplazando en la expresión (véase más arriba), la función de transferencia compleja del filtro pasa-bajos queda

$$A = X_C/(R+X_C) = \frac{-j/\omega C}{R-j/\omega C}$$

El numerador es $1/\omega C * e^{-j\pi/2}$, y el denominador (R conectado en serie con C) es

$$Z=|Z|\,e^{j\varphi z}, \text{ con } |Z| = [R^2 + 1/(\omega C)^2]^{1/2} \text{ y } \varphi_Z = tg^{-1}(-1/\omega RC) = tg^{-1}(-\omega_o/\omega).$$

donde se ha adoptado la definición $\omega_o = 1/RC$.

Operando los números complejos queda

$$A = \frac{e^{-j(\varphi z+\frac{\pi}{2})}}{\omega C * [R2 + 1/(\omega C)2]1/2} = \frac{e^{-j(\varphi z+\frac{\pi}{2})}}{[1+\left(\frac{\omega}{\omega o}\right)2]1/2} = \frac{\left(\frac{\omega o}{\omega}\right)e^{-j(\varphi z+\frac{\pi}{2})}}{[1+\left(\frac{\omega o}{\omega}\right)2]1/2}$$

con

$$|A| = \frac{1}{[1+\left(\frac{\omega}{\omega o}\right)2]1/2} = \frac{\left(\frac{\omega o}{\omega}\right)}{[1+\left(\frac{\omega o}{\omega}\right)2]1/2}$$

$$\varphi_A = -(\varphi_Z + \pi/2)$$

NOTA: Tanto $|A|$ como φ_A resultan ser funciones de la frecuencia angular ω**.** Las dos formas de expresar $|A|$ como f(ω) son idénticas, pero la primera es útil para analizar el comportamiento límite de $|A|$ cuando $\omega >> \omega_o$, mientras que la segunda es útil para analizar el límite $\omega << \omega_o$, (véase más abajo, *Diagramas de Bode*)

Eliminando $\pi/2$ en φ_A se obtiene $\quad tg(\varphi_A) = -tg(\varphi_Z + \pi/2) = 1/tg(\varphi_Z) = -\omega/\omega_o$

es decir: $\quad \varphi_A = tg^{-1}(-\omega/\omega_o) = -\,tg^{-1}(\omega/\omega_o)$

A continuación se muestran los gráficos de **|A|(**adimensional) a la izquierda y **φ_A(º)** a la derecha, como funciones de la frecuencia angular normalizada **ω/ω_o** (Fig. GP 3-2)

NOTA: solamente las frecuencias positivas tienen significado físico. En el gráfico de la fase, se muestran valores de frecuencia negativos para que se pueda reconocer la función $-tg^{-1}(x) = arc\ tg(x)$.

NOTA: Los gráficos se generaron con la herramienta disponible en **http://rechneronline.de/function-graphs/**

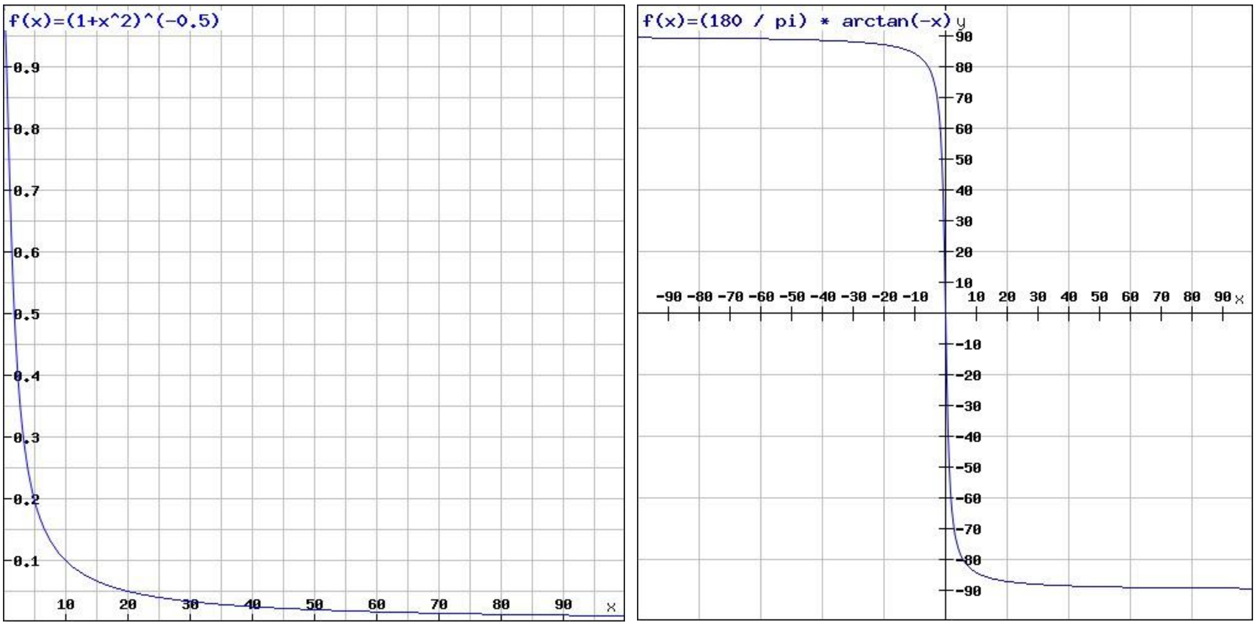

Figura GP 3-2 izquierda: **|A|** vs. **ω/ω_o** (ambos ejes son adimensionales); derecha: **φ_A(°)** vs. **ω/ω_o**

La Fig. GP 3-3 muestra las mismas funciones, en escala ampliada, lo que permite reconocer los detalles:

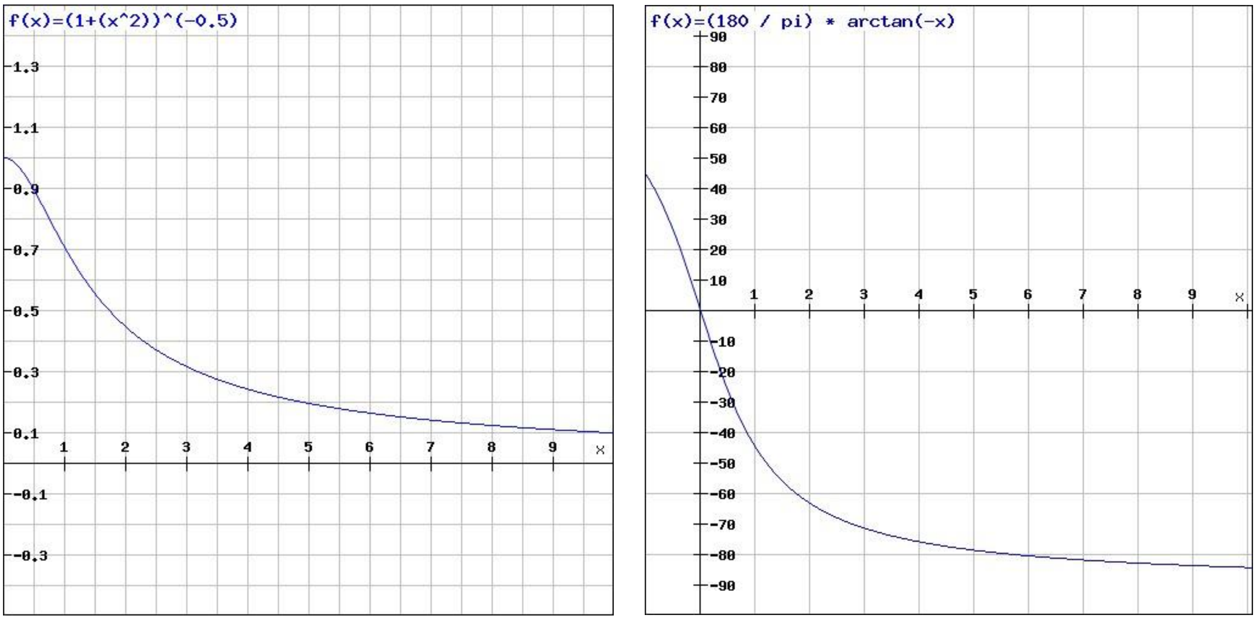

Figura GP 3-3 izquierda: **|A|** vs. **ω/ω_o** (ambos ejes son adimensionales); derecha: **φ_A(°)** vs. **ω/ω_o**

Para $\omega = 0$ la transferencia $|A|=1$ y la fase es 0^o (el capacitor se comporta como circuito abierto y el atenuador se asemeja a un divisor resistivo). Para $\omega \to \infty$ la transferencia $|A| \to 0$ y la fase $\to -90^o$ (el capacitor tiende a ser un cortocircuito pero impone un desfasaje sobre Vs).

Cuando ω toma el <u>valor particular ω_o</u> (entonces $\omega/\omega_o = 1$), resulta $|A| = 1/\sqrt{2} = (\sqrt{2}) / 2 \approx 0{,}707$ y la fase vale - 45º**.** Para este valor de la frecuencia, $Vs = Ve/\sqrt{2}$ y está atrasado en $\pi/4$ respecto de Ve.
El valor $\omega_o = 1/RC$ se denomina *frecuencia angular de corte* y corresponde a $f_o = 1/(2\pi RC)$ denominado *frecuencia de corte*.

A fin de hacer más evidente los comportamientos asintóticos $\omega \to 0$ y $\omega \to \infty$, se han diseñado ls representaciones denominadas *Diagramas de Bode* (por su inventor):

Diagrama de Bode de la Amplitud:	$\log(\|A\|)$	vs.	$\log(\omega)$
Diagrama de Bode de la fase:	φ_A	vs.	$\log(\omega)$

GP 3: Circuitos de CA
GP 4: Filtros RC

NOTA: log significa $\log_{10}$ (logaritmo en base 10).

Se define la unidad *deciBel* para la *ganancia en tensión*: $|A|$(dB) = 10$\cdot$log (Vs/Ve).
En esta escala, 1 dB equivale a ganancia 10 (Vs/Ve = 10), 0dB equivale a ganancia unitaria (Vs=Ve) y *valores negativos* corresponden a "ganancias" inferiores a la unidad (lo que denominamos "atenuación"). Cuando Vs$\rightarrow$ 0 $|A| \rightarrow -\infty$(dB)

La Fig. GP 3-4 muestra los dos <u>Diagramas de Bode:</u>

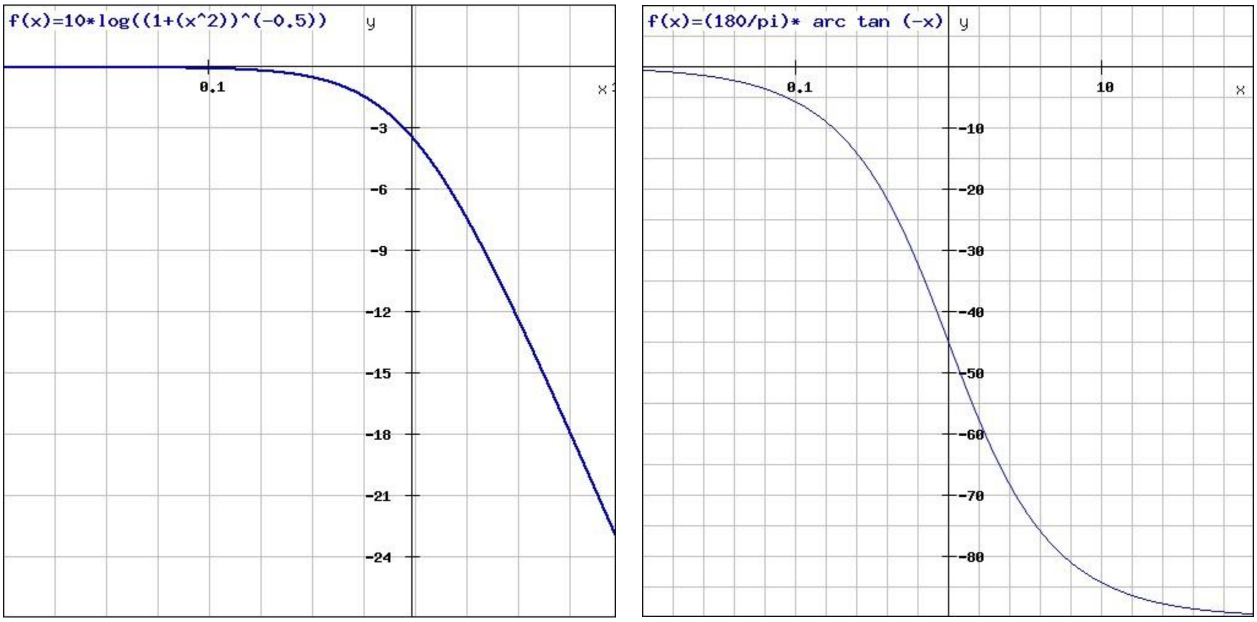

Figura GP 3-4 izquierda: Diagrama de Bode de la Amplitud $|A|$**(dB)** vs. **log(ω/ω_o)**
derecha: Diagrama de Bode de la Fase $\varphi_A(^o)$ vs. **log(ω/ω_o)**

Debido a la escala logarítmica en ω/ω_0 los valores extremos de ω no pueden representarse. El rango de frecuencias representadas corresponde a: $0{,}01\omega_0 \leq \omega \leq 100\omega_0$.

Para $\omega/\omega_0 = 1$ se observa $|A|$= - 3dB (corresponde a $|A| = \sqrt{2}$) y $\varphi_A = -45^o$. En el Diagrama de Bode de la Amplitud, la asíntota horizontal ($\omega \rightarrow 0$) tiene pendiente nula y ordenada al origen 0dB. La asíntota para $\omega \rightarrow \infty$ tiene una pendiente de - 10dB/década (una *década* es un intervalo de frecuencias ω_1 - ω_2 separadas por un <u>factor 10</u> ($\omega_2 / \omega_1 = 10$, $\log(\omega_2 / \omega_1) = 1$). También se define el intervalo de frecuencias octava (una *octava* es un intervalo de frecuencias ω_1 - ω_2 separadas por un <u>factor 2</u> ($\omega_2 / \omega_1 = 2$, $\log(\omega_2 / \omega_1) \approx 0{,}301$), y la pendiente de la asíntota se expresa también como - 3dB/octava.

PROBLEMAS

Problema 3-1:
Calcular la impedancia compleja Z de los siguientes arreglos de resistencia y capacitor, R= 1 KΩ, C= 1μF, f= 50 Hz. Expresar Z en forma binomial y en forma exponencial. Graficar Z en el plano complejo.
a) R en serie con C
b) R en paralelo con C

Problema 3-2:
PAra Para los dos circuitos del problema 3-1, calcular la admitancia compleja Y. Expresar Y en forma binomial y en forma exponencial. Graficar Y en el plano complejo.

Problema 3-3:
Considere los arreglos formados por una resistencia R= 1KΩ y un condensador C (circuito RC-simple), en las dos configuraciones de: "filtro pasa-bajos" y "filtro pasa altos".
a) ¿Qué valor tendrá que asignarse a C, para obtener una frecuencia de corte f_o = 30 KHz en el pasa-bajos?
b) ¿Qué valor tendrá que asignarse a C, para obtener una frecuencia de corte f_o = 0,1Hz en el pasa-altos?
c) Para cada uno de los dos filtros, calcule la función de transferencia compleja A= Vs/Ve, suponiendo Ve = Vo $e^{j\omega t}$, con los valores de C obtenidos en los puntos a) y b) anteriores. Haga un programa (pej. en EXCEL®, o en otra plataforma) que permita graficar $|A|$ y φ_A como función de la frecuencia angular ω en el intervalo $0{,}001\ \omega_0 \leq \omega \leq 1000\ \omega_0$. Grafique los Diagramas de Bode de la amplitud y la fase. Trazando las asíntotas "a mano" pero con mucha prolijidad , verifique que se cortan en $\omega = \omega_0$.