6 TRANSFORMADA DE LAPLACE

Introducción

La Transformada de Laplace es una herramienta útil para resolver ecuaciones diferenciales lineales. Las ecuaciones dinámicas escritas en el dominio del tiempo (ecuaciones diferenciales respecto al tiempo) se transforman en el dominio de Laplace convirtiéndose en ecuaciones algebraicas, cuya resolución suele ser más sencilla. Especialmente desarrollada para resolver sistemas de ecuaciones lineales, su uso puede extenderse, linealización mediante, a sistemas no lineales. Los programas de cálculo tipo Octave, Matlab o Scilab tienen prestaciones que permiten operar directamente en el dominio de Laplace

Sea una función $f(t)$ definida en el dominio del tiempo. Su transformada de Laplace se define como

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

siendo s la variable en el dominio de Laplace.

A su vez, si se cuenta con una función en el dominio de Laplace se puede realizar la operación antitransformada para regresar al dominio del tiempo.

$$L^{-1}[F(s)] = f(t)$$

Una de las principales propiedades de la Transformada de Laplace es la de linealidad:

$$\begin{aligned} L[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] &= \int_0^\infty [a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty a_1 f_1(t) e^{-st} dt + \int_0^\infty a_2 f_2(t) e^{-st} dt \\ &= a_1 \int_0^\infty f_1(t) e^{-st} dt + a_2 \int_0^\infty f_2(t) e^{-st} dt \\ &= a_1 L[f_1(t)] + a_2 L[f_2(t)] \end{aligned}$$

Transformadas de distintas funciones

Función constante $f(t) = a$

$$L[a] = \int_0^\infty a\ e^{-st} dt = a \int_0^\infty e^{-st} dt = -\frac{a}{s} \left[e^{-st}\right]_0^\infty = 0 - \left(-\frac{a}{s}\right) = \frac{a}{s}$$

$$L[a] = \frac{a}{s}$$

Función exponencial $f(t)=e^{-at}$

$$L\left[e^{-at}\right]=\int_0^\infty e^{-at}e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-(s+a)t}dt=-\frac{1}{s+a}\left[e^{-(s+a)t}\right]_0^\infty=-\frac{1}{s+a}\left[0-1\right]=\frac{1}{s+a}$$

$$L\left[e^{-at}\right]=\frac{1}{s+a}$$

Función derivada

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=\left[e^{-st}f(t)\right]_0^\infty+\int_0^\infty f(t)se^{-st}dt=\left[0-f(0)\right]+s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=sF(s)-f(0)$$

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=sF(s)-f(0)$$

análogamente

$$L\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$

$$L\left[\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$$

Función integral

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right]=\int_0^\infty\left[\int_0^t f(t)dt\right]e^{-st}dt=\left[\int_0^t f(t)dt\right]\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Bigg|_0^\infty-\int_0^\infty f(t)\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)dt=\frac{F(s)}{s}$$

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right]=\frac{F(s)}{s}$$

Función rampa $f(t)=bt$

$$L\left[bt\right]=\frac{b}{s^2}$$

Funciones trigonométricas

$$L\left[\sin\omega t\right]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\qquad L\left[\cos\omega t\right]=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Función escalón

$$f(t)=\begin{cases}0 & para \quad t<0\\ A & para \quad t\geq 0\end{cases}$$

$$L[f(t)]=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ T\to\infty}}\int_{\varepsilon}^{T} f(t)e^{-st}dt=\int_{0^+}^{\infty}Ae^{-st}dt=-\frac{A}{s}\left[e^{-st}\right]_0^{\infty}=-\frac{A}{s}[0-1]=\frac{A}{s}$$

$$L[A]=\frac{A}{s}$$

Función impulso

$$L[\delta]=\lim_{t_p\to 0}\frac{1}{t_p s}\left[1-e^{-t_p s}\right]=\lim_{t_p\to 0}\frac{-1}{s}\left[-se^{-t_p s}\right]=1$$

$$L[\delta]=1$$

Tiempo muerto

$$L[f(t-t_d)]=e^{-st_d}F(s)$$

Podemos resumir estas y otras funciones comunes en tablas que nos sirven para operar.

f(t)	**F(s)**
δ(t) (impulso)	1
U(t) (escalón)	$1/s$
A (constante)	A/s
$f(t-t_d)$ (desplazamiento)	$e^{-t_d s}F(s)$
t	$1/s^2$
df/dt	$sF(s)-f(s)$
d^nf/dt^n	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f^{(1)}(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$
e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$
$\dfrac{1}{a_1-a_2}(e^{-a_2t}-e^{-a_1t})$	$\dfrac{1}{(s-a_1)(s-a_2)}$
$\dfrac{a_3-a_1}{a_2-a_1}e^{-a_1t}+\dfrac{a_3-a_2}{a_1-a_2}e^{-a_2t}$	$\dfrac{s+a_3}{(s+a_1)(s+a_2)}$
$1-e^{-t/\tau}$	$\dfrac{1}{s(\tau s+1)}$
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

$e^{-\alpha t}\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\cos(\omega t)$	$\dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$1+\dfrac{1}{\tau_2-\tau_1}\left(\tau_1 e^{-t/\tau_1}-\tau_2 e^{-t/\tau_2}\right)$	$\dfrac{1}{s(\tau_1+1)(\tau_2+1)}$
$1-\dfrac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi t/\tau}\sin(\omega t+\Phi)$	$\dfrac{1}{s(\tau^2 s^2+2\xi\tau s+1)}$ $\omega=\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau}$ $\Phi=\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$
$1+\dfrac{\tau_3-\tau_1}{\tau_1-\tau_2}e^{-t/\tau_1}+\dfrac{\tau_3-\tau_2}{\tau_2-\tau_1}e^{-t/\tau_2}$	$\dfrac{(\tau_3 s+1)}{s(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$
$1-\left(1-\dfrac{\tau_n}{\tau_d}\right)e^{-t/\tau_d}$	$\dfrac{(\tau_n s+1)}{s(\tau_d s+1)}$

Teorema del valor final

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0}[s\,F(s)]$$

Teorema del valor inicial

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty}[s\,F(s)]$$