Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Geometría y Álgebra Lineal 1.
Curso anual 2017.

Práctico 2.

Ejercicio 1. Sumar las siguientes matrices

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2.

1. Consideremos matrices A y B de dimensión 4×5 y matrices C, D y E de dimensiones 5×2, 4×2 y 5×4 respectivamente. Todas las matrices tienen sus entradas en el mismo conjunto numérico. Determine cuáles de las siguientes operaciones están definidas:

$$BA, \quad AC + D, \quad AE + B, \quad AB + B, \quad E(A + B), \quad EAC.$$

   En caso de estarlo, indique las dimensiones de la matriz resultante.

2. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

   Realizar las siguientes operaciones: AB, BC, $(AB)C$ y $A(BC)$.

3. Calcular AB y BA para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

4. Calcular AB y AC dadas las matrices reales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

5. ¿Es conmutativo el producto de matrices? Justifique la respuesta.
6. ¿Si $A \neq 0$; $AB = AC \Rightarrow B = C$? Justifique la respuesta.

Ejercicio 3. Encontrar *ejemplos* de matrices reales 2×2 tales que:

1. $A^2 = -I$;
2. $B^2 = O$, $B \neq O$;

3. $CD = -DC$, $(CD \neq O)$;
4. $EF = O$, $E \neq F$ con E y F sin elementos cero.

Ejercicio 4. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas (indicando por qué) o falsas (dando un contraejemplo):

1. Si la primera y tercera columna de B son iguales, también lo son la primera y tercera columna de AB;
2. Si la primera y tercera fila son iguales en B, también lo son en AB;
3. Si la primera y tercera fila son iguales en A, también lo son en AB;
4. Si A y B son matrices $n \times n$ entonces
   (a) $(AB)^2 = A^2B^2$;
   (b) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;
   (c) $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.
5. Si el producto AB entre las matrices A y B está definido entonces también lo está el producto BA.

Ejercicio 5. El producto y la trasposición.

1. Demostrar que $(A+B)^t = A^t + B^t$ y $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.
2. Sean A y B matrices conformables. Demostrar que la traspuesta $(AB)^t$ del producto AB es
$$(AB)^t = B^tA^t.$$
3. Sea A una matriz cualquiera. Demostrar que los productos A^tA y AA^t siempre están definidos y son matrices simétricas.

Ejercicio 6. Traza de una matriz. Sea A una matriz cuadrada. Se define la **traza** $tr(A)$ de la matriz A como la suma de todos los elementos de su diagonal. Entonces, si $A = ((a_{ij}))$ es una matriz $n \times n$ tendremos
$$tr(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$
Probar las siguientes propiedades:
$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B), \qquad tr(\alpha A) = \alpha\, tr(A), \qquad tr(AB) = tr(BA).$$

Ejercicio 7. Sean A y B dos matrices simétricas. Probar que AB es simétrica si y sólo si $AB = BA$.

Ejercicio 8. Si A es una matriz $n \times n$, probar que A conmuta con todas las matrices $n \times n$ si y sólo si A es un múltiplo de la identidad. Es decir, si existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $A = \lambda I$.

Sugerencia: comenzar resolviendo el ejercicio para matrices 2×2.

Ejercicio 9. Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Hallar todas las matrices 2×2 que conmuten con A.
2. Hallar una matriz 2×2 que no conmute con A.
3. Hallar todas las matrices que conmutan con $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 10.

1. Las tres matrices reales siguientes tienen inversas. Calcularlas.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Verificar el cálculo.

2. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales usando las matrices inversas calculadas en la parte anterior:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Hallar la inversa de las siguientes matrices, en las que k y k_i, $i = 1, 2, 3, 4$, indican constantes no nulas:

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 11. Transformaciones geométricas en el plano.

1. La matriz de un giro.

   Para un número θ cualquiera consideramos la matriz $G_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

   (a) Para $E_1 = (1, 0)^t$ y $E_2 = (0, 1)^t$ calcular GE_1 y GE_2. Interpretar geométricamente el resultado.

   (b) Observar que cualquier vector $X = (x_1, x_2)^t$ puede expresarse como $X = x_1E_1 + x_2E_2$, y que al calcular GX usando esta expresión se obtiene $GX = x_1GE_1 + x_2GE_2$. Interpretar geométricamente esta observación. Concluir que GX representa el resultado de girar X un ángulo θ en sentido antihorario.

   (c) Dados dos números θ y ψ, ¿cuál es el resultado Z de calcular $Y = G_\theta E_1$ y luego $Z = G_\psi Y$? ¿Cómo se interpreta esto geométricamente?

   (d) Comparar el resultado anterior con la acción de la matriz $G_{\theta+\psi}$. ¿Qué famosas fórmulas trigonométricas pueden deducirse de estas manipulaciones?

   (e) Hallar la matriz $G_{\theta+\psi}$ tal que la igualdad $G_{\theta+\psi}X = G_\theta\,(G_\psi X)$ se satisface para todo $X \in \mathbb{R}^2$.

2. La matriz de la simetría respecto a la recta $x_1 = x_2$.

   Ahora consideramos la matriz $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular el producto SX de S por cualquier vector $X = (x_1, x_2)^t$. En particular hacerlo para $(1, 0)^t$, $(0, 1)^t$, $(1, 1)^t$ y $(1, -1)^t$, e interpretar geométricamente.

3. La matriz de la proyección sobre la recta $x_1 = x_2$.

   Consideremos $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

   (a) Calcular el producto SX de S por cualquier vector $X = (x_1, x_2)^t$. En particular hacerlo para $(1,0)^t$, $(0,1)^t$, $(1,1)^t$ y $(1,-1)^t$, e interpretar geométricamente.

   (b) Observar que cualquier $X = (x_1, x_2)^t$ puede expresarse como

   $$X = \frac{x_1 + x_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x_1 - x_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Calcular PX usando esta expresión, e interpretar el resultado.

   (c) Calcular el efecto de aplicar dos veces consecutivas la transformación $X \mapsto PX$ que consiste en multiplicar una columna X por la matriz P. Interpretar geométricamente.

4. Hallar la matriz que representa la composición de la simetría de la parte 2 con un giro de ángulo $\pi/4$ en sentido directo (o antihorario, o el que lleva de $(1,0)$ a $(0,1)$ por el camino más corto). Calcular también la representación matricial de la composición del giro con la simetría.

5. Calcular la composición de la simetría y la proyección de las partes 2 y 3. Componer también la proyección y la simetría.