4 MODELOS LINEALES Y NO LINEALES - REPRESENTACIÓN EN EL ESPACIO DE LAS VARIABLES DE ESTADO

Introducción

Hemos mencionado que los modelos con los que vamos a trabajar son ecuaciones matemáticas, más específicamente ecuaciones algebraicas, diferenciales ordinarias o en derivadas parciales. Particularmente si queremos trabajar con modelos dinámicos las ecuaciones diferenciales son respecto a la variable tiempo. La resolución de dichas ecuaciones diferenciales puede realizarse en el propio dominio del tiempo, en el cual normalmente planteamos nuestro modelo, pero también, como veremos más adelante, pueden realizarse transformaciones de dichas ecuaciones para resolverlas en el dominio de Laplace (ver Capítulo 6) o en el dominio de la frecuencia (ver Capítulo 18). En el dominio de Laplace las ecuaciones diferenciales respecto al tiempo se transforman generalmente en ecuaciones algebraicas. Por otro lado, en el dominio de la frecuencia se puede visualizar gráficamente con relativa sencillez el comportamiento dinámico del sistema.

Restringiéndonos al dominio del tiempo, existe un importante desarrollo matemático para la resolución de modelos lineales, por lo que normalmente se comienza por su estudio; los modelos no lineales suelen ser más complejos de resolver matemáticamente y muchas veces se recurre a linealizar el sistema en un entorno del punto de trabajo.

Representación en el espacio de variables de estado ("State - space models")

Es una forma de escribir los sistemas lineales en el dominio del tiempo. En forma general un modelo dinámico puede plantearse como

$$\dot{x} = f\left(x, u\right)$$

donde $\boldsymbol{x}$ es el vector de variables de estado y $\boldsymbol{u}$ el vector de variables de entrada. Cuando la función $\boldsymbol{f}$ es lineal tenemos el subconjunto de los modelos lineales. En particular la formulación de modelos en variables de estado para sistemas lineales es:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

donde $\boldsymbol{y}$ es el vector de variables de salida y $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$ son matrices. En particular $\boldsymbol{A}$ es la matriz jacobiana.

Veamos un ejemplo aclaratorio. Consideremos dos tanques conectados en serie tal como se muestra en la Figura 4.1

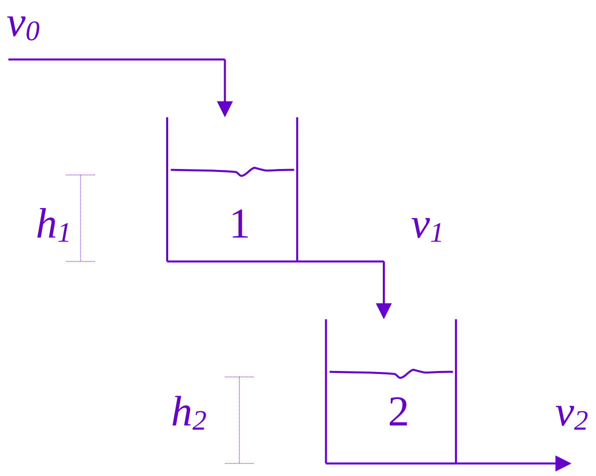

Fig. 4.1 Dos tanques de líquido conectados en serie.

Asumamos que el flujo que sale de cada tanque es proporcional a la altura de líquido (esto no es rigurosamente cierto pero puede ser una aproximación válida si las alturas no varían mucho): $v_i = \beta_i h_i$

Realizando los correspondientes balances de materia en cada tanque, y asumiendo que el área transversal horizontal (A_i) es constante en cada tanque:

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{v_0}{A_1} - \frac{\beta_1}{A_1} h_1$$

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{v_1}{A_2} - \frac{\beta_2}{A_2} h_2 = \frac{\beta_1}{A_2} h_1 - \frac{\beta_2}{A_2} h_2$$

Estas mismas ecuaciones pueden escribirse en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_1}{A_1} & 0 \\ \frac{\beta_1}{A_2} & -\frac{\beta_2}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} v_0$$

O bien

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

donde

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad \mathrm{u} = v_0 \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_1}{A_1} & 0 \\ \frac{\beta_1}{A_2} & -\frac{\beta_2}{A_2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si tomamos las alturas también como variables de salida también podemos escribir la siguiente ecuación

$$\mathrm{y} = \mathbf{C}\mathrm{x} + \mathbf{D}\mathrm{u}$$

$$\mathrm{y} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

con $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = 0$

<u>Linealización de modelos no lineales</u>

Veamos primero un ejemplo de una función de una variable:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

Llamemos x_s a la solución de estado estacionario, esto es $f(x_s) = 0$. Realizando una expansión por Taylor en torno al punto de estado estacionario:

$$f(x) = f(x_s) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_s} (x - x_s) + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_s} (x - x_s)^2 + \ldots$$

Despreciando los términos de mayor orden

$$f(x) \approx f(x_s) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_s} (x - x_s)$$

Por ser estado estacionario $f(x_s) = 0$, entonces

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(x - x_s)}{dt} \approx \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_s} (x - x_s)$$

O definiendo la variable desviación $x' = x - x_s$

$$\frac{dx'}{dt} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_s} x'$$

$$\frac{dx'}{dt} = \alpha \ x'$$

Donde α es la derivada de la función evaluada en el punto de estado estacionario.

Supongamos ahora un ejemplo de una función con una variable de estado *x* y una de entrada *u*:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x,u)$$

Realizando una expansión por Taylor en torno al punto de estado estacionario (x_s , u_s):

$$\dot{x} = f(x_s,u_s) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_s,u_s}(x-x_s) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_s,u_s}(u-u_s) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_s}(x-x_s)^2 +$$

$$+\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u}\right|_{x_s}(x-x_s)(u-u_2) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right|_{x_s}(u-u_s)^2 + \ldots$$

Despreciando los términos de mayor orden

$$\dot{x} \approx f(x_s,u_s) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_s,u_s}(x-x_s) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_s,u_s}(u-u_s)$$

Por ser estado estacionario $f(x_s , u_s) = 0$, entonces

$$\frac{d(x-x_s)}{dt} \approx \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_s,u_s}(x-x_s) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_s,u_s}(u-u_s)$$

O definiendo las variables desviación $x' = x - x_s$ y $u' = u - u_s$

$$\frac{dx'}{dt} \approx \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_s,u_s} x' + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_s,u_s} u'$$

$$\frac{dx'}{dt} = a\ x' + b\ u'$$

Veamos un ejemplo: Tanque de líquido con salida proporcional a la raíz cuadrada de la altura de líquido (Figura 4.2; ver 'ejem4.1').

$$v = \beta\sqrt{h}$$

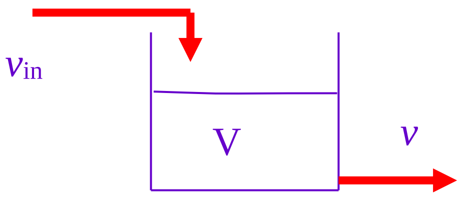

Fig. 4.2 Tanque de líquido; el flujo de salida es proporcional a la raíz cuadrada de la altura de líquido

La función del modelo, derivada del balance de materia

$$f\left(h,v\right)=\frac{dh}{dt}=-\frac{\beta\sqrt{h}}{A}+\frac{v_{in}}{A}$$

donde h es la variable de estado, v_{in} es la variable de entrada y β y A son los parámetros. El sistema es no lineal debido a que aparece la raíz cuadrada de la variable. Usando Taylor

$$f\left(h,v\right)\approx\left[\frac{v_s}{A}-\frac{\beta}{A}\sqrt{h_s}\right]-\frac{\beta}{2A\sqrt{h_s}}\left(h-h_s\right)+\frac{1}{A}\left(v-v_s\right)$$

El término entre paréntesis rectos es cero porque es el valor en estado estacionario

$$\frac{d\left(h-h_s\right)}{dt}\approx-\frac{\beta}{2A\sqrt{h_s}}\left(h-h_s\right)+\frac{1}{A}\left(v-v_s\right)$$

Y usando las variables desviación

$$\frac{dh'}{dt}\approx-\frac{\beta}{2A\sqrt{h_s}}h'+\frac{1}{A}v'$$

O bien llamando $x = h'$, $u = v'$

$$\frac{dx}{dt}=ax+bu$$

con

$$a=-\frac{\beta}{2A\sqrt{h_s}} \qquad b=\frac{1}{A}$$

En forma general puede escribirse

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1\left(x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots.,u_m\right)\\
&\ldots\\
&\ldots\\
\dot{x}_n &= f_n\left(x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots.,u_m\right)\\
\dot{y}_1 &= g_1\left(x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots.,u_m\right)\\
&\ldots\\
&\ldots\\
\dot{y}_r &= g_r\left(x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots.,u_m\right)
\end{aligned}$$

Si se tiene $\boldsymbol{x}$ el vector de n variables de estado, $\boldsymbol{u}$ el vector de m variables de entrada e $\boldsymbol{y}$ el vector de r variables de salida

$$\dot{x} = f(x,u)$$
$$\dot{y} = g(x,u)$$

Para linealizar se definen las matrices de la siguiente manera:

$$A_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{x_s,u_s} \qquad B_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right|_{x_s,u_s} \qquad C_{ij} = \left.\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right|_{x_s,u_s} \qquad D_{ij} = \left.\frac{\partial g_i}{\partial u_j}\right|_{x_s,u_s}$$

Si anotamos con ' las variables desviación

$$\dot{x}' = Ax' + Bu'$$
$$y' = Cx' + Du'$$

Se encuentra frecuentemente que las variables de salida no son función de las de entrada y entonces $\boldsymbol{D = 0}$; e incluso muchas veces las variables de salida (y) son las propias variables de estado (x) con lo cual la matriz $\boldsymbol{C}$ es la matriz identidad.

Veamos otro ejemplo: dos tanques en serie, ambos en el mismo nivel (Figura 4.3). Asumamos que el flujo que sale de cada tanque es proporcional a la raíz cuadrada de la altura de líquido:

$$v = \beta\sqrt{h}$$

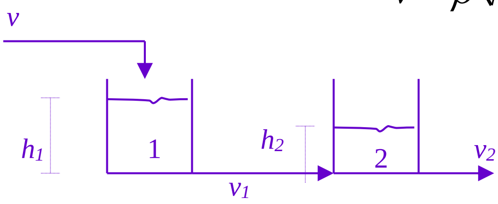

Fig. 4.3 Dos tanques en serie colocados al mismo nivel.

Realizando los correspondientes balances de materia, y asumiendo que el área transversal horizontal de cada tanque (A_i) es constante:

$$\frac{dh_1}{dt} = f_1(h_1,h_2,v) = \frac{v_0}{A_1} - \frac{\beta_1}{A_1}\sqrt{h_1 - h_2}$$
$$\frac{dh_2}{dt} = f_2(h_1,h_2,v) = \frac{\beta_1}{A_2}\sqrt{h_1 - h_2} - \frac{\beta_2}{A_2}\sqrt{h_2}$$

Asumamos que solo se mide la altura del segundo tanque; la variable de salida es entonces $y = h_2 - h_{2s}$

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 - h_{1s} \\ h_2 - h_{2s} \end{bmatrix} \qquad \mathrm{u} = v - v_s \qquad \mathrm{y} = h_2 - h_{2s}$$

$$A_{11} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial h_1}\right|_{\mathrm{h_s}, v_s} = -\frac{\beta_1}{2A_1\sqrt{h_{1s} - h_{2s}}} \qquad B_{11} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial v}\right|_{\mathrm{h_s}, v_s} = \frac{1}{A_1}$$

$$A_{12} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial h_2}\right|_{\mathrm{h_s}, v_s} = \frac{\beta_1}{2A_1\sqrt{h_{1s} - h_{2s}}} \qquad B_{21} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial v}\right|_{\mathrm{h_s}, v_s} = 0$$

$$A_{21} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial h_1}\right|_{\mathrm{h_s}, v_s} = \frac{\beta_1}{2A_1\sqrt{h_{1s} - h_{2s}}} \qquad C_{11} = \left.\frac{\partial g}{\partial h_1}\right|_{\mathrm{h_s}, v_s} = 0$$

$$A_{22} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial h_2}\right|_{\mathrm{h_s}, v_s} = -\frac{\beta_1}{2A_1\sqrt{h_{1s} - h_{2s}}} - \frac{\beta_2}{2A_2\sqrt{h_{2s}}} \qquad C_{21} = \left.\frac{\partial g}{\partial h_2}\right|_{\mathrm{h_s}, v_s} = 1$$

De modo que se puede escribir el modelo linealizado en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\beta_1}{2A_1\sqrt{h_{1s} - h_{2s}}} & \dfrac{\beta_1}{2A_1\sqrt{h_{1s} - h_{2s}}} \\ \dfrac{\beta_1}{2A_2\sqrt{h_{1s} - h_{2s}}} & -\dfrac{\beta_1}{2A_2\sqrt{h_{1s} - h_{2s}}} - \dfrac{\beta_2}{2A_2\sqrt{h_{2s}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

donde

$$y = x_2 = h_2 - h_{2s}$$

<u>Solución para el caso en que no hay entradas ("zero-input form")</u>

Recordemos la forma general para la formulación en el espacio de las variables de estado de los modelos lineales:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Pero consideremos primero el caso especial en el que las entradas se mantienen constantes en el valor de estado estacionario (eventualmente se puede hacer un cambio de variable) y por lo tanto en variables desviación $u = 0$:

$$\dot{x} = Ax$$

De igual forma que para una única variable la solución de la ecuación $\dot{x} = ax$ es $x(t) = e^{at}x(0)$ que es estable (converge a un valor) si $a < 0$, en forma similar para varias variables

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

que es estable si los valores propios (“eigenvalues”) de ***A*** son negativos.

Para calcular la matriz exponencial, consideremos la matriz ***V*** de vectores propios (“eigenvectors”):

$$V = [\xi_1 \quad \xi_2] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

y la matriz de los valores propios

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$A = V\Lambda V^{-1}$$

$$e^{At} = V\, e^{\Lambda t}\, V^{-1}$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

Por lo que las soluciones del sistema están dadas por

$$x(t) = V\, e^{\Lambda t}\, V^{-1}x(0)$$

Donde $x(0)$ son las condiciones iniciales.

Dependiendo de cuáles sean las condiciones iniciales elegidas será la evolución en el tiempo de las variables de estado. En particular, si la condición inicial está en la misma dirección del vector propio ξ_i entonces la “velocidad de respuesta” será proporcional al valor propio λ_i (ver ‘ejem4.2’ y ‘ejem4.3’).

Solución para el caso general

Recordemos que la forma general de los sistemas lineales era

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

De igual forma que para un única variable $\dot{x} = ax + bu$

la solución es

$$x(t) = e^{at} x(0) + \left(e^{at} - 1\right)\frac{b}{a} u\left(0\right)$$

cuando *u(t) = cte = u(0)* , en forma similar para varias variables

$$x(t) = P\ x(0) + Q\ u(0)$$

donde $P = e^{At}$ $\qquad Q = \left(P - I\right)\ A^{-1}B$