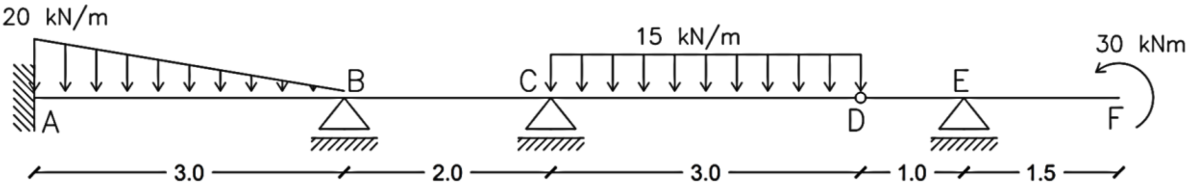
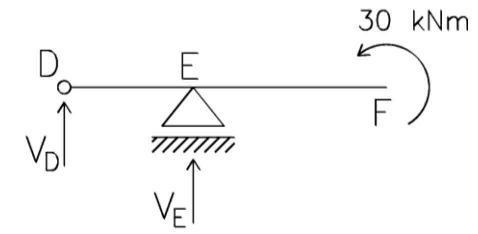
EXAMEN- 13 de febrero de 2023

Solución ejercicio 2



i) Hallar las reacciones de la estructura.

Separamos en estructuras tipo. Por un lado, analizamos el tramo DEF:

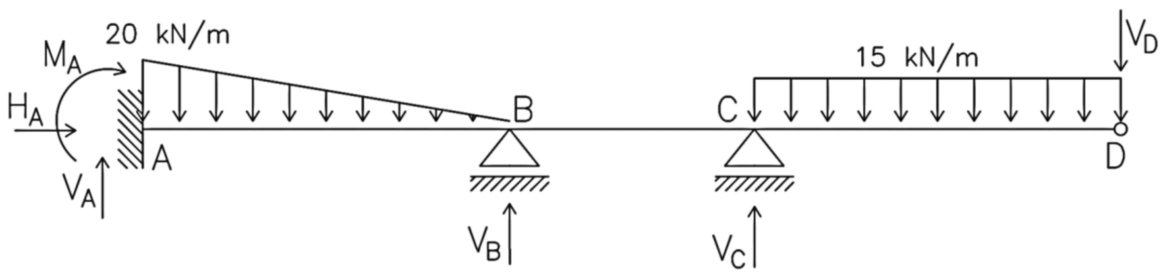


- $\sum M_D = 0 \leftrightarrow V_E \cdot 1\,m + 30\,kNm = 0$

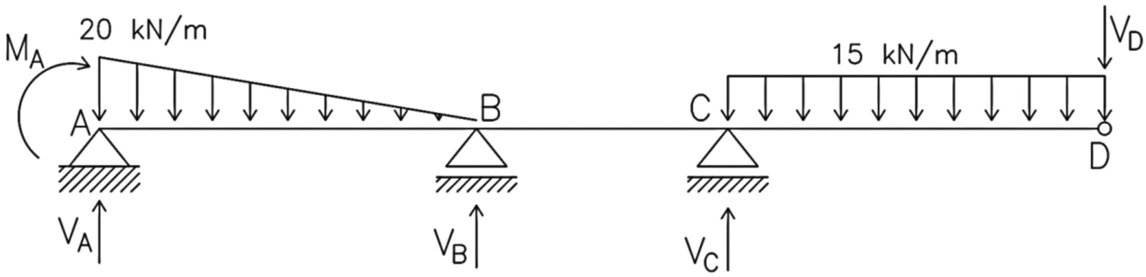
  $\boldsymbol{V_E = -30\,kN}$
- $\sum V = 0 \leftrightarrow V_E + V_D = 0$

  $V_D = 30\,kN$

Estudiamos el tramo ABCD:



Podemos ver que la estructura es **hiperestática**, por lo cual, no basta con aplicar las ecuaciones de equilibrio. Se trabaja con la siguiente estructura equivalente, imponiendo giro nulo en el nodo A y aplicando un momento en el mismo (ya que en la estructura original hay un empotramiento):



Imponemos giro nulo en A:

$$\theta_A^1 = \alpha_{0,A}^1 + M_A \cdot \alpha_A^1 + M_B \cdot \beta^1 - \Psi^1 = 0$$

$$\theta_A^1 = \frac{20\ kN/m \cdot (3\ m)^3}{45EI} + M_A \cdot \frac{3\ m}{3EI} + M_B \cdot \frac{3\ m}{6EI} = 0$$

$$12 + M_A + \frac{M_B}{2} = 0$$

Aplicamos ecuación de 3 momentos en el nodo B:

$$M_A \cdot \beta^1 + M_B \cdot (\alpha_B^1 + \alpha_B^2) + M_C \cdot \beta^2 + \alpha_{0,B}^1 + \alpha_{0,B}^2 - \Psi^1 + \Psi^2 = 0$$

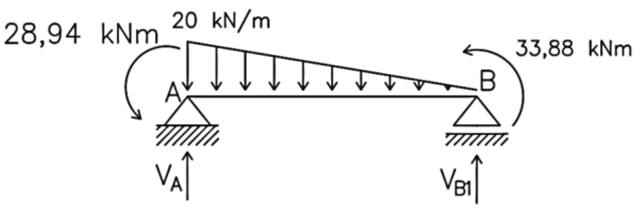
$$M_A \cdot \frac{3\ m}{6EI} + M_B \cdot \left(\frac{3\ m}{3EI} + \frac{2\ m}{3EI}\right) - 157{,}5\ kNm \cdot \frac{3\ m}{6EI} + \frac{7 \cdot 20\ kN/m \cdot (3\ m)^3}{360EI} = 0$$

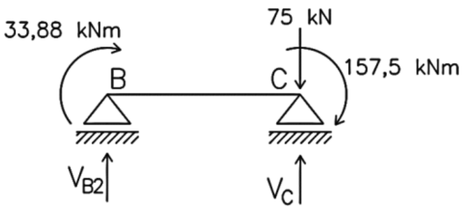
$$\frac{M_A}{2} + M_B \cdot \frac{5}{3} - 42 = 0$$

A partir de ambas ecuaciones se obtienen M_A y M_B:

$$\boldsymbol{M_A = -28{,}94\ kNm}$$
$$M_B = 33{,}88\ kNm$$

Se procede a obtener las reacciones en los apoyos restantes:





- $\boldsymbol{V_A = 40,94\ kN}$
- $\boldsymbol{V_B} = V_{B1} + V_{B2} = -10{,}94 - 95{,}69 = \boldsymbol{-106,63\ kN}$
- $\boldsymbol{V_C = 170,69\ kN}$

Resumen de reacciones:

- $V_A = 40{,}94\ kN\ \uparrow$
- $H_A = 0\ kN$
- $M_A = 28{,}94\ kN\ \circlearrowleft$
- $V_B = 106{,}63\ kN\ \downarrow$
- $V_C = 170{,}69\ kN\ \uparrow$
- $V_E = 30\ kN\ \downarrow$

ii) Trazar diagramas de solicitaciones (N, V, M).

La directa de todas las barras vale 0.

Diagrama de cortante:

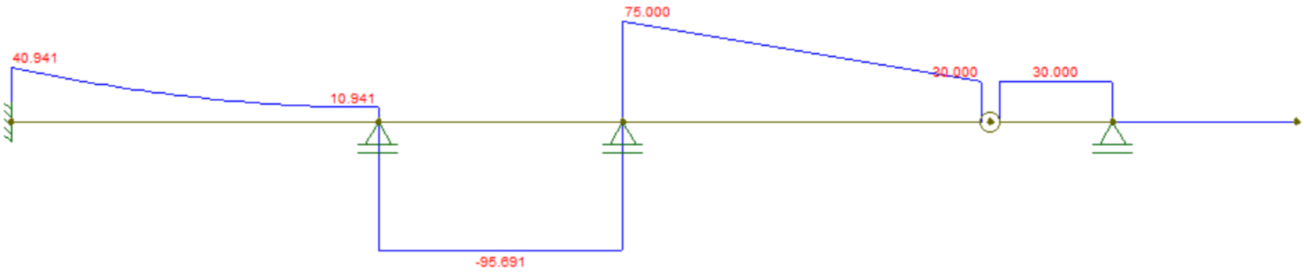
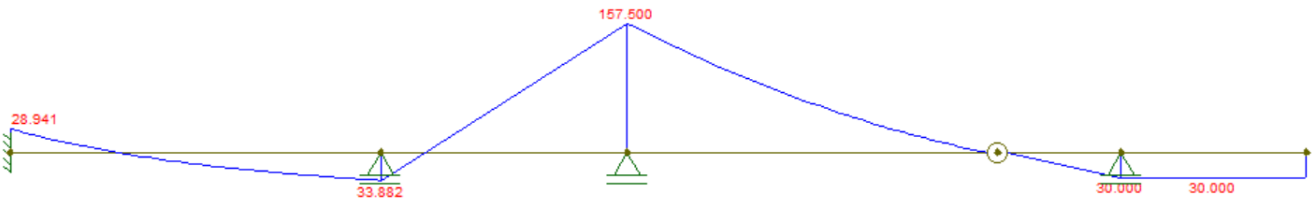


Diagrama de momento flector:



iii) Dimensionar toda la estructura con un único perfil IPN. Verificar tensiones normales y rasantes ($\sigma_{adm} = 140\ MPa$; $\tau_{adm} = 70\ MPa$).

Tensión normal máxima:

$$\sigma_{máx} = \frac{M_{máx}}{W} = \frac{157{,}5\ kNm}{W} \leq \sigma_{adm} = 140\ MPa$$

$$\frac{157{,}5\ kNm}{140\ MPa} = 1125\ cm^3 \leq W \rightarrow Usamos\ un\ PNI\ 380$$

Verificamos que la tensión rasante máxima no supere la admisible para dicho perfil:

$$\tau_{máx} = \frac{V_{máx} \cdot \mu}{I \cdot b} = \frac{95{,}7\ kN \cdot 741\ cm^3}{19610\ cm^4 \cdot 1{,}37\ cm} = 26{,}40\ MPa \leq \tau_{adm} = 70\ MPa$$

EXAMEN – 13 de febrero de 2023

Solución ejercicio 2

Para la estructura de la Figura 1:

1. Hallar las reacciones en los apoyos.

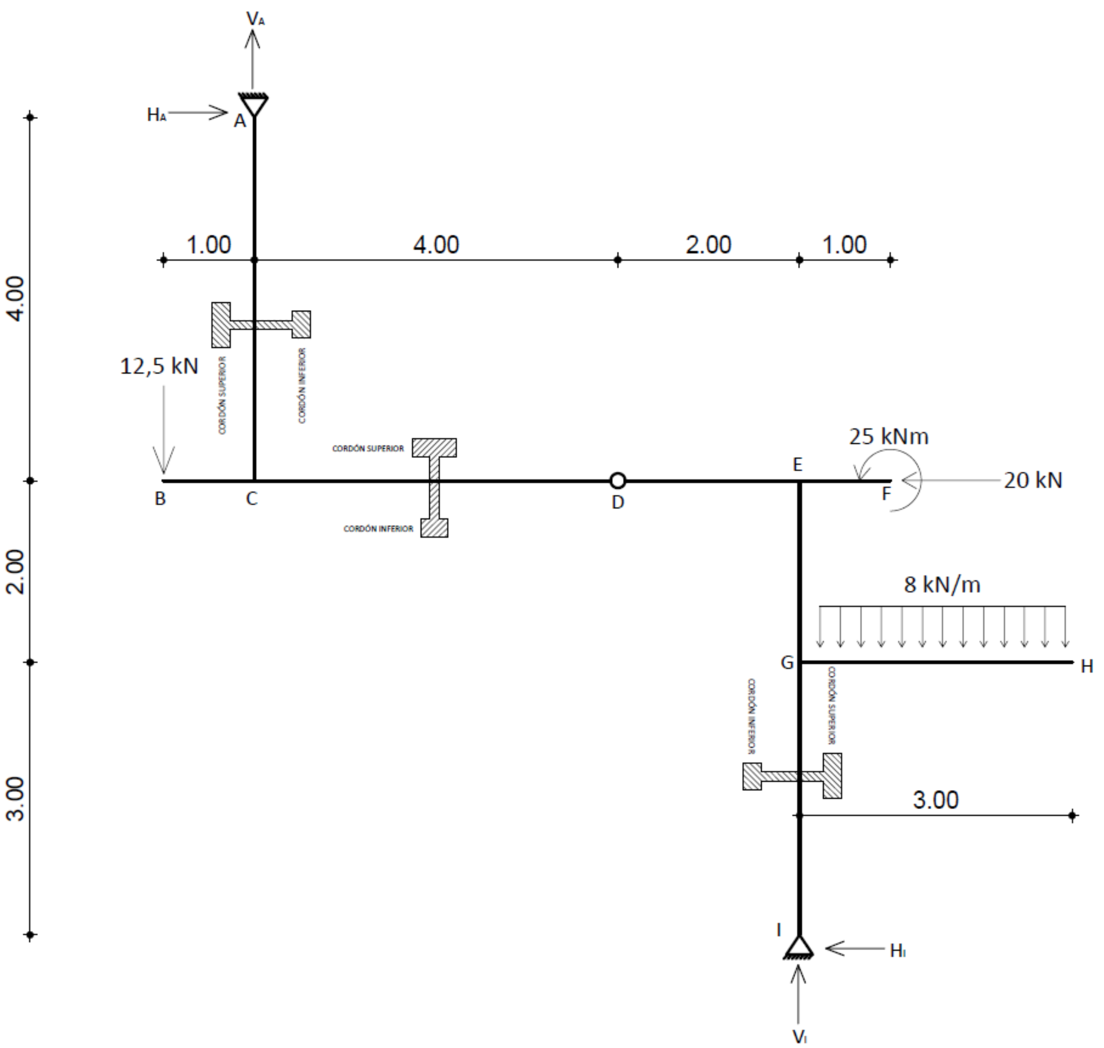


Figura 1: Estructura a estudiar (dimensiones en m).

Se procede a hallar las reacciones de la estructura aplicando las ecuaciones de equilibrio.

$$\sum M_A = 0 \rightarrow 12.5 \cdot 1 + 25 + V_I \cdot 6 - 20 \cdot 4 - 8 \cdot 3 \cdot 7.5 - H_I \cdot 9 = 0$$

$$\sum M_D^{der} = 0 \rightarrow 25 + V_I \cdot 2 - 8 \cdot 3 \cdot 3.5 - H_I \cdot 5 = 0$$

Sustituyendo con los datos numéricos obtenemos un sistema de 2x2.

$$\left.\begin{array}{r} 6V_I - 222.5 = 9H_I \\ 2V_I - 59 = 5H_I \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} H_I = 7.6\ kN \\ V_I = 48.5\ kN \end{array}$$

$$\sum F_{horizontales} = 0 \rightarrow -H_I - 20 + H_A = 0 \rightarrow H_A = 27.6\ kN$$

$$\sum F_{verticales} = 0 \rightarrow V_I + V_A - 12.5 - 8 \cdot 3 = 0 \rightarrow V_G = 12.0\ kN$$

2. Trazar los diagramas de solicitaciones (directa, cortante y momento flector) en todas las barras.

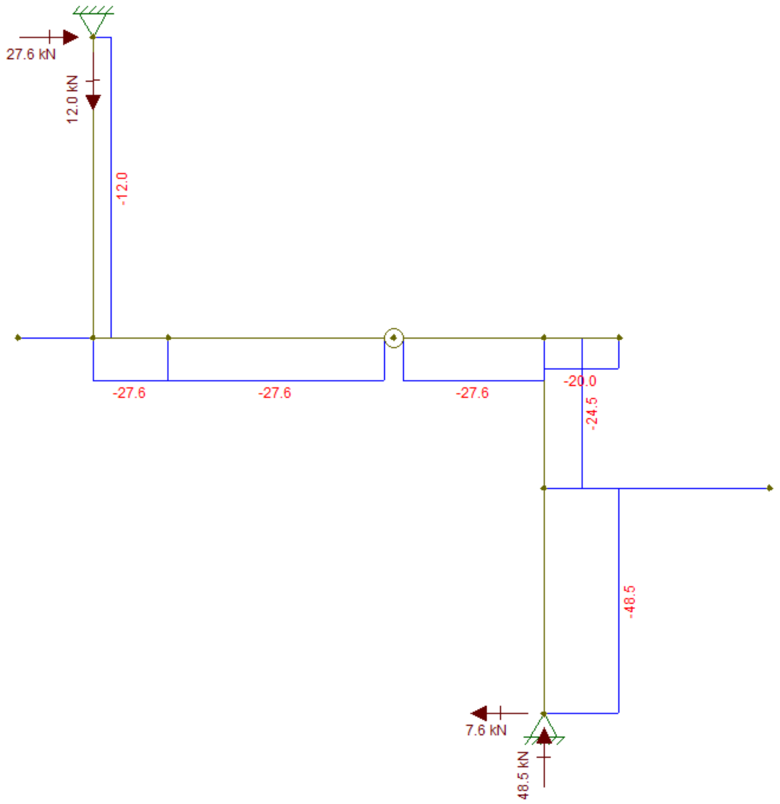


Diagrama de directas (kN)

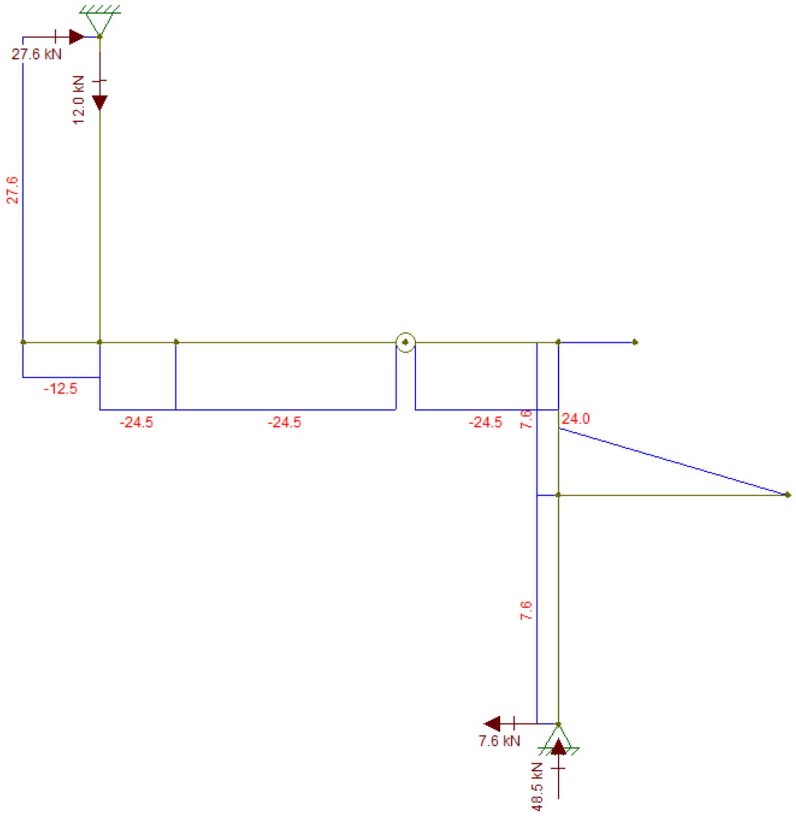


Diagrama de cortante (kN)

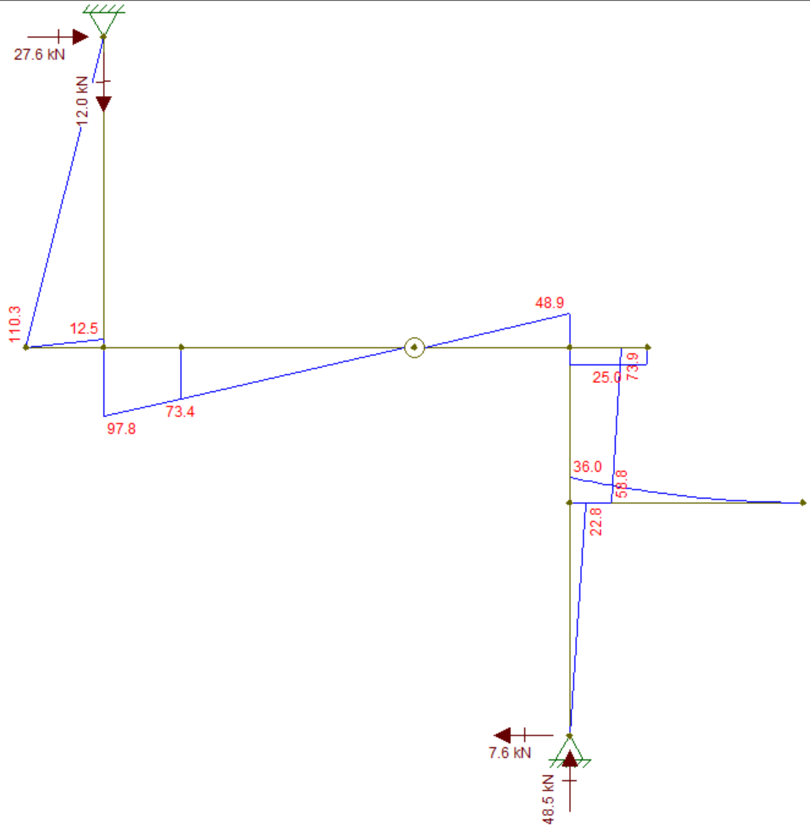


Diagrama de momentos (kNm)

3. Realizar el diagrama de tensiones rasantes para la sección más exigida teniendo en cuenta que la estructura fue construida con la sección presentada en la Figura 2.

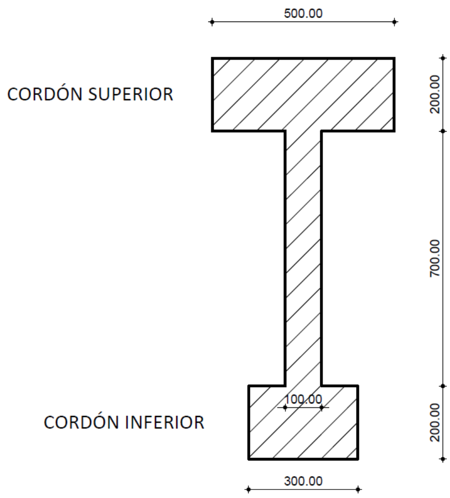


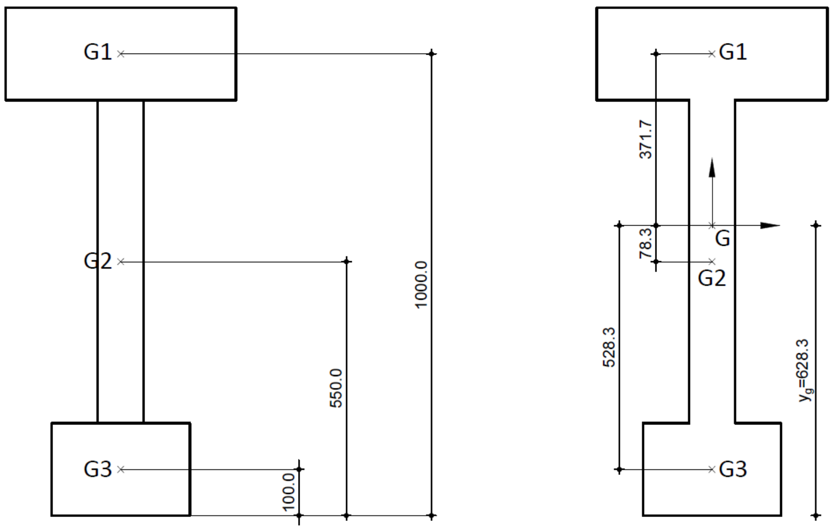
Figura 2: Sección de la estructura (dimensiones en mm).

La máxima tensión rasante se desarrollará en aquella sección que esté sometida al máximo esfuerzo cortante. De toda la estructura, la barra AC es la que está sometida a mayor cortante, presentando un valor de $V_{máx} = 27.6\ kN$.

Para realizar el diagrama de tensiones rasantes debemos calcular los parámetros seccionales. Comenzamos calculando el baricentro de la sección:

Por tener simetría axial, sabemos que el baricentro estará contenido dentro del eje de simetría de la sección. Resta ahora hallar la altura del baricentro.

$$y_G = \frac{500 \cdot 200 \cdot 1000 + 100 \cdot 700 \cdot 550 + 300 \cdot 200 \cdot 100}{500 \cdot 200 + 100 \cdot 700 + 300 \cdot 200} = 628.3\ mm$$

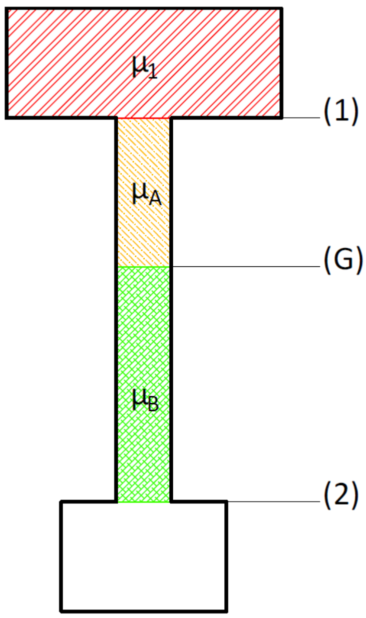


Procedemos ahora a calcular la inercia de la sección.

$$I_X = \frac{500 \cdot 200^3}{12} + 500 \cdot 200 \cdot 371.7^2 + \frac{100 \cdot 700^3}{12} + 100 \cdot 700 \cdot 78.3^2 + \frac{300 \cdot 200^3}{12} + 300 \cdot 200 \cdot 528.3^2$$

$$I_X = 3.44 \times 10^{10}\ mm^4$$

Una vez obtenida la inercia de la sección solo falta hallar el momento de primer orden para cada punto relevante de la sección. Estos puntos son aquellos en donde la sección presenta una variación en su ancho así como en su baricentro (ya que allí el flujo de cortante será máximo).



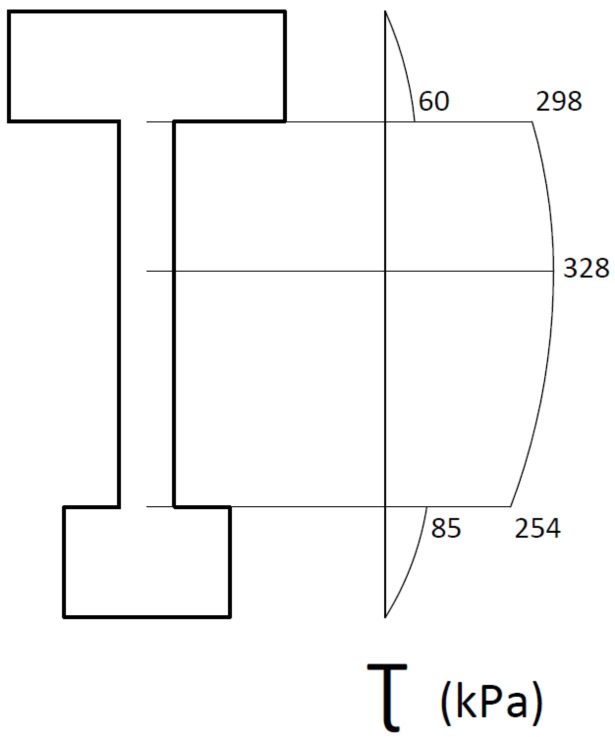
$$\mu_1 = 500 \cdot 200 \cdot 371.7 = 3.72\ \times 10^7\ mm^3$$

$$\mu_G = \mu_1 + \mu_A = 3.72\ \times 10^7 + 100 \cdot \frac{271.7^2}{2} = \ 4.09 \times 10^7\ mm^3$$

$$\mu_2 = \mu_G - \mu_B = 4.09\ \times 10^7 - 100 \cdot \frac{428.3^2}{2} = \ 3.17 \times 10^7\ mm^3$$

Una vez calculados todos los parámetros, aplicamos Jourawski y determinamos el diagrama de tensiones rasantes en la sección más exigida de toda la estructura.

$$\tau = \frac{V \cdot \mu}{I_X \cdot b}$$



Diagrama