EXAMEN - RESISTENCIA DE MATERIALES 1

JULIO 2021

EJERCICIO 1 – TEÓRICO

a)

I) Tomando los ejes convencionales y considerando las reacciones en los apoyos positivas en dirección de los ejes se tiene:

- Por equilibrio de momentos:

$$\sum M^D = 0 \rightarrow P \cdot \frac{L}{2} + q \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{4} - H_C \cdot L = 0 \rightarrow H_c = \frac{P}{2} + \frac{q \cdot L}{8}$$

- Por equilibrio de fuerzas horizontales:

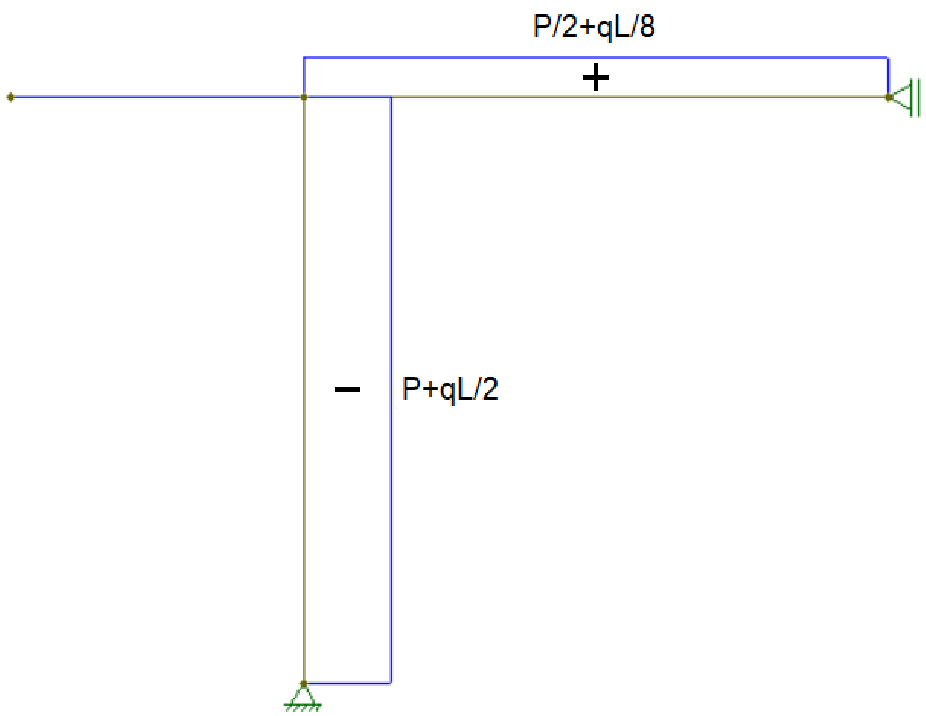
$$\sum H = 0 \rightarrow H_D + H_C = 0 \rightarrow H_D = -\left(\frac{P}{2} + \frac{q \cdot L}{8}\right)$$

- Por equilibrio de fuerzas verticales:

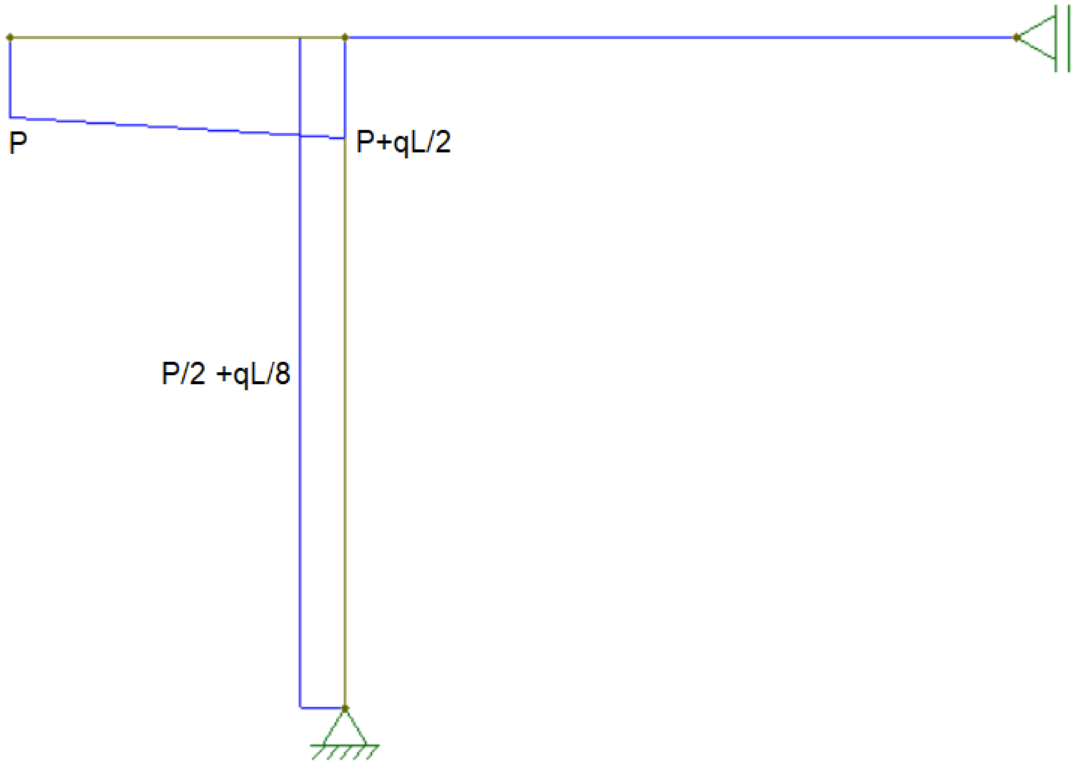
$$\sum V = 0 \rightarrow -P - q \cdot \frac{L}{2} + V_D = 0 \rightarrow V_D = P + \frac{q \cdot L}{2}$$

Habiendo hallado las reacciones se pueden trazar los diagramas de solicitaciones que siguen a continuación.

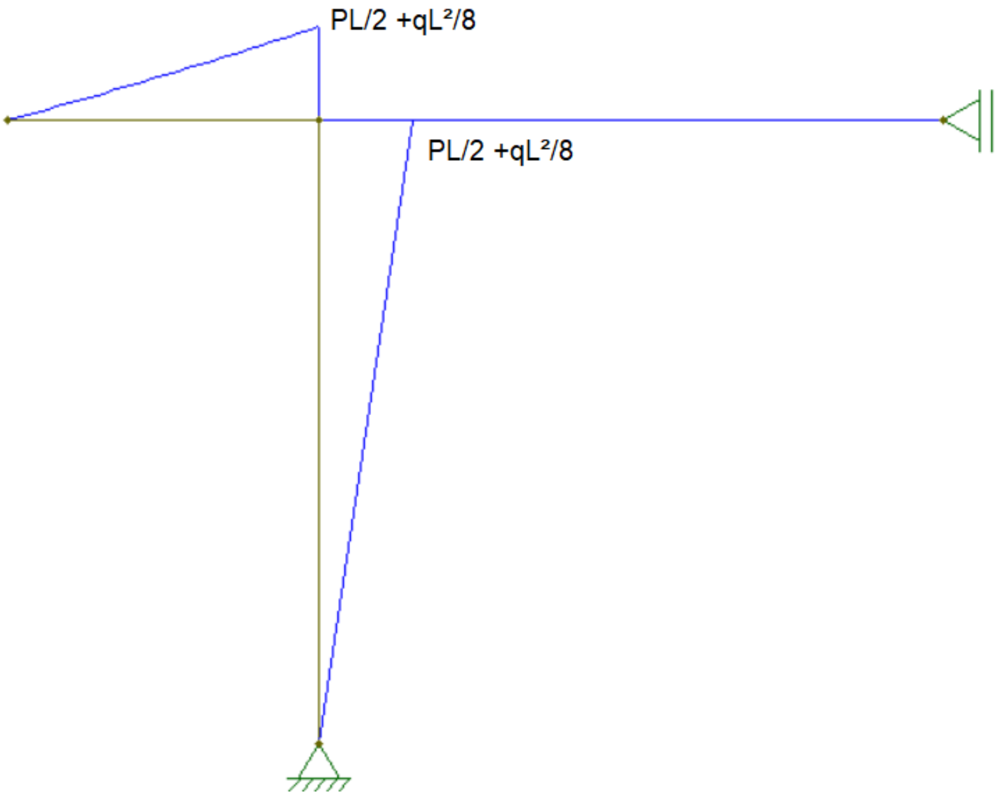
Directa (N)



Cortante (V)



Momento (M)



II) Hay dos formas de lograr lo que pide la letra modificando los apoyos de la estructura de modo que la estructura resultante siga siendo estable, y ambas se comentan a continuación.

- Una opción es modificar el apoyo en el nodo C, de modo que restrinja el desplazamiento vertical y no el horizontal. De ese modo la reacción en C no tiene componente horizontal y por lo tanto el tramo BC ya no queda sometido a solicitación directa.

- La otra opción es liberar el nodo C, es decir, quitar completamente el apoyo de modo que este extremo quede libre, y colocar un empotramiento en el nodo D para que la estructura no pase a ser un mecanismo.

b)

I) Para resolver la estructura se debe imponer que el giro en el empotramiento sea nulo.

Utilizando los datos brindados en la letra y tomando el momento en A positivo se tiene:

$$\theta_A = \frac{M_A L}{3EI} + \frac{PL^2}{16EI} = 0 \rightarrow M_A = -\frac{3PL}{16}$$

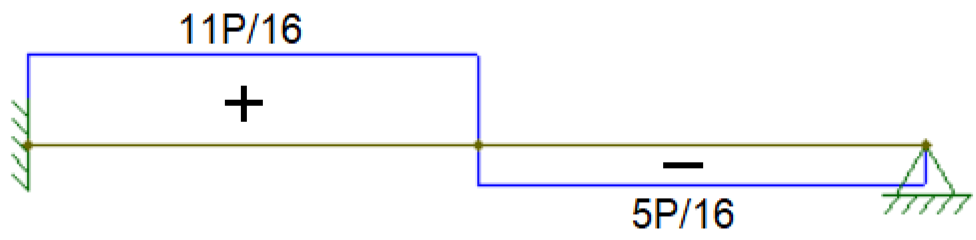
Habiendo hallado el momento en el empotramiento se pueden determinar las reacciones verticales en los apoyos, tomadas positivas hacia arriba.

$$R_A = \frac{P}{2} - \frac{M_A}{L} = \frac{P}{2} + \frac{3P}{16} \rightarrow R_A = \frac{11P}{16}$$

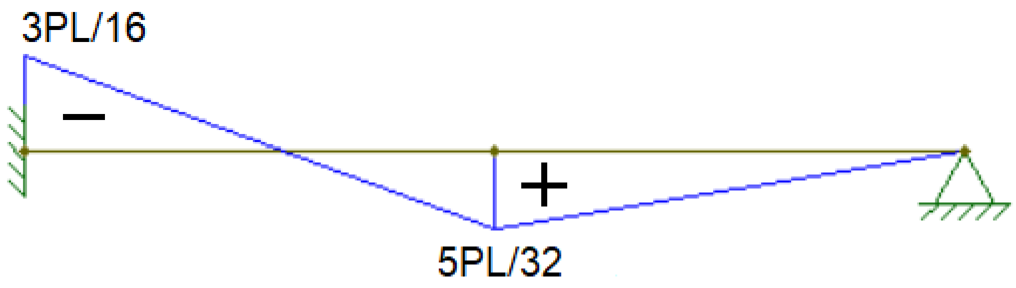
$$R_B = \frac{P}{2} + \frac{M_A}{L} = \frac{P}{2} - \frac{3P}{16} \rightarrow R_B = \frac{5P}{16}$$

Con los valores de las reacciones se pueden trazar los diagramas de solicitaciones. Se halla en primer lugar el diagrama de cortante para luego hallar el de momento. Se presentan ambos a continuación.

Cortante (V)



Momento (M)



II) Para hallar el giro y la flecha en el punto medio de la viga es necesario conocer la ecuación del giro $\theta(x)$ y la ecuación de la flecha $v(x)$ en algún tramo de la misma que incluya el punto medio.

Se decide entonces trabajar con la primera mitad de la viga, es decir, si definimos el origen de la coordenada x en el extremo A y la coordenada crece de izquierda a derecha, trabajaremos con $x \in [0; L/2]$.

Será de utilidad la relación que guarda la curvatura con la ecuación del giro y la flecha, que es la siguiente:

$$\frac{d^2\, v(x)}{dx} = \frac{d\, \theta(x)}{dx} = \frac{M(x)}{EI}$$

Será necesario entonces determinar la ecuación del momento en el tramo de la viga mencionado. Utilizando el diagrama de momentos, se tiene que la ecuación es lineal, y sigue la siguiente expresión:

$$M(x) = \frac{11Px}{16} - \frac{3PL}{16} \quad \forall\ x\ /\ 0 \le x \le \frac{L}{2}$$

Se determina en primer lugar la ecuación del giro $\theta(x)$ en el tramo considerado:

$$\theta(x) = \theta(x=0) + \int_0^x \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{11Px}{16} - \frac{3PL}{16}\right) dx \quad \forall\ x\ /\ 0 \le x \le \frac{L}{2}$$

$$\rightarrow \theta(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{11Px^2}{32} - \frac{6PLx}{32}\right) \quad \forall\ x\ /\ 0 \le x \le \frac{L}{2}$$

Evaluando la ecuación anterior en el punto medio de la viga se tiene el giro buscado:

$$\theta\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{-PL^2}{128EI}$$

Se determina ahora la ecuación de flecha $v(x)$ en el tramo considerado:

$$v(x) = v(x=0) + \int_0^x \frac{1}{EI}\left(\frac{11Px^2}{32} - \frac{6PLx}{32}\right)dx \quad \forall \ x \ / \ 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

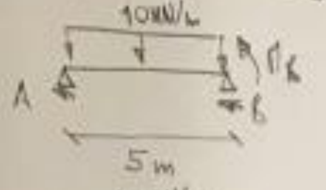
$$\rightarrow v(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{11Px^3}{96} - \frac{9PLx^2}{96}\right) \ \forall \ x \ / \ 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

Evaluando la ecuación anterior en el punto medio de la viga se tiene la flecha buscada:

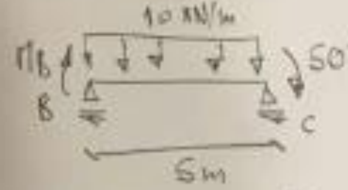
$$v\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{-7PL^3}{768EI}$$

Solución Ej 1 Ex E1 27 de julio de 2021

1 a)

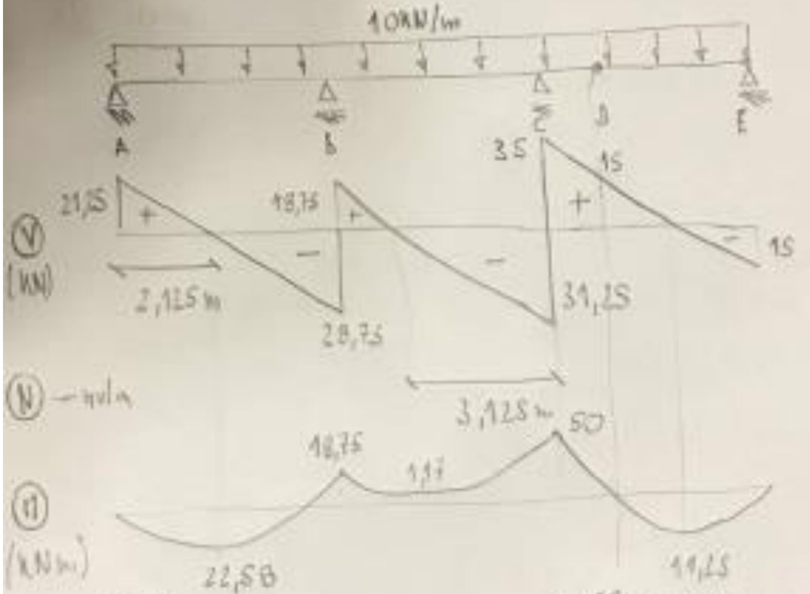


$$\theta_B^- = \frac{10\,kN/m\,(5m)^3}{24EI} + \frac{M_B\,5m}{3EI}$$

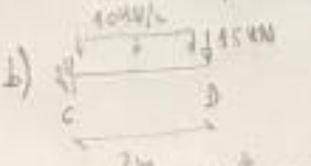


$$\theta_B^+ = \frac{M_B\,5m}{3EI} + \frac{10\,kN/m\,(5m)^3}{24EI} - \frac{50\,kNm\cdot 5m}{6EI}$$

$$\theta_B^- + \theta_B^+ = 0 \Rightarrow 2\left[\frac{10\,kN/m\,(5m)^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{24EI}\;8} + \frac{M_B\,\cancel{5m}}{\cancel{3EI}}\right] = \frac{50\,kNm\,\cancel{5m}}{{}_2\cancel{6}\,\cancel{EI}} \Rightarrow M_B = -18{,}75\,kNm$$



b)



$$\delta_{D1} = \frac{10\,kN/m\,(2m)^4}{8EI} + \frac{15\,kN\,(2m)^3}{3EI} = \frac{60\,kNm^3}{EI}$$

giro horario

$$\theta_C = \frac{10\,kN/m\,(5m)^3}{24EI} - \frac{18{,}75\,kNm\cdot 5m}{6EI} - \frac{50\,kNm\cdot 5m}{3EI} = \frac{-46{,}875\,kNm^2}{EI}$$

$$\delta_{DTot} = \delta_{D1} + \theta_C\,2m = \boxed{\frac{153{,}75\,kN\,m^3}{EI}\ \text{(hacia abajo)}}$$

1) c)

$$A'_{hom} = \frac{1}{7} \cdot 60cm \cdot 20cm = 171{,}43cm^2$$

$$A'_a = 1{,}55cm \cdot 54cm + 2 \cdot 30cm \cdot 3cm = 263{,}7cm^2$$

$$\Rightarrow A_{TOT\,homo} = 171{,}43 + 263{,}7 = 435{,}13cm^2$$

$$y_{G\,homo} = \frac{(263{,}7 \times 30 + 171{,}43 \times 70)}{435{,}13} = 45{,}76\,cm$$

$$I_{Acero} = 1{,}55 \cdot \frac{(54)^3}{12} + 2 \cdot \left[30 \frac{(3)^3}{12} + 30 \cdot 3 \cdot (28{,}5)^2\right] = 166.589{,}1cm^4$$

$$I_{TOT\,homo} = 166.589{,}1cm^4 + 263{,}7cm^2 (45{,}76 - 30)^2 + \frac{1}{7} 60cm \frac{(20cm)^3}{12} + 171{,}43cm^2 (70cm - 45{,}76cm)^2$$

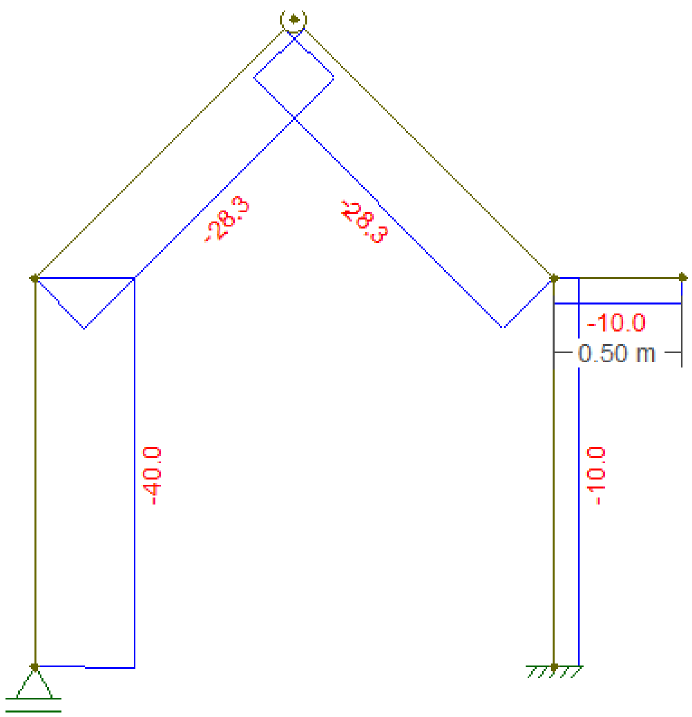
$$I_{TOT\,homo} = 338.528{,}99\,cm^4$$

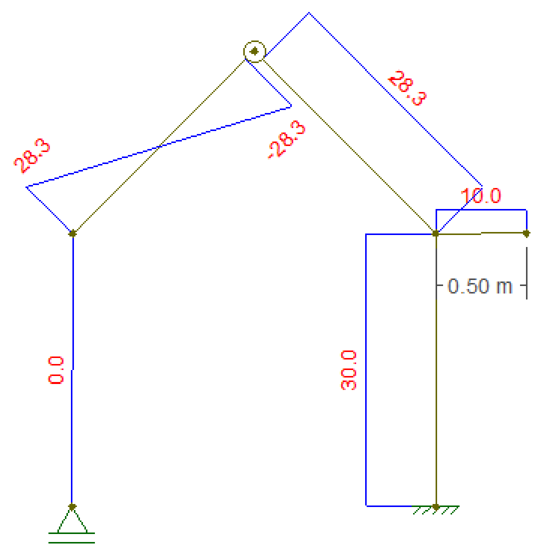
$$S_{homo} = 171{,}43cm^2 (70 - 45{,}76) = 4.155{,}46\,cm^3$$

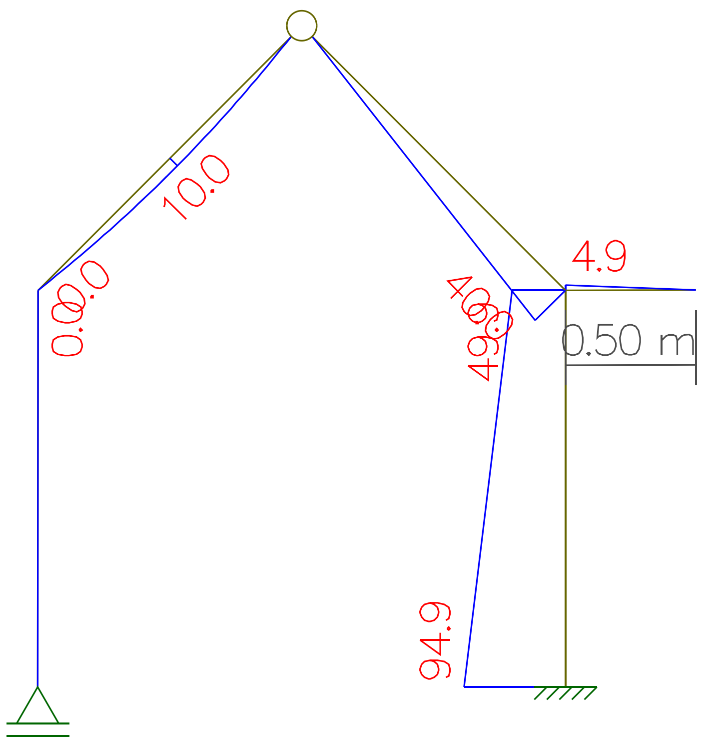
$$\tau_{max\,contacto\,hor-acero} = \frac{35kN \cdot 4.155{,}46cm^3}{338528{,}99cm^4 \cdot 30cm} = 0{,}014\frac{kN}{cm^2} \Rightarrow F_{máx\,aprox\,1\,perno} = \frac{1}{2}\tau_{max} \cdot 30cm \cdot 50cm = 10{,}74kN$$

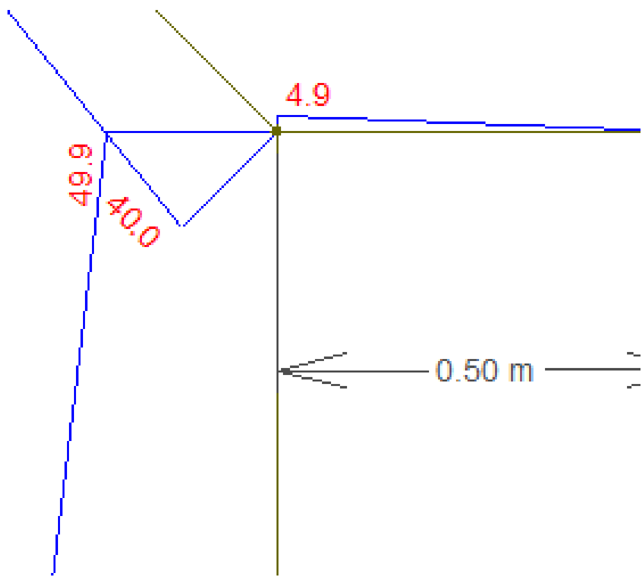
$$\boxed{\tau_{máx\,perno} = \frac{F_{max}}{\pi cm^2} = 3{,}42\,kN/cm^2}$$

Ej. 2









Predimensionado

W≥M/σ → W≥94.9/140000   W≥677.9 cm3 IPN 32 W= 782 cm 3 A= 77.7 cm2

Verificamos con la directa 94.9/677.9+ 10/77.7 = 121.4 MPa + 1.3 MPa Verifica

Máxima Directa 40/77.7= 5.2 MPa → (121.4 +5.2) MPa verifica

Cortante Máximo (30 kN *457 cm^3)/(1.15 cm * 12510 cm^4)= 9.5 MPa En la base del empotramiento.