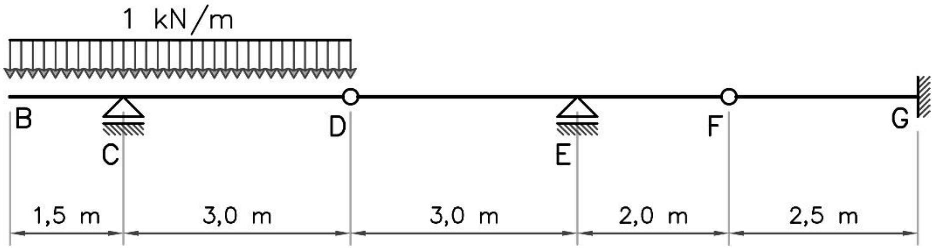
EXAMEN – 21 DE JULIO DE 2017

Solución – Ejercicio 1

Parte a)

Las barras BCD, DEF y FG constituyen una viga Gerber con apoyos deslizantes en C y E y un empotramiento en G, como se muestra en la figura. La única carga actuante sobre la estructura es la uniformemente distribuida de valor q, por lo cual es posible resolver el problema considerando una carga de valor unitario y luego multiplicar por un factor de proporcionalidad para determinar las reacciones y solicitaciones en función de q.



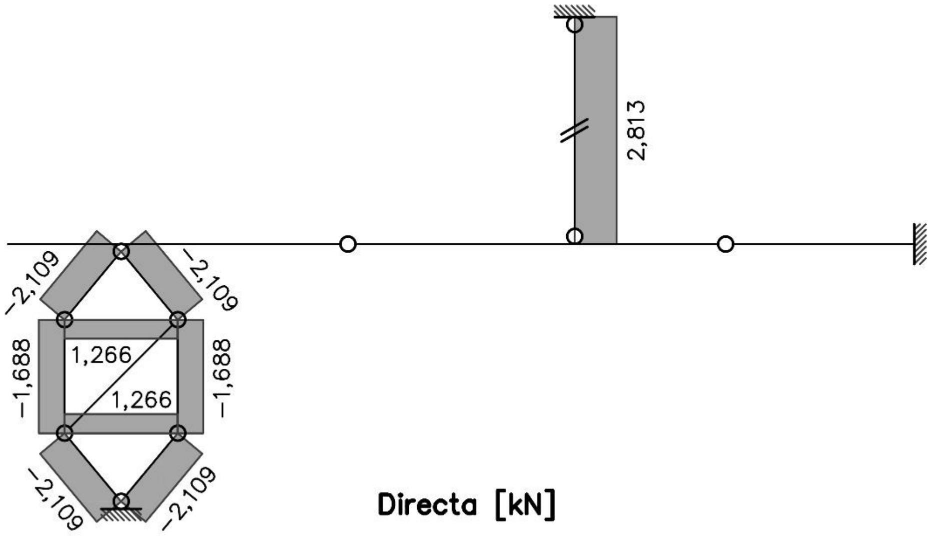
Las reacciones pueden hallarse planteando los siguientes equilibrios (se consideran positivas las fuerzas en sentido vertical y los momentos según la convención usual):

$$\begin{cases} M_D^{BCD} = 0 \Rightarrow V_C = \dfrac{1\ \text{kN/m} \cdot (4{,}5\ \text{m})^2}{2 \cdot 3{,}0\ \text{m}} \Rightarrow V_C = 3{,}375\ \text{kN} \\ \sum F_V^{BCD} = 0 \ \Rightarrow V_D^{BCD} = 1{,}125\ \text{kN} \Rightarrow V_D^{DEF} = -1{,}125\ \text{kN} \end{cases}$$

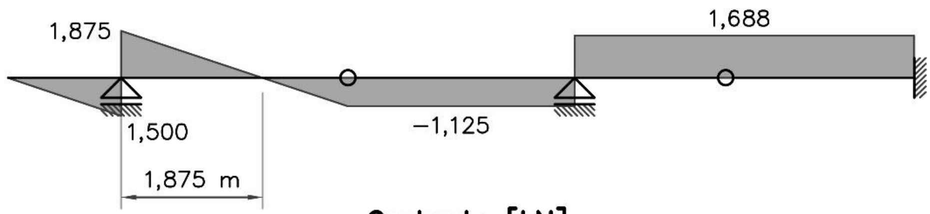
$$\begin{cases} M_F^{DEF} = 0 \Rightarrow V_E = \dfrac{V_D^{DEF} \cdot 5{,}0\ \text{m}}{2{,}0\ \text{m}} \Rightarrow V_E = 2{,}813\ \text{kN} \\ \sum F_V^{DEF} = 0 \ \Rightarrow V_D^{DEF} = -1{,}688\ \text{kN} \Rightarrow V_D^{FG} = 1{,}688\ \text{kN} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_G = -V_D^{FG} \cdot 2{,}5\ \text{m} \Rightarrow M_G = 4{,}219\ \text{kNm} \\ \sum F_V^{FG} = 0 \ \Rightarrow V_G = -1{,}688\ \text{kN} \end{cases}$$

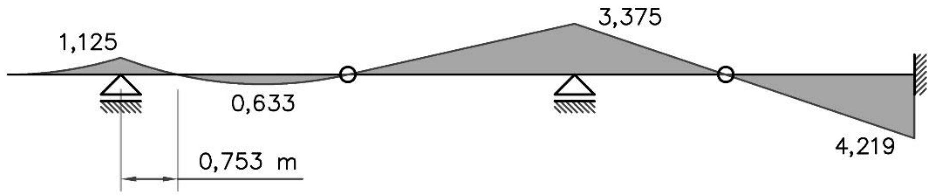
A partir de los resultados anteriores es inmediato que $V_L = V_C = 3{,}375\ \text{kN}$ y $V_A = V_E = 2{,}813\ \text{kN}$. Finalmente, antes de trazar los diagramas de solicitaciones, se hallan las directas en las barras del reticulado CHIJKL. Dado que no existen fuerzas horizontales aplicadas y la estructura es simétrica respecto al eje vertical CL, la barra IJ queda con directa nula. Luego, las barras HJ e IK llevan la mitad de la fuerza $V_L = V_C$, por lo que sus directas resultan $N_{HJ} = N_{IK} = -1{,}688\ \text{kN}$. Finalmente, planteando equilibrio de nudo en H, I, J o K, $N_{CH} = N_{CI} = N_{JL} = N_{KL} = -2{,}109\ \text{kN}$ y $N_{HI} = N_{JK} = 1{,}266\ \text{kN}$.



Directa [kN]



Cortante [kN]



Momento [kNm]

<u>Parte b)</u>

Considerando que la tensión admisible es única (es decir, que las tensiones admisibles de tracción y compresión son iguales en valor absoluto) y que las secciones son simétricas, alcanza con diseñar para la directa máxima y el momento flector máximo.

Llamando $\hat{q}$ al factor de proporcionalidad, se tiene que: $q = \hat{q} \cdot (1 \text{ kN/m})$. De esta forma, todas las solicitaciones quedan determinadas por los diagramas anteriores y el factor de proporcionalidad definido $\hat{q}$.

Directa máxima:

$$\begin{cases} N_{\max} = \hat{q} \cdot N_{\max}^{1\,\mathrm{kN/m}} = \hat{q} \cdot (2{,}813\ \mathrm{kN}) \\ A_{\phi 12} = 1{,}131\ \mathrm{cm}^2 \end{cases}$$

$$\sigma_{\mathrm{adm}} = \frac{N_{\max}}{A_{\phi 12}} \Longrightarrow \hat{q}_{\max}^{N} = \frac{\sigma_{\mathrm{adm}} \cdot A_{\phi 12}}{N_{\max}^{1\,\mathrm{kN/m}}} \Longrightarrow \hat{q}_{\max}^{N} = \frac{0{,}140\ \mathrm{GPa} \cdot 113{,}1\ \mathrm{mm}^2}{2{,}813\ \mathrm{kN}} = 5{,}63$$

Momento flector máximo:

$$\begin{cases} M_{\max} = \hat{q} \cdot M_{\max}^{1\,\mathrm{kN/m}} = \hat{q} \cdot (4{,}219\ \mathrm{kNm}) \\ W_{\mathrm{PNI18}} = 161{,}1\ \mathrm{cm}^3 \end{cases}$$

$$\sigma_{\mathrm{adm}} = \frac{M_{\max}}{W_{\mathrm{PNI18}}} \Longrightarrow \hat{q}_{\max}^{M} = \frac{\sigma_{\mathrm{adm}} \cdot W_{\mathrm{PNI18}}}{M_{\max}^{1\,\mathrm{kN/m}}} \Longrightarrow \hat{q}_{\max}^{M} = \frac{0{,}140\ \mathrm{GPa} \cdot 161{,}1\ \mathrm{cm}^3}{4{,}219\ \mathrm{kNm}} = 5{,}35$$

Por lo tanto, el valor máximo admisible de q es $q_{\mathrm{adm}}^{\max} = 5{,}35\ \mathrm{kN/m}$.

Parte c)

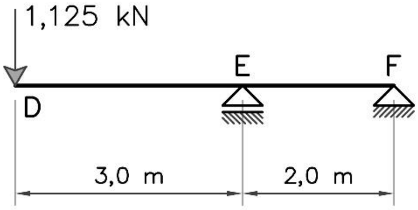
A partir de la tabla de perfiles I (PNI) se obtiene que la inercia según el eje fuerte es $I_{\mathrm{PNI18}} = 1.450\ \mathrm{cm}^4$, mientras que el módulo de elasticidad es $E = 200\ \mathrm{GPa}$. Por lo tanto, la rigidez a flexión vale $(EI_{\mathrm{PNI18}}) = 2.900\ \mathrm{kN\ m}^2$. Operando de forma similar, la rigidez a directa vale $(EA_{\phi 12}) = 22{,}6 \cdot 10^3\ \mathrm{kN}$.

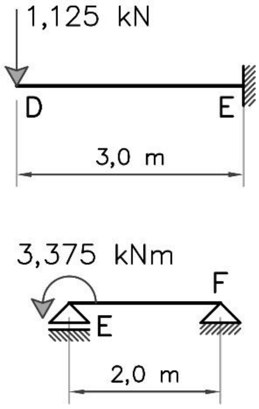
Por ser una viga Gerber (estructura isostática), el descenso en D por superposición se debe hallar comenzando desde el tramo que descarga completamente a tierra (en el orden inverso al que se obtuvieron las reacciones); este tramo es el FG. Entonces, el primer descenso que se considera es el debido al movimiento (giro y desplazamiento) rígido del tramo DEF, como consecuencia de las flechas en E (tensor) y F (ménsula). Considerando la carga de $1\ \mathrm{kN/m}$ y las flechas positivas hacia abajo, se tiene:

$$\begin{cases} \delta_F = \dfrac{-V_D^{FG} \cdot {L_{FG}}^3}{3\,(EI_{\mathrm{PNI18}})} \Longrightarrow \delta_F = \dfrac{-1{,}688\ \mathrm{kN} \cdot (2{,}5\ \mathrm{m})^2 \cdot 2.500\ \mathrm{mm}}{3 \cdot 2.900\ \mathrm{kN\ m}^2} = -3{,}03\ \mathrm{mm} \\ \delta_E = \dfrac{N_{AE} \cdot L_{AE}}{(EA_{\phi 12})} \Longrightarrow \delta_E = \dfrac{2{,}813\ \mathrm{kN} \cdot 4.000\ \mathrm{mm}}{22{,}6 \cdot 10^3\ \mathrm{kN}} = 0{,}50\ \mathrm{mm} \end{cases}$$

$$\delta_D^I = \delta_D^{\mathrm{rig}} = -\frac{3}{2}\delta_F + \frac{5}{2}\delta_E \Longrightarrow \delta_D^I = \frac{3}{2} \cdot 3{,}03\ \mathrm{mm} + \frac{5}{2} \cdot 0{,}50\ \mathrm{mm} = 5{,}79\ \mathrm{mm}$$

Habiendo considerado el descenso rígido, falta calcular la flecha debida a la deformación propia de la barra DEF, tal cual se muestra a la izquierda de la figura. Esta flecha, a su vez, puede determinarse considerando dos efectos por separados, como se muestra a la derecha de la figura.





El primer efecto es el correspondiente a suponer que la barra no gira en E y por lo tanto el descenso se debe únicamente a la deformación del tramo DE. El segundo efecto es el propio de considerar el giro en E (debido a la deformación del tramo EF), asumiendo que el tramo DE se comporta de manera rígida (pues este efecto ya fue considerado).

$$\delta_D^{II} = \frac{-V_D^{DEF} \cdot {L_{DE}}^3}{3\,(EI_{\text{PNI18}})} \implies \delta_D^{II} = \frac{1{,}125\ \text{kN} \cdot (3{,}0\ \text{m})^2 \cdot 3.000\ \text{mm}}{3 \cdot 2.900\ \text{kN m}^2} = 3{,}49\ \text{mm}$$

$$\delta_D^{III} = \theta_E^{DE} \cdot L_{DE} = \frac{M \cdot L_{EF} \cdot L_{DE}}{3\,(EI_{\text{PNI18}})} \implies \delta_D^{III} = \frac{3{,}375\ \text{kNm} \cdot 2{,}0\ \text{m} \cdot 3.000\ \text{mm}}{3 \cdot 2.900\ \text{kN m}^2} = 2{,}33\ \text{mm}$$

Finalmente, la flecha para una carga de $1\ \text{kN/m}$ es:

$$\delta_D^{1\,\text{kN/m}} = \delta_D^{I} + \delta_D^{II} + \delta_D^{III} \implies \delta_D^{1\,\text{kN/m}} = 5{,}79\ \text{mm} + 3{,}49\ \text{mm} + 2{,}33\ \text{mm} = 11{,}61\ \text{mm}$$

Al igual que las solicitaciones, la flecha es proporcional con la carga por ser esta la única actuante en la estructura, por lo cual la flecha para la carga determinada en b) resulta:

$$\delta_D = \hat{q}_{\max} \cdot \delta_D^{1\,\text{kN/m}} \implies \delta_D = 5{,}35 \cdot 11{,}61\ \text{mm} = 62{,}1\ \text{mm}$$