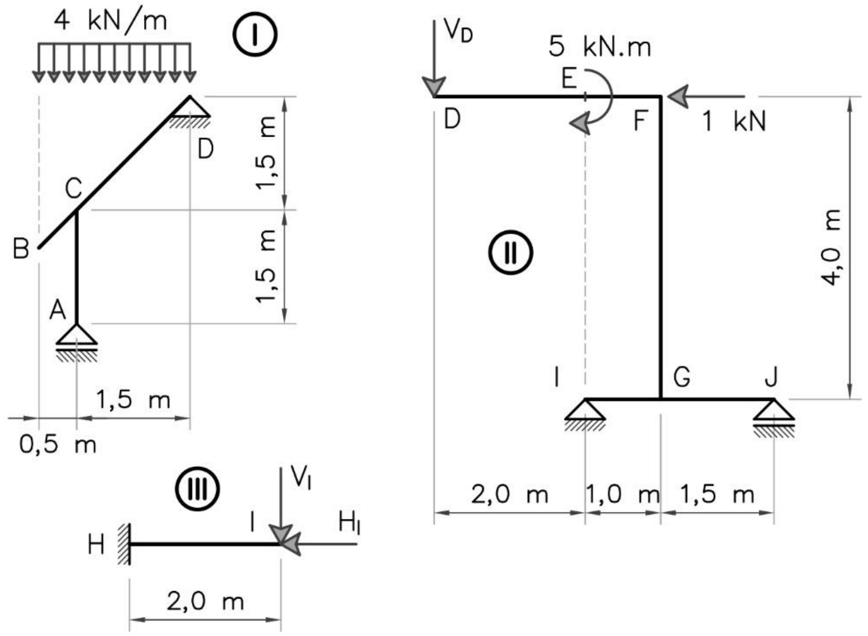
EXAMEN – 13° de febrero de 2017

Solución – Ejercicio 1 (40 puntos)

Parte a)

Separo la estructura en tres partes para hallar las reacciones, las cuales llamo I, II y III. Resolviendo primero I, luego II, y luego III todas las reacciones se hallan directamente, planteando equilibrio en los puntos indicados.



Estructura I:

$$\begin{cases} M_D^I = 0 \Rightarrow V_A = \dfrac{4\text{ kN/m}\cdot 2{,}0\text{ m}\cdot 1{,}0\text{ m}}{1{,}5\text{ m}} \Rightarrow V_A = 5{,}333\text{ kN} \\ \sum F_V^I = 0 \Rightarrow V_A + V_D = 4\text{ kN/m}\cdot 2{,}0\text{ m} \Rightarrow V_D = 2{,}667\text{ kN} \\ \sum F_H^I = 0 \Rightarrow H_D = 0\text{ kN} \end{cases}$$

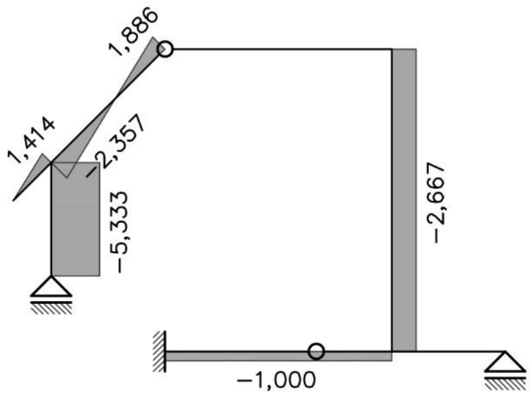
Estructura II:

$$\begin{cases} M_I^{II} = 0 \Rightarrow V_J = \dfrac{-V_D\cdot 2{,}0\text{ m} - 1\text{ kN}\cdot 4{,}0\text{ m} + 5\text{ kNm}}{2{,}5\text{ m}} \Rightarrow V_J = -1.733\text{ kN} \\ \sum F_V^{II} = 0 \Rightarrow V_I + V_J = V_D \Rightarrow V_I = 4{,}400\text{ kN} \\ \sum F_H^{II} = 0 \Rightarrow H_I = 1\text{ kN} \end{cases}$$

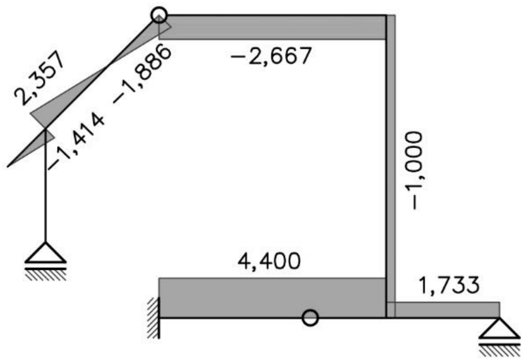
Estructura III:

$$\begin{cases} M_H^{III} = -V_I \cdot 2{,}0\ \mathrm{m} \implies M_H = -8{,}800\ \mathrm{kN} \\ \sum F_V^{III} = 0 \implies V_H = 4{,}400\ \mathrm{kN} \\ \sum F_H^{III} = 0 \implies H_D = 1\ \mathrm{kN} \end{cases}$$

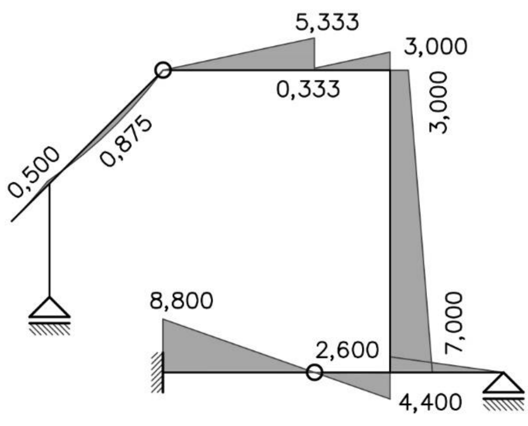
Una vez obtenidas las reacciones, los diagramas de solicitaciones resultan los siguientes.



Directa [kN]



Cortante [kN]



Momento [kNm]

Parte b)

En principio tomo el momento máximo ($M_{\max} = 8{,}8\ \mathrm{kNm}$) y dimensiono a flexión, considerando la tensión admisible a compresión ($\sigma_{\mathrm{adm}}^{\mathrm{comp}} = 100\ \mathrm{MPa}$).

$$|\sigma_{\max}| = \frac{M_{\max}}{W} \implies W_{\mathrm{nec}} = \frac{M_{\max}}{\sigma_{\mathrm{adm}}^{\mathrm{comp}}} \implies W_{\mathrm{nec}} = \frac{8{,}8 \cdot 10^6\ \mathrm{Nmm}}{100\ \mathrm{MPa}} \implies W_{\mathrm{nec}} = 88 \cdot 10^3\ \mathrm{mm}^3$$

Considero entonces un PNC 160 ($W_{\mathrm{PNC\,160}} = 116 \cdot 10^3\ \mathrm{mm}^3$, $A_{\mathrm{PNC\,160}} = 24 \cdot 10^2\ \mathrm{mm}^2$).

Verifico a continuación si dicho perfil cumple presoflexión, tomando el momento máximo y la directa mínima de la estructura (máxima compresión, $N_{\min} = 5{,}333\ \text{kN}$).

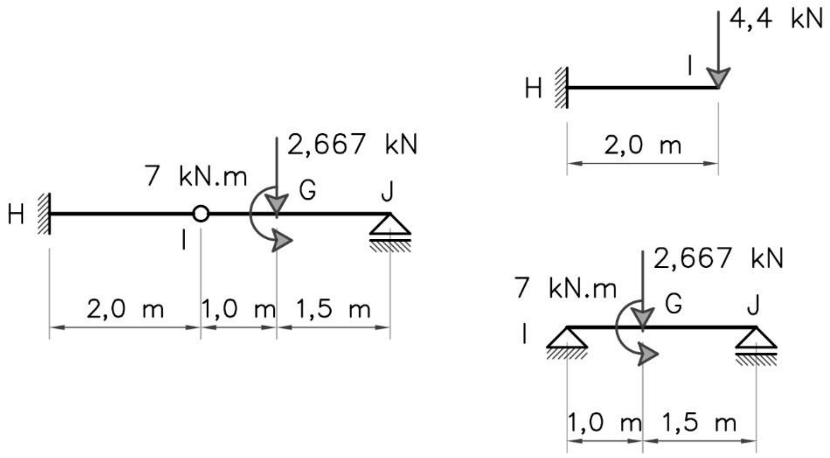
$$\sigma = \frac{N_{\min}}{A_{\text{PNC 160}}} - \frac{M_{\max}}{W_{\text{PNC 160}}} \Longrightarrow |\sigma| = \frac{5{,}333 \cdot 10^3\ \text{N}}{24 \cdot 10^2\ \text{mm}^2} + \frac{8{,}8 \cdot 10^6\ \text{Nmm}}{116 \cdot 10^3\ \text{mm}^3} = 78\ \text{MPa} < 100\ \text{MPa}$$

Por lo tanto, el perfil elegido verifica para cualquier sección de la estructura.

<u>Parte c)</u>

A partir de la tabla de perfiles C (PNC) se obtiene que la inercia según el eje fuerte es $I = 925 \cdot 10^4\ \text{mm}^4$, mientras que el módulo de elasticidad lineal es $E = 200\ \text{GPa}$. Por lo tanto, la rigidez a flexión de la estructura vale $(EI) = 1850\ \text{kN m}^2$.

Para hallar la flecha en G es posible simplificar la estructura a la mostrada a la izquierda de la siguiente figura, en donde el efecto del resto de la estructura se simplificó a una fuerza puntual y un momento aplicado. Luego la estructura se puede descomponer en una ménsula y una viga simplemente apoyada como se muestra a la derecha de la figura.



La flecha en el punto G está dada por la combinación de tres efectos:

- El descenso de la ménsula en I (apoyo de la viga simplemente apoyada IGJ), δ_{G1}.
- La carga puntual de $2{,}667\ \text{kN}$ actuando en G sobre la viga IGJ, δ_{G2}.
- El momento aplicado de $7\ \text{kNm}$ actuando en G sobre la viga IGJ, δ_{G3}.

$$\begin{cases} \delta_{G1} = \dfrac{4{,}4\ \text{kN} \cdot (2{,}0\ \text{m})^3}{3 \cdot 1850\ \text{kN m}^2} \cdot \dfrac{1{,}5\ \text{m}}{2{,}5\ \text{m}} \Longrightarrow \delta_{G1} = 3{,}81\ \text{mm} \\ \delta_{G2} = \dfrac{2{,}667\ \text{kN} \cdot (1{,}5\ \text{m}) \cdot (1{,}0\ \text{m})}{6 \cdot (2{,}5\ \text{m}) \cdot 1850\ \text{kN m}^2} \cdot (2{,}5^2 - 1{,}5^2 - 1{,}0^2)\ \text{m}^2 \Longrightarrow \delta_{G2} = 0{,}43\ \text{mm} \\ \delta_{G3} = \dfrac{7\ \text{kNm} \cdot (1{,}0\ \text{m})}{6 \cdot (2{,}5\ \text{m}) \cdot 1850\ \text{kN m}^2} \cdot (6 \cdot 2{,}5 \cdot 1{,}0 - 2 \cdot 2{,}5^2 - 4 \cdot 1{,}0^2)\ \text{m}^2 \Longrightarrow \delta_{G3} = -0{,}38\ \text{mm} \end{cases}$$

$$\delta_G = \delta_{G1} + \delta_{G2} + \delta_{G3} \Longrightarrow \delta_G = (3{,}81 + 0{,}43 - 0{,}38)\ \text{mm} \Longrightarrow \delta_G = 3{,}86\ \text{mm}$$

El problema se resolverá utilizando superposición de cargas:

1. Para la carga uniformemente distribuida la fuerza directa en las barras AE y BF vale -4.00 kN, mientras que en las restantes barras dicha fuerza es nula. La barra AB está sometida a momento flector, su valor máximo se da en la sección en la mitad del vano y vale 4.00 kNm (tracciona las fibras inferiores).
2. Para las cargas puntales se debe aplicar el método de Henneberg. Se saca la barra AB y se coloca en EF.

Barra	**Estado 0 [kN]**	**Estado 1 [kN]**	***E0 + x.E1* [kN]**
AB		1.0000	-60.0000
AD	0.0000	-1.2019	72.1110
BC	0.0000	-1.2019	72.1110
CF	-5.5900	0.4659	-33.5410
CE	-9.0140	-1.0516	54.0832
DE	-5.5900	0.4659	-33.5410
DF	-9.0140	-1.0516	54.0832
AE	0.0000	0.6667	-40.0000
BF	0.0000	0.6667	-40.0000
EF	10.0000	0.1667	0

x=	-60.0000

3. Superponiendo las fuerzas directas obtenidas en los puntos 1 y 2, obtenemos las fuerzas directas totales.

Barra	**Fuerza [kN]**
AB	-60.0000
AD	72.1110
BC	72.1110
CF	-33.5410
CE	54.0832
DE	-33.5410
DF	54.0832
AE	-44.0000
BF	-44.0000

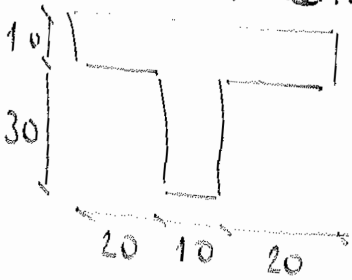
En la barra AB, M= 4.00 kNm y N= -60 kN.

Predimensionado: W= 28.57 cm^3, considero un PNI 100 (A=10.6 cm^2; W=34.2 cm^3)

Verifico: σ= -173 MPa, no verifica.

Pruebo PNI 120 (A=14.2 cm^2; W=54.7 cm^3), σ= -115 MPa, **VERIFICA.**

Examen Resistencia 1 13 de febrero de 2017 sol ej.



$$y_G = \frac{1}{10(30+50)}(15\times30\times10 + 35\times10\times50) = 27{,}5\ cm \begin{cases} y_{sup} = 12{,}5\ cm \\ y_{inf} = 27{,}5\ cm \end{cases}$$

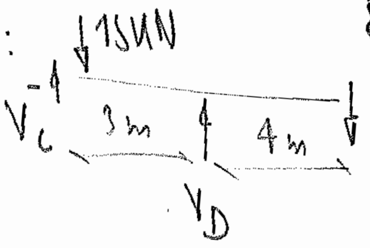
$$I_x = \frac{50\times10^3}{12} + 50\times10\times(35-27{,}5)^2 + \frac{10\times30^3}{12} + 30\times10\times(15-27{,}5)^2$$

$$\boxed{I_x = 101666{,}7\ cm^4}$$

Momentos extremos posibles:

(1) Entre EF: $M_1 = p\frac{25\ m^2}{8}$ tracc. inf. ; (2) En D: $M_2 = 10\ p\ m^2$ tracc. sup.

(3) En B:



$\Sigma M_C = 0 \rightarrow 10\ p\ m^2 + 3(V_C^- - 15\ kN) = 0$

$V_C^- = 15\ kN - \frac{10}{3}p\cdot m$

$\rightarrow M_3 = 2\ m\left(15\ kN - \frac{10}{3}p\cdot m\right)$; si $p < 4{,}5\ kN/m$ tracc. sup.

si $p > 4{,}5\ kN$ tracc. inf.

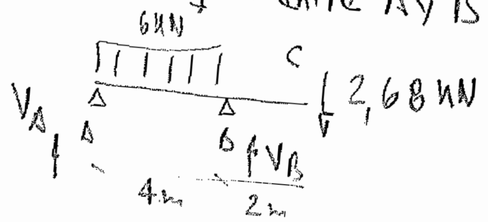
(1) $p\frac{25\ m^2}{8} \le \frac{6\ MPa\ I_x}{27{,}5\ cm} \Rightarrow p \le 7{,}1\ kN/m$

(2) $10\ p\ m^2 \le \frac{10\ MPa\ I_x}{27{,}5\ cm} \Rightarrow p \le 3{,}7\ kN/m \Rightarrow \boxed{p_{max} = 3{,}7\ kN/m}$

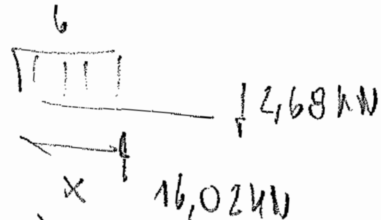
(3) $2\ m\left(15\ kN - 10/_3\ p\cdot m\right) \le \frac{10\ MPa\ I_x}{27{,}5} \Rightarrow p \le -1{,}05\ kN/m\ (p>0)$ X

no desarrollo para $p > 4{,}5\ kN$ ya que (2) descarta esta opción

Verifico que entre A y B no se superan σ_{adm}



$4V_B = 24\times2 + 2{,}68\times6 \Rightarrow V_B = 16{,}02\ kN$



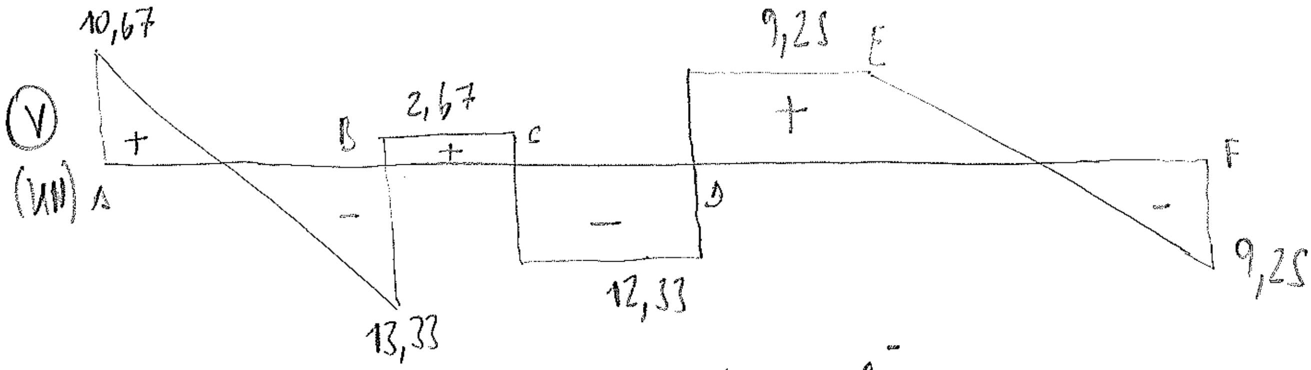
$\Rightarrow x = \frac{16{,}02 - 2{,}68}{6}$

$\boxed{x = 2{,}22\ m}$

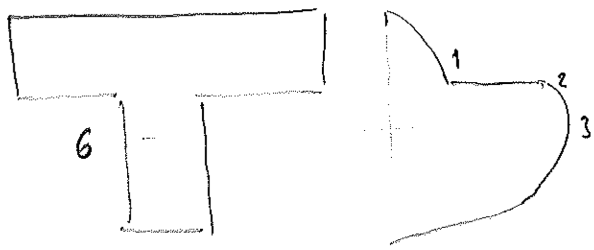
M_{max} entre AB $= 1{,}78\left(10{,}67 - \frac{1{,}78\times6}{2}\right) = 9{,}48\ kN$

$\rightarrow \sigma_{sup} = 11{,}66 < 100$

$\sigma_{inf} = 25{,}65 < 60$ verifica



τ (MPa) en B^-



$$M_1 = 50 \times 10 \times (12,5 - 5)$$

$$M_1 = 3750\,cm^3$$

$$M_3 = \frac{27,5^2 \times 10}{2} = 3781,25\,cm^3$$

$$\tau_1 = \frac{13,33\,kN\;3750\,cm^3}{50\,cm\;I_x} \rightarrow \tau_1 = 0,098\,MPa$$

$$\tau_2 = 0,492\,MPa$$

$$\tau_{3\,max} = 0,496\,MPa$$