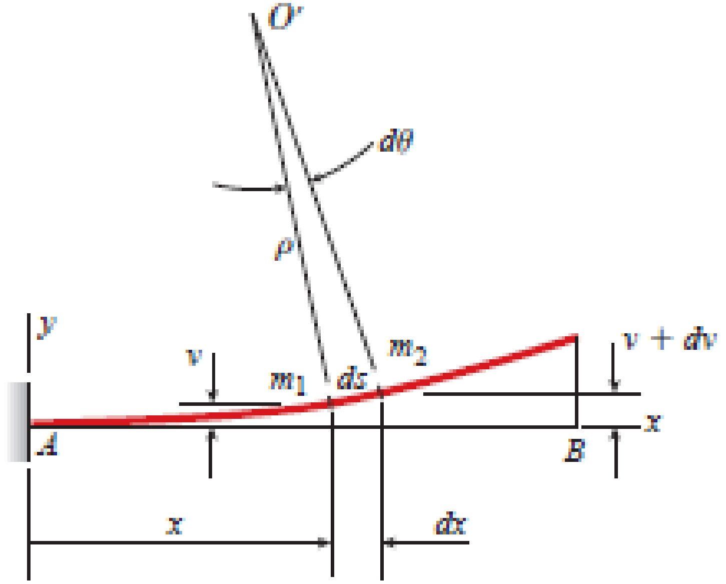
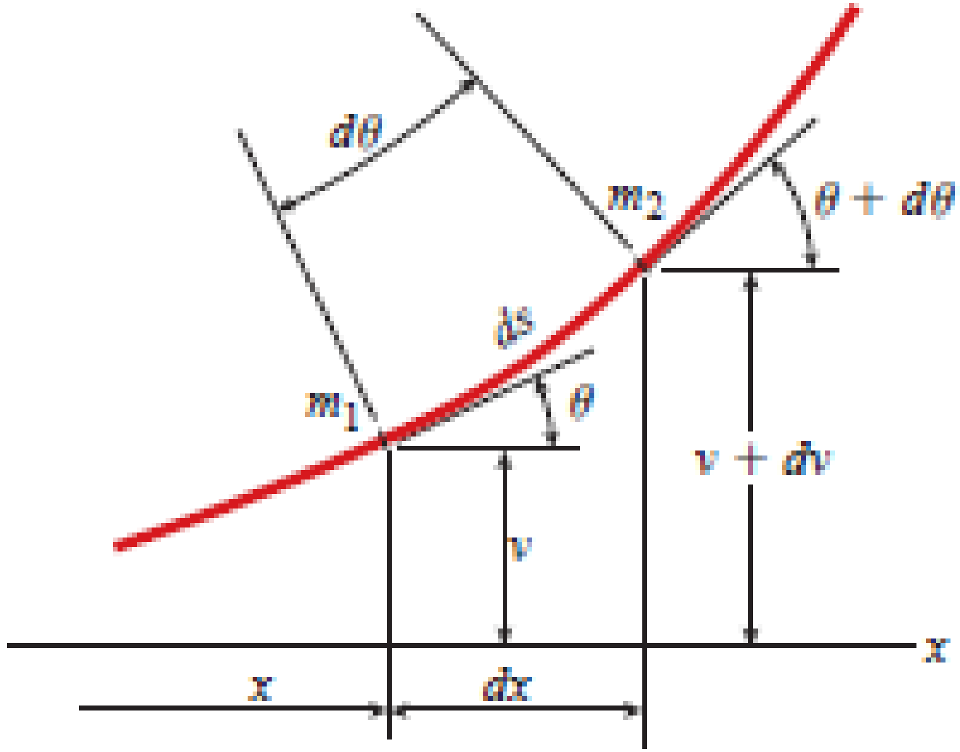
Semana 9
Teoría de vigas

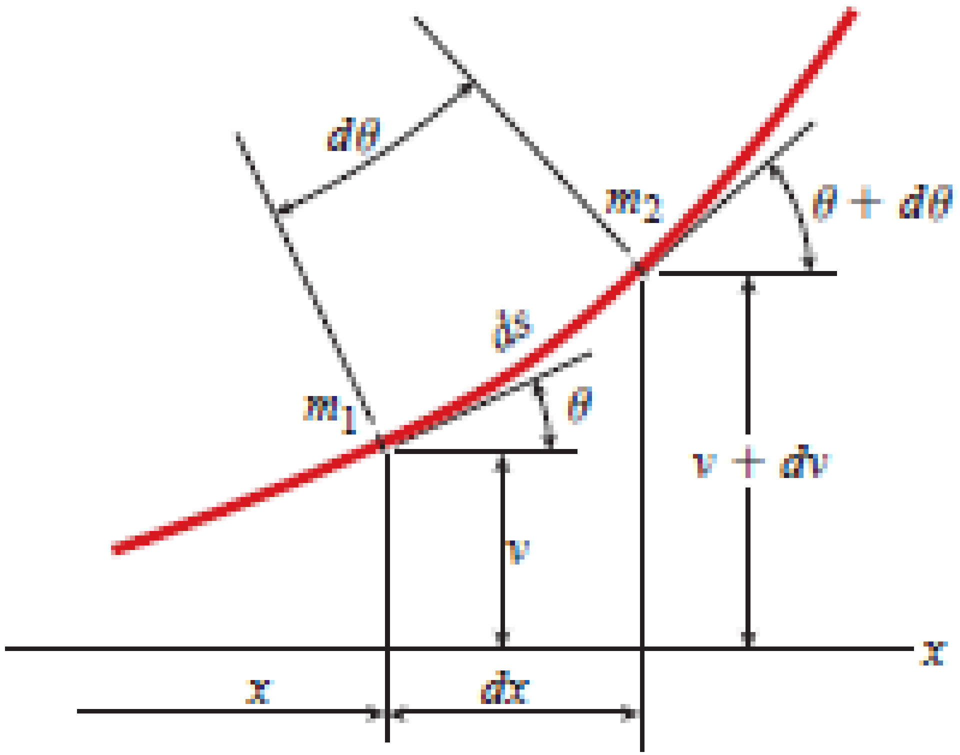
3era Parte

Deflexiones ("Elástica") de la viga





Deflexiones ("Elástica") de la viga



κ=1/ρ: ***Curvatura***
v: ***desplazamiento perp. al eje***
ϑ: ***ángulo de giro***

$$\rho\, d\theta = ds$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}$$

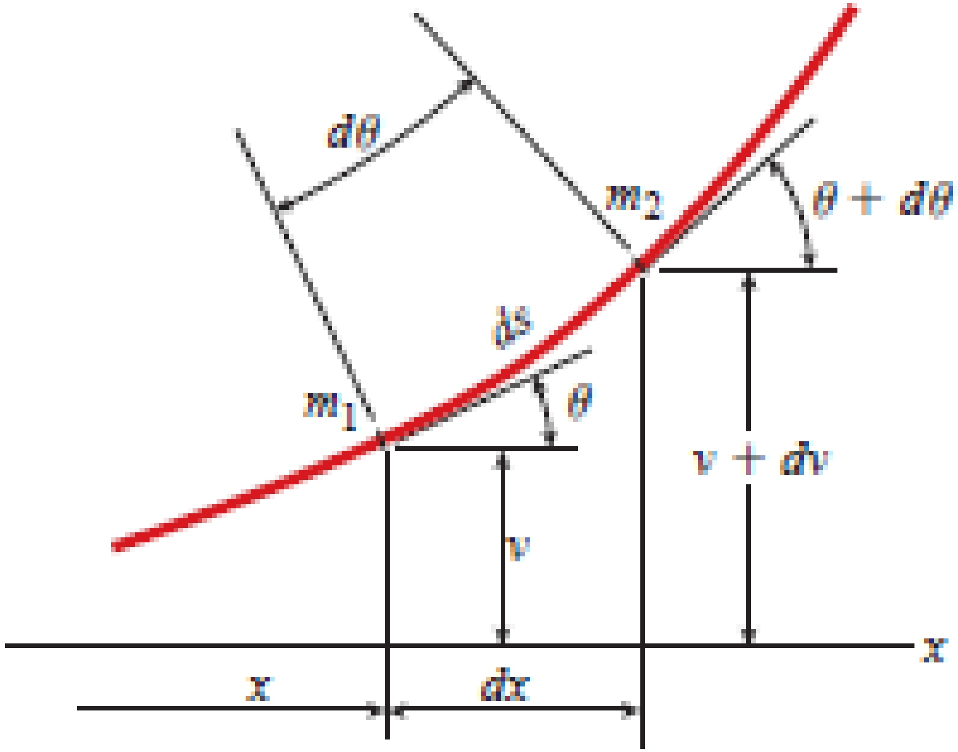
$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$$

Relación momento-curvatura:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E.I}$$

Vamos a obtener **la relación entre desplazamientos, giros, y curvatura** para cada punto de la viga.

Deflexiones ("Elástica") de la viga



κ=1/ρ: ***Curvatura***
v: ***desplazamiento perp. al eje***
ϑ: ***ángulo de giro***

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$$

$$\tan(\theta) = \frac{d\upsilon}{dx}$$

Pequeñas deformaciones: $\theta = \dfrac{d\upsilon}{dx}$

La relación entre desplazamientos, giros, y curvatura para cada punto de la viga:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d(dv/dx)}{dx} = \frac{d^2\upsilon}{dx^2}$$

Deflexiones (“Elástica”) de la viga

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E.I}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2\upsilon}{dx^2}$$

Ecuación diferencial de la curva de deflexión (o **ecuación de la elástica**):

$$\frac{d^2\upsilon}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

Si conocemos la expresión de **M/EI** para todo x de la viga, podremos **integrar dos** veces la ecuación de la elástica, obteniendo una expresión de ***v*** con dos constantes de integración (C1 y C2).

En la práctica no haremos la integración analítica, salvo que sea estrictamente necesario.

Se disponen de varios métodos alternativos, de los cuales, en el curso veremos dos en detalle: **- Método de superposición**

- Viga análoga

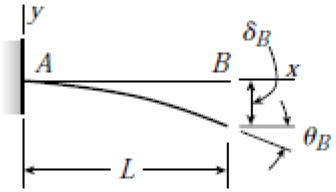
Método de superposición (1º) - Tabulación

Las deflexiones y giros en **vigas empotradas** y **vigas simplemente apoyadas** se encuentran resueltas y tabuladas para una serie habitual de configuraciones de carga. En el EVA, en el apéndice G del libro Gere, o en Internet, se pueden encontrar colecciones completas de casos.

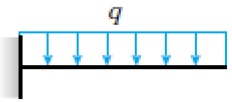
En base a estas tablas, se pueden determinar los desplazamientos **en estos tipos de vigas** para **combinaciones de cargas** mediante el **principio de superposición**.

Ejemplos:

TABLE G-1 DEFLECTIONS AND SLOPES OF CANTILEVER BEAMS



v = deflection in the y direction
$v' = dv/dx$ = slope of the deflection curve
$\delta_B = -v(L)$ = deflection at end B of the beam
$\theta_B = -v'(L)$ = angle of rotation at end B of the beam
$\boxed{EI = \text{constant}}$



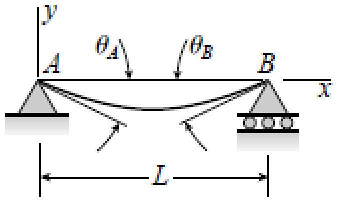
$$v = -\frac{qx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2) \qquad v' = -\frac{qx}{6EI}(3L^2 - 3Lx + x^2)$$

$$\delta_B = \frac{qL^4}{8EI} \qquad \theta_B = \frac{qL^3}{6EI}$$

$$v = -\frac{Px^2}{6EI}(3L - x) \qquad v' = -\frac{Px}{2EI}(2L - x)$$

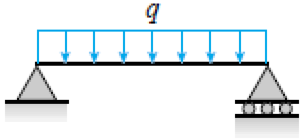
$$\delta_B = \frac{PL^3}{3EI} \qquad \theta_B = \frac{PL^2}{2EI}$$

TABLE G-2 DEFLECTIONS AND SLOPES OF SIMPLE BEAMS



EI = constant

v = deflection in the y direction
$v' = dv/dx$ = slope of the deflection curve
$\delta_C = -v(L/2)$ = deflection at midpoint C of the beam
x_1 = distance from support A to point of maximum deflection
$\delta_{max} = -v_{max}$ = maximum deflection
$\theta_A = -v'(0)$ = angle of rotation at left-hand end of the beam
$\theta_B = v'(L)$ = angle of rotation at right-hand end of the beam



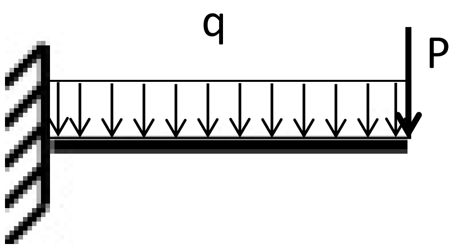
$$v = -\frac{qx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$$

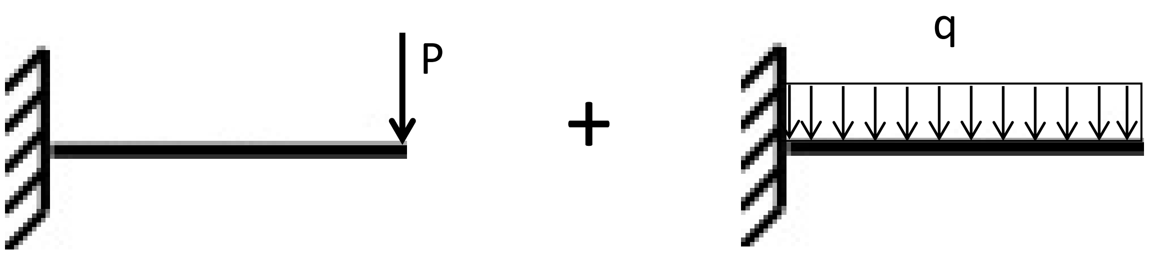
$$v' = -\frac{q}{24EI}(L^3 - 6Lx^2 + 4x^3)$$

$$\delta_C = \delta_{max} = \frac{5qL^4}{384EI} \qquad \theta_A = \theta_B = \frac{qL^3}{24EI}$$

Ejemplo

Hallar el descenso y el giro en el extremo de la ménsula en función de EI.

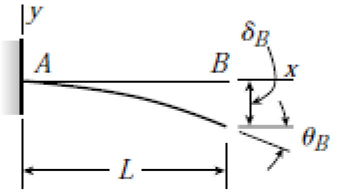




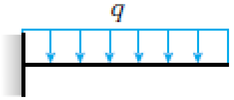
La flecha total es la flecha causada por P + la flecha causada por q

Tablas

TABLE G-1 DEFLECTIONS AND SLOPES OF CANTILEVER BEAMS



v = deflection in the y direction
$v' = dv/dx$ = slope of the deflection curve
$\delta_B = -v(L)$ = deflection at end B of the beam
$\theta_B = -v'(L)$ = angle of rotation at end B of the beam
$\boxed{EI = \text{constant}}$



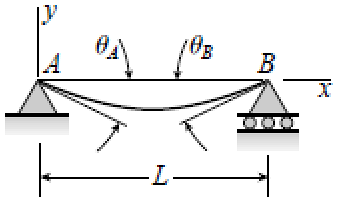
$$v = -\frac{qx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2) \qquad v' = -\frac{qx}{6EI}(3L^2 - 3Lx + x^2)$$

$$\delta_B = \frac{qL^4}{8EI} \qquad \theta_B = \frac{qL^3}{6EI}$$

$$v = -\frac{Px^2}{6EI}(3L - x) \qquad v' = -\frac{Px}{2EI}(2L - x)$$

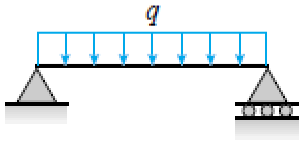
$$\delta_B = \frac{PL^3}{3EI} \qquad \theta_B = \frac{PL^2}{2EI}$$

TABLE G-2 DEFLECTIONS AND SLOPES OF SIMPLE BEAMS



EI = constant

v = deflection in the y direction
$v' = dv/dx$ = slope of the deflection curve
$\delta_C = -v(L/2)$ = deflection at midpoint C of the beam
x_1 = distance from support A to point of maximum deflection
$\delta_{max} = -v_{max}$ = maximum deflection
$\theta_A = -v'(0)$ = angle of rotation at left-hand end of the beam
$\theta_B = v'(L)$ = angle of rotation at right-hand end of the beam

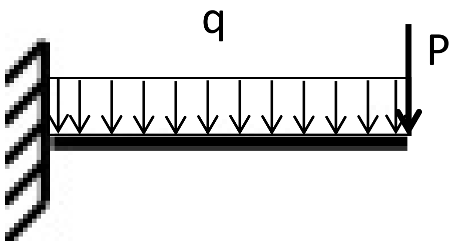


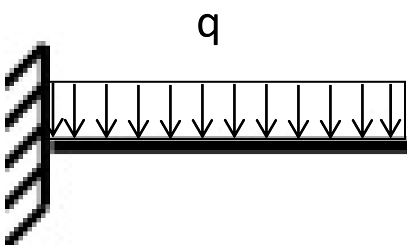
$$v = -\frac{qx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$$

$$v' = -\frac{q}{24EI}(L^3 - 6Lx^2 + 4x^3)$$

$$\delta_C = \delta_{max} = \frac{5qL^4}{384EI} \qquad \theta_A = \theta_B = \frac{qL^3}{24EI}$$

Superposición





$$\upsilon(L) = \frac{q * L^4}{8EI} \qquad \theta(L) = \frac{q * L^3}{6EI}$$

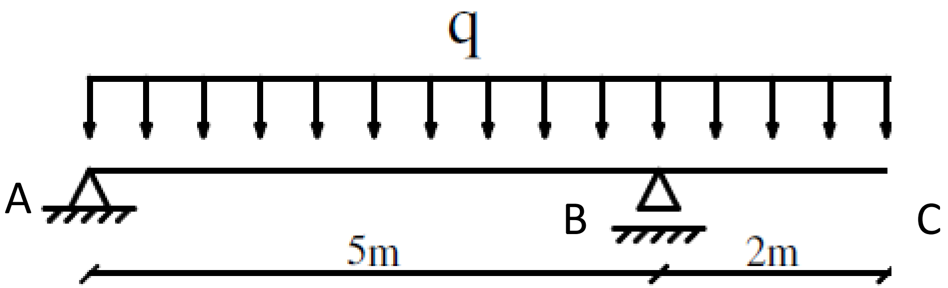
$$\upsilon(L) = \frac{P * L^3}{3EI} \qquad \theta(L) = \frac{P * L^2}{2EI}$$

$$\upsilon(L) = \frac{q * L^4}{8EI} + \frac{P * L^3}{3EI}$$

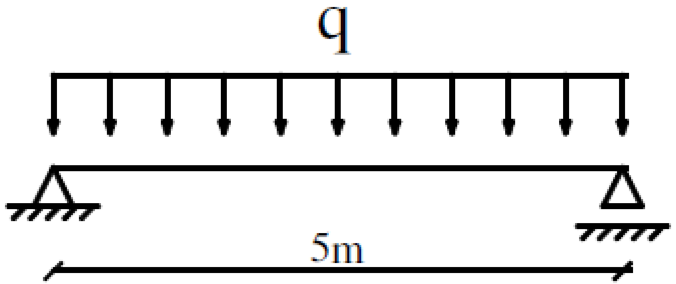
$$\theta(L) = \frac{q * L^3}{6EI} + \frac{P * L^2}{2EI}$$

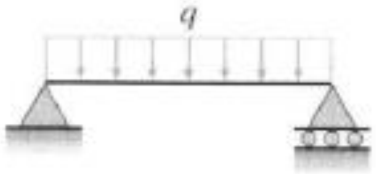
Método de superposición

Giro en A y flecha en C



Giro en A





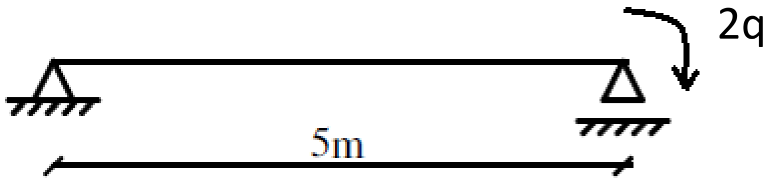
$$v = -\frac{qx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$$

$$v' = -\frac{q}{24EI}(L^3 - 6Lx^2 + 4x^3)$$

$$\delta_C = \delta_{máx} = \frac{5qL^4}{384EI} \qquad \theta_A = \theta_B = \frac{qL^3}{24EI}$$

θ_{1A} =q*(5 m)^3/(24EI)

horario



$$v = -\frac{M_0 x}{6LEI}(2L^2 - 3Lx + x^2) \qquad v' = -\frac{M_0}{6LEI}(2L^2 - 6Lx + 3x^2)$$

$$\delta_C = \frac{M_0 L^2}{16EI} \qquad \theta_A = \frac{M_0 L}{3EI} \qquad \theta_B = \frac{M_0 L}{6EI}$$

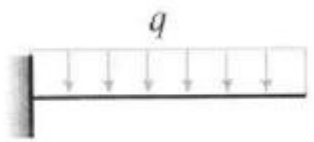
$$x_1 = L\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \text{y} \quad \delta_{\text{máx}} = \frac{M_0 L^2}{9\sqrt{3}\,EI}$$

θ_{2A} =-2 m*q*1 m*5 m/(6EI)   Antihorario

θ_{ATOTAL}=θ_{1A}+θ_{2A}

θ_{ATOTAL} = q*(5 m)^3/(24EI -2 m*q*1 m*5 m/(6EI)

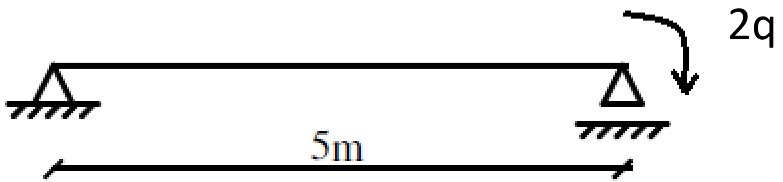
Deflexión en C



$$v = -\frac{qx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2) \qquad v' = -\frac{qx}{6EI}(3L^2 - 3Lx + x^2)$$

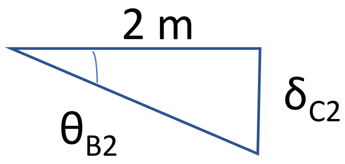
$$\delta_B = \frac{qL^4}{8EI} \qquad \theta_B = \frac{qL^3}{6EI}$$

δ_{C1} =q*(5 m)^4/(8EI) ↓

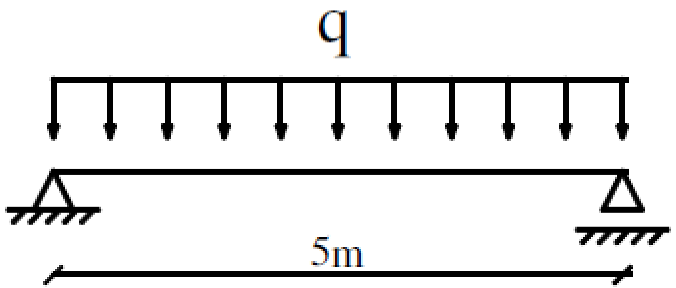


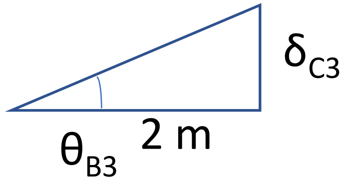
θ_{B2} =-2 m*q*1 m*5 m/(3EI)

A la tangente del ángulo la aproximamos por el ángulo, en pequeñas deformaciones



δ_{C2} =2*(2 m*q*1 m*5 m/(3EI) ↓



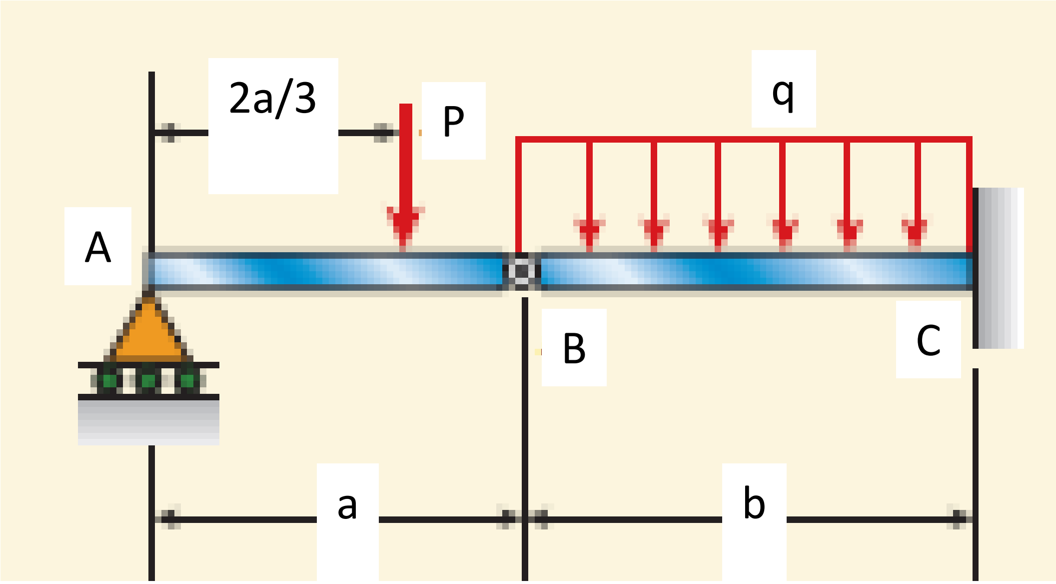


θ_{B3} =q*(5 m)^3/(24EI)

δ_{C3} =-2*(q*(5 m)^3/(24EI)) ↑

$$\delta_C = \delta_{C1} + \delta_{C2} + \delta_{C3}$$

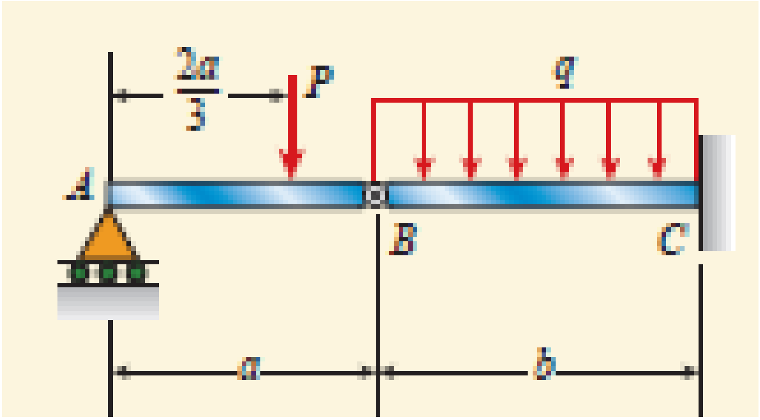
Ejemplo de giros y deflexiones

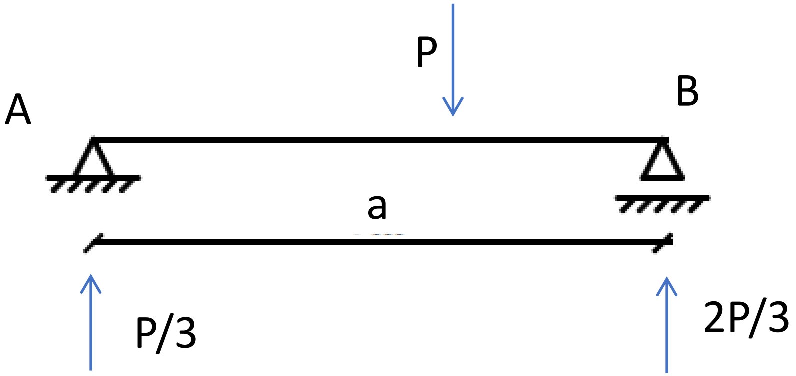


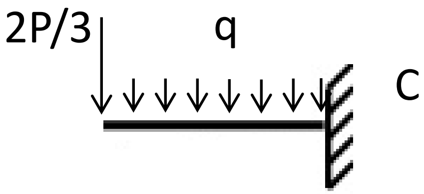
- Deflexión o flecha en B

- Giro en A

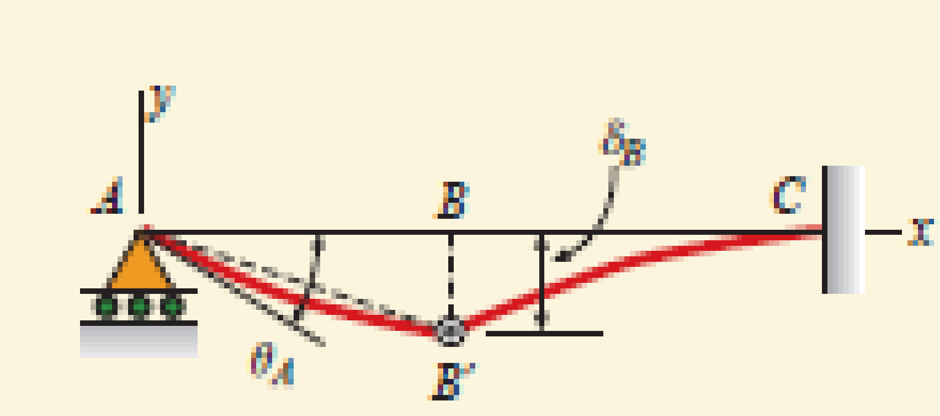
Ejemplo de giros y deflexiones





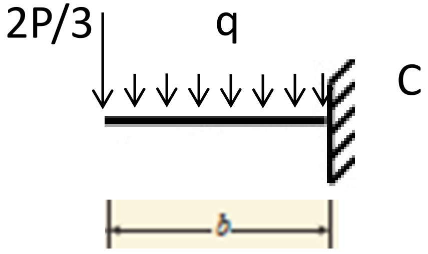


Ejemplo de giros y deflexiones



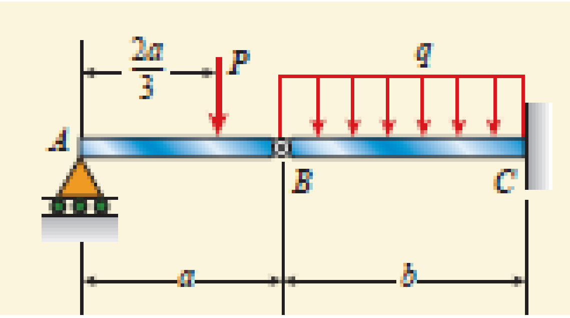
- Flecha en B

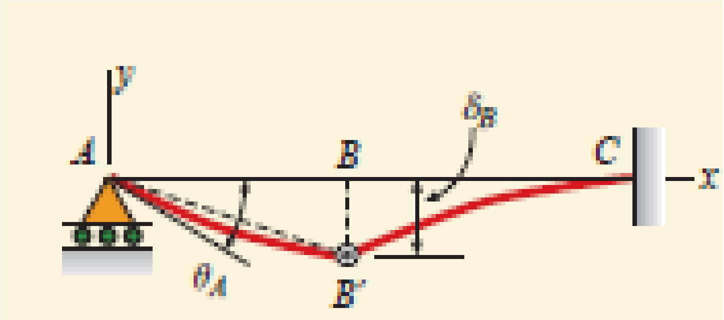
$$\upsilon(L) = \frac{q * L^4}{8EI} \qquad \upsilon(L) = \frac{P * L^3}{3EI}$$



$$\delta_B = \frac{qb^4}{8EI} + \frac{2Pb^3}{9EI}$$

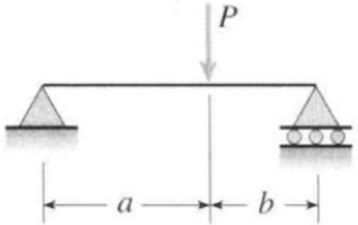
Ejemplo de giros y deflexiones





$$\delta_B = \frac{qb^4}{8EI} + \frac{2Pb^3}{9EI}$$

$$(\theta_A)_1 = \frac{qb^4}{8aEI} + \frac{2Pb^3}{9aEI}$$



$$\theta_A = \frac{Pab(L+b)}{6LEI}$$

$$(\theta_A)_2 = \frac{P\left(\frac{2a}{3}\right)\left(\frac{a}{3}\right)\left(a + \frac{a}{3}\right)}{6aEI} = \frac{4Pa^2}{81EI}$$

$$\theta_A = (\theta_A)_1 + (\theta_A)_2 = \frac{qb^4}{8aEI} + \frac{2Pb^3}{9aEI} + \frac{4Pa^2}{81EI}$$

Deflexiones ("Elástica") de la viga

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E.I}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2\upsilon}{dx^2}$$

Ecuación diferencial de la curva de deflexión (o **ecuación de la elástica**):

$$\frac{d^2\upsilon}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

Si conocemos la expresión de **M/EI** para todo x de la viga, podremos **integrar dos** veces la ecuación de la elástica, obteniendo una expresión de ***v*** con dos constantes de integración (C1 y C2).

En la práctica no haremos la integración analítica, salvo que sea estrictamente necesario.

Se disponen de varios métodos alternativos, de los cuales, en el curso veremos dos en detalle: **- Método de superposición**
- Viga análoga

Viga análoga (Analogía de Mohr)

Teorema Fundamental de Vigas: $-q = \dfrac{dV}{dx} = \dfrac{d^2M}{dx^2}$ $\Longleftrightarrow$ **Ecuación de la elástica**: $\dfrac{M}{EI} = \dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{d^2\upsilon}{dx^2}$

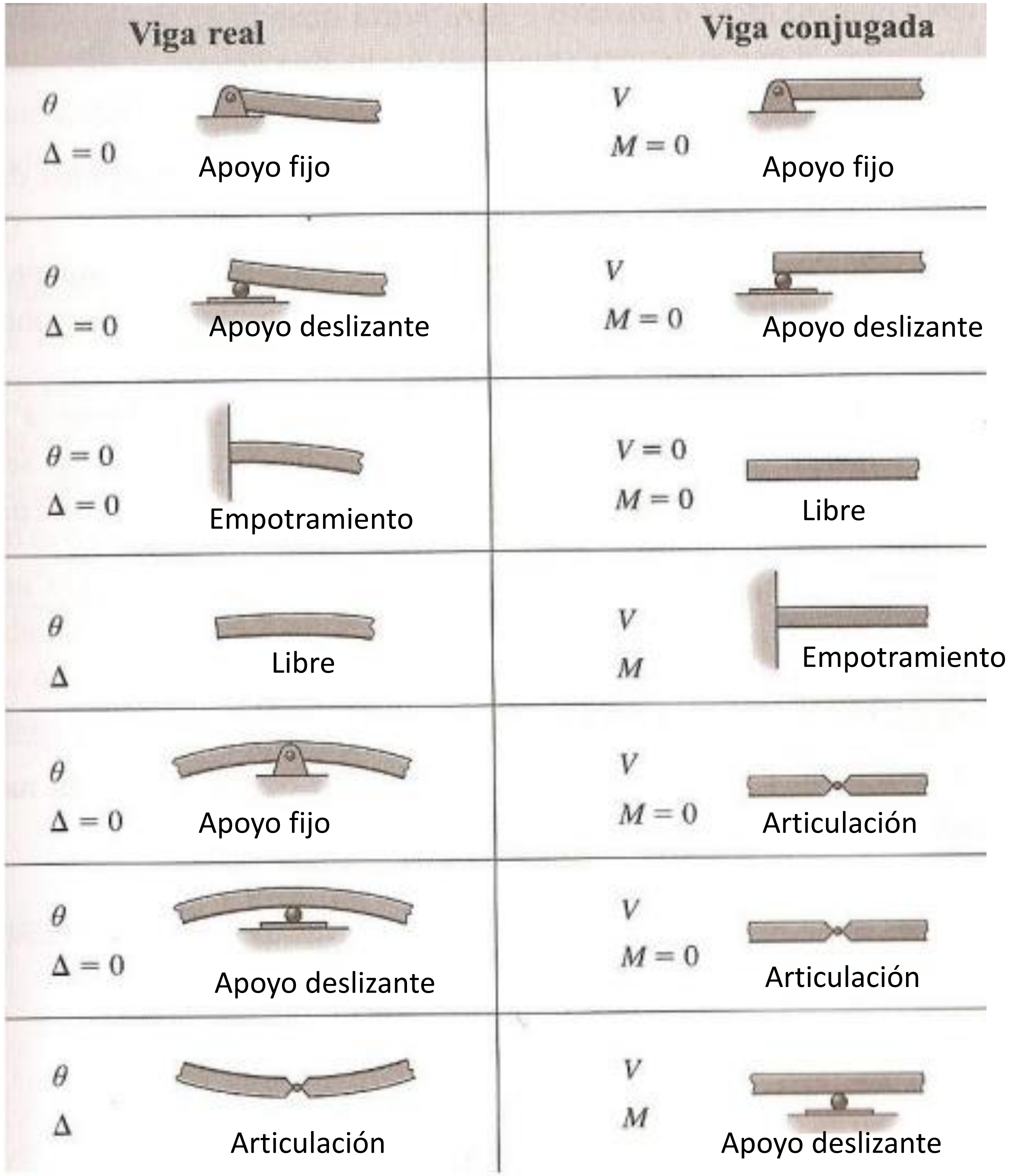
Las ecuaciones diferenciales de la curva de deflexión son análogas a las ecuaciones fundamentales de la viga, en el sentido en que en ambas aparecen tres términos, (**M/EI, θ, y**) y (**q, V, M**) respectivamente, relacionados mediante la primera y segunda derivada.

"**<u>viga análoga</u>**"

$$\frac{M}{EI} \leftrightarrow -\bar{q} \qquad \theta \leftrightarrow \overline{V} \qquad y \leftrightarrow \overline{M}$$

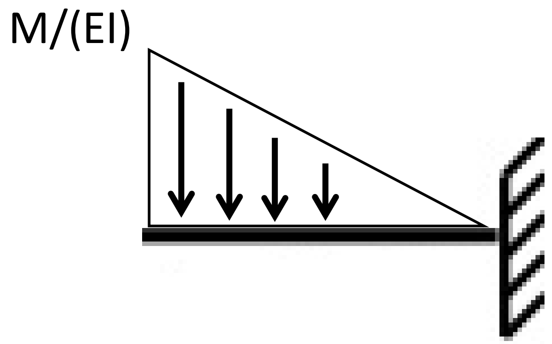
El método consiste en crear una viga que es cargada con una carga análoga **q**, equivalente a los valores de **M/EI** de nuestra viga real, y con condiciones de borde en **V** y **M**, que reflejen las condiciones de borde de **θ** y **v** de la viga real.

$$\frac{M}{EI} \leftrightarrow -\bar{q} \qquad \theta \leftrightarrow \bar{V} \qquad v \leftrightarrow \bar{M}$$

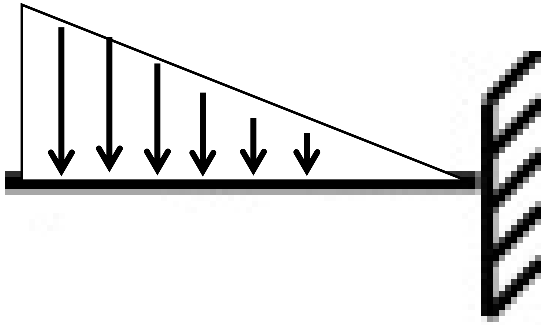


Viga real		Viga conjugada	
θ $\Delta = 0$	Apoyo fijo	V $M = 0$	Apoyo fijo
θ $\Delta = 0$	Apoyo deslizante	V $M = 0$	Apoyo deslizante
$\theta = 0$ $\Delta = 0$	Empotramiento	$V = 0$ $M = 0$	Libre
θ Δ	Libre	V M	Empotramiento
θ $\Delta = 0$	Apoyo fijo	V $M = 0$	Articulación
θ $\Delta = 0$	Apoyo deslizante	V $M = 0$	Articulación
θ Δ	Articulación	V M	Apoyo deslizante

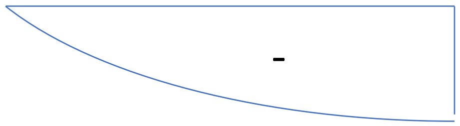
Ejemplo



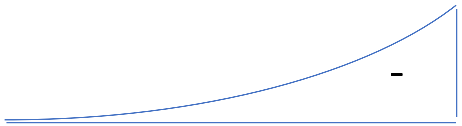
Viga Análoga



$\theta = V^*$

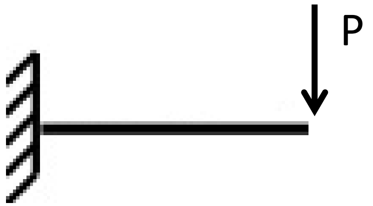


$v = M^*$



Viga Original

Viga Original



Viga Análoga

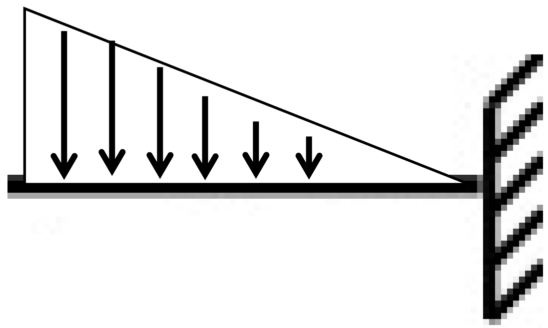
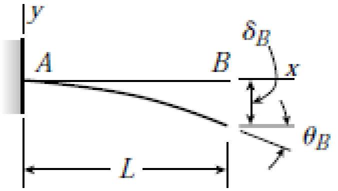
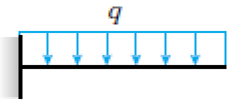
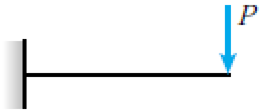
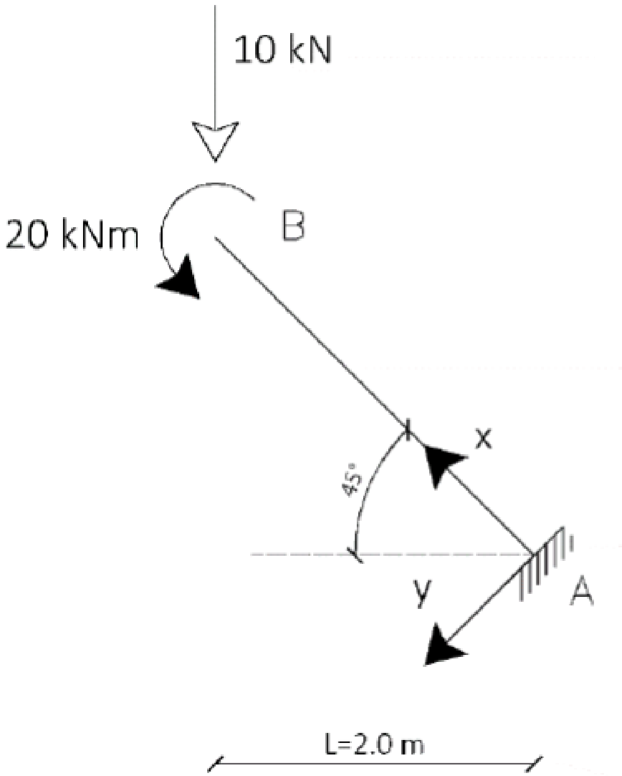


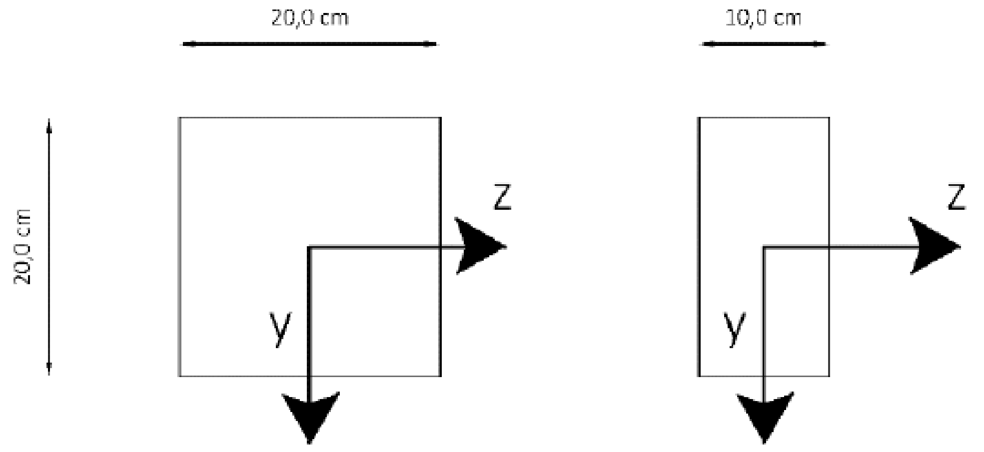
TABLE G-1 DEFLECTIONS AND SLOPES OF CANTILEVER BEAMS

	v = deflection in the y direction $v' = dv/dx$ = slope of the deflection curve $\delta_B = -v(L)$ = deflection at end B of the beam $\theta_B = -v'(L)$ = angle of rotation at end B of the beam EI = constant
	$v = -\frac{qx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2) \qquad v' = -\frac{qx}{6EI}(3L^2 - 3Lx + x^2)$ $\delta_B = \frac{qL^4}{8EI} \qquad \theta_B = \frac{qL^3}{6EI}$
	$v = -\frac{Px^2}{6EI}(3L - x) \qquad v' = -\frac{Px}{2EI}(2L - x)$ $\delta_B = \frac{PL^3}{3EI} \qquad \theta_B = \frac{PL^2}{2EI}$

Examen Dic. 2018



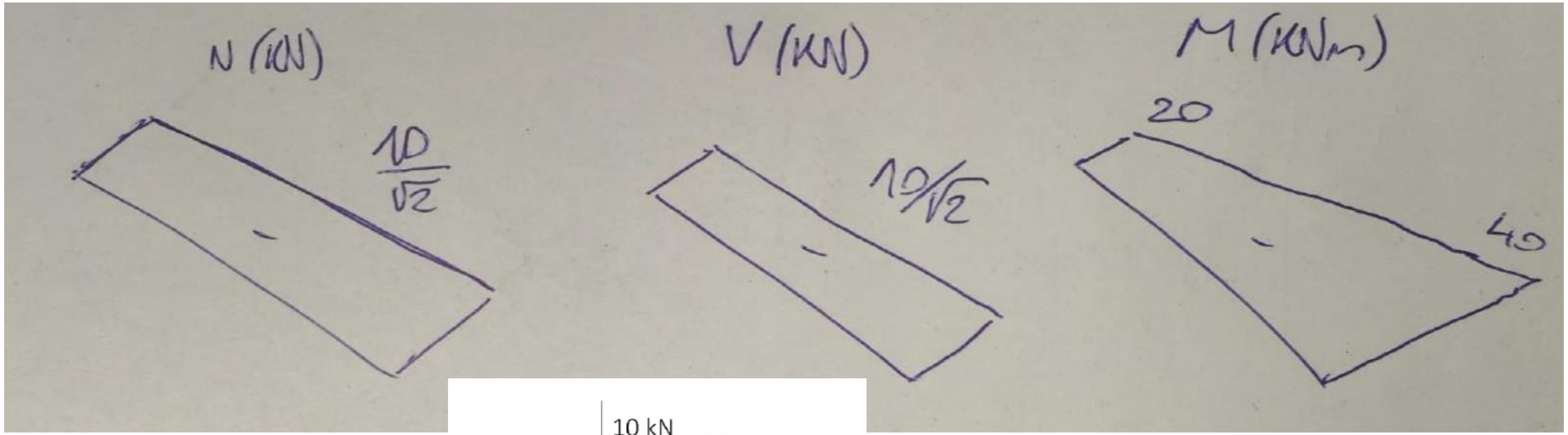
a) Trazar diagramas de solicitaciones de la estructura.
b) Hallar las expresiones analíticas para $A(x)$ e $I_z(x)$, área e inercia respectivamente.
c) Encontrar el desplazamiento del punto **B**. (**No se desprecia la deformación por directa**).
d) ¿Cómo resultan relativamente los desplazamientos según x e y?¿A que conclusión se puede llegar a partir del resultado hallado en la parte c)?

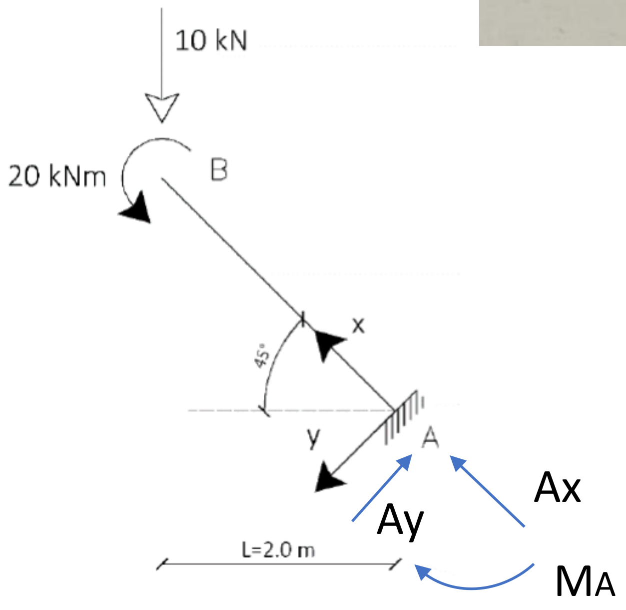


$b(A) = 20\ cm$ y $b(B) = 10\ cm.$

Puede ser útil recordar: $\int \frac{1}{a-bx} = -\frac{\mathrm{Ln}(a-bx)}{b} + C$

Diagramas





Ax= 10. 0.707
Ay=10. 0.707
M_A=20 kN.m

Area e Inercia

$$b(x) = 0{,}20 - \frac{0{,}10}{2\sqrt{2}} \cdot x$$

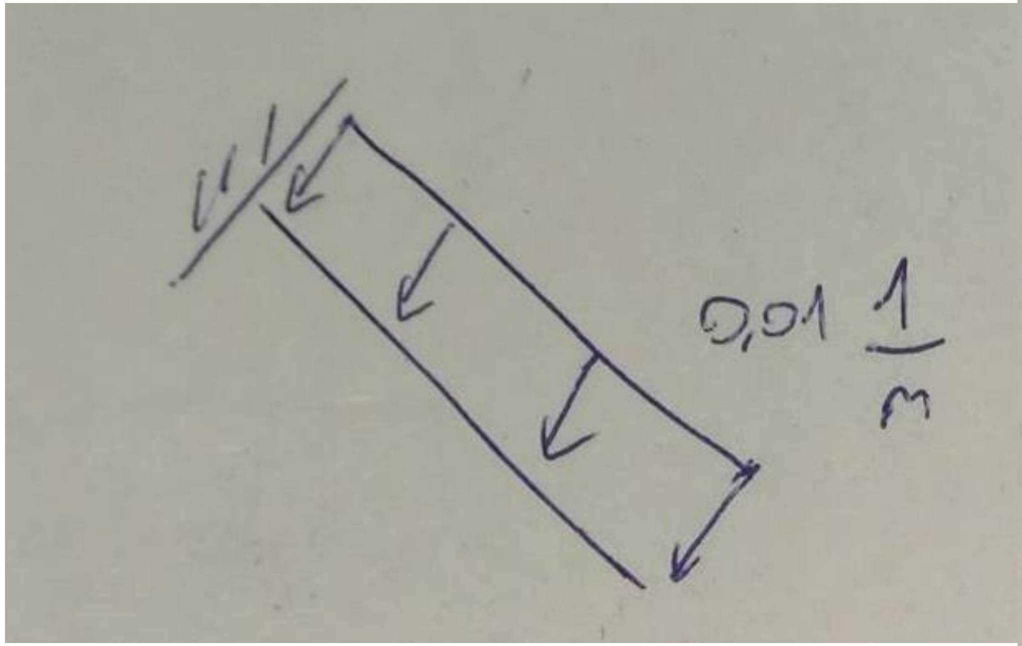
$$h(x) = 0{,}20$$

Hallar ec. de la recta que determina la base del rectangulo. b(0)=0.2 m, b(L)=0.1 m

$$A(x) = 0{,}20\left(0{,}20 - \frac{0{,}10}{2\sqrt{2}}x\right)$$

$$I(x) = \frac{0{,}20^3}{12}\left(0{,}20 - \frac{0{,}10}{2\sqrt{2}}x\right)$$

Flecha en B por flexión



$$\delta_y(B) = 0{,}01\,\frac{1}{m}\cdot\frac{(2\sqrt{2})^2}{2}$$

$$\delta_y(B) = 0{,}04\ m$$

Deformacion por directa (sentido x)

$$u(B) = u(x=2\sqrt{2}) = \int_0^{2\sqrt{2}} \varepsilon(x)\, dx = \frac{10\,KN}{\sqrt{2}\,E} \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{1}{0{,}2\left(0{,}2 - \frac{0{,}1x}{(2\sqrt{2})}\right)}\, dx$$

$$u(B) = \delta_x(B) = -2{,}31 \times 10^{-5}\ m$$