

# Teoría de Vigas

1era parte

# Teoría de vigas

- Introducción
- Ejemplos
- Relación entre cargas y solicitaciones
- Deformaciones por flexión y curvatura
- Esfuerzos normales en flexión
- Relación momento-curvatura
- Dimensionado de vigas
- Deflexiones en vigas
  - Métodos de resolución

## Bibliografía:

Gere, 5ª Ed. (2002):

4.1 a 4.5, 5.1 a 5.7 y 5.12, 9.1 a 9.5

Beer, 3ª Ed. (2004):

4.1 a 4.5, 4.12, 5.1 a 5.4, 9.1 a 9.3, 9.7

Ortiz Berrocal, 3ª Ed. (2007):

4.1 a 4.5, 5.1 a 5.2, 5.4 a 5.5

# Introducción: Vigas

Las **vigas** son **barras** sometidas principalmente a **cargas (fuerzas o momentos)** con la **dirección de sus vectores ortogonales al eje de la viga**.

En la viga se transmitirán momentos y cortantes (también directa).



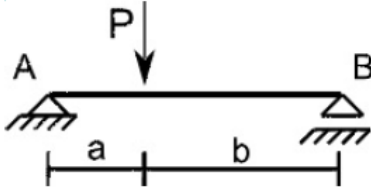
Vamos a estudiar la relación entre **cargas, solicitaciones** (cortantes y momentos), **deformaciones, giros y desplazamientos** (descensos) **en vigas**.



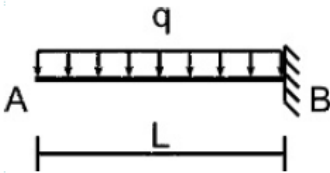
# Flexión en estructuras tipo

## Vigas

1) Simplemente apoyada (S.A.)



2) En ménsula



3) Bi-empotrada

4) Continua

5) S.A. con voladizo

6) Vigas Gerber

## Pórticos

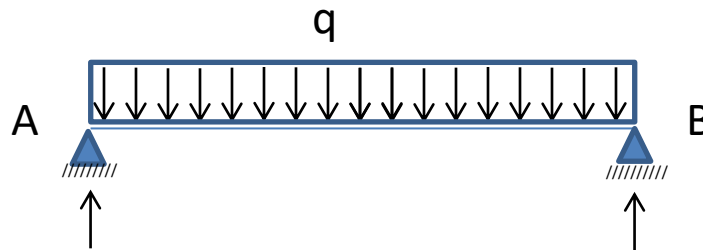
7) Pórtico simplemente apoyado

8) Pórticos múltiples

9) Arco de 3 articulaciones

# Carga distribuida

**Carga distribuida (q):** Carga por unidad de longitud de barra. Ejemplos: el peso propio de los materiales en barras horizontales, o el peso de un material que se apoya en éstas, la presión de líquidos o el viento. Unidad: [N/m] (usualmente: [kN/m])



La fuerza en un diferencial de largo de barra  $dx$  estará dada por:  $dF = q * dx$ .

Por lo tanto, en un tramo de barra de largo  $L$ , la **resultante** de la carga distribuida se obtiene integrando los  $dF$ , y su posición igualando los momentos de ésta, con los de la carga distribuida.

**Gráficamente:** La **resultante** está dada por el **área bajo el diagrama** de carga  $q(x)$ , y su **línea de acción**, pasa por el **centro de gravedad** de dicha área.

# Solicitaciones: Cortante y Momento

**Acciones internas** (solicitaciones): Fuerzas que se transmiten internamente por un elemento. Se pueden visualizar “cortando” y aislando imaginariamente una parte de un elemento.

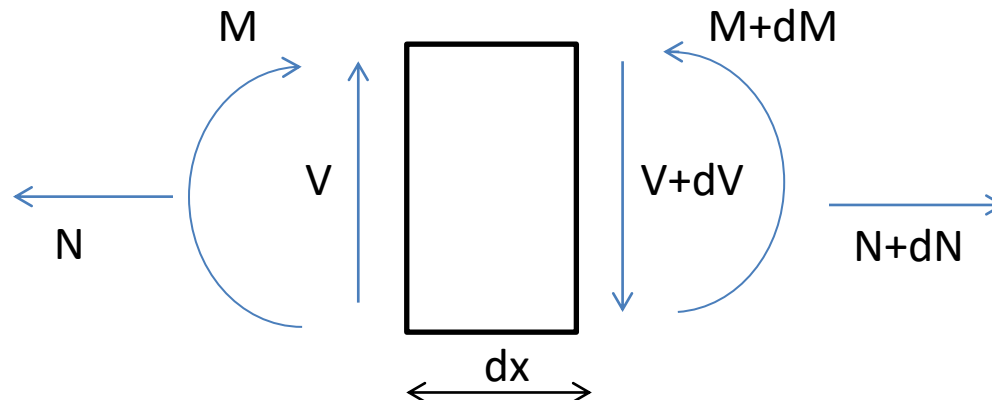
Si trabajamos en el plano, las acciones internas transmitidas se pueden reducir a un torsor (una fuerza y un momento) aplicado en el eje de la sección.

En base a este torsor, se pueden definir cada una de las **solicitaciones**:

**N-Fuerza axial** (o *directa*, o **fuerza normal**): componente de la fuerza del torsor en la dir. del eje.

**V-Fuerza cortante** (o simplemente **cortante**): componente de la fuerza en dir. perpendicular al eje.

**M-Momento flector** (o simplemente **momento**): momento del torsor.



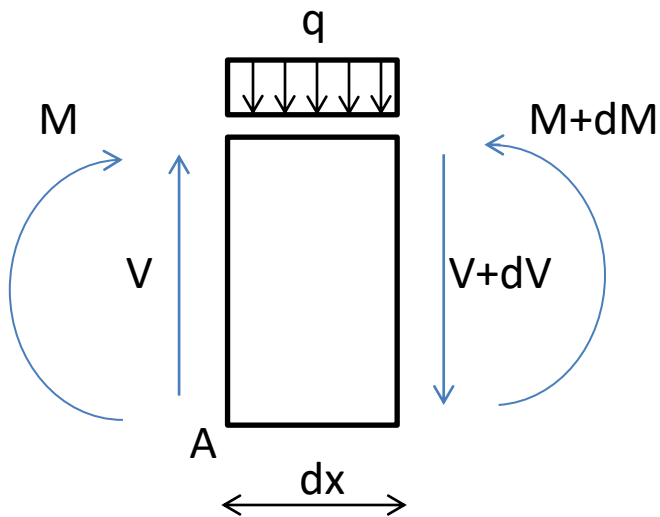
# Relación entre q, V y M

Estableceremos la relación matemática entre **q**, **V** y **M**.

## Teorema Fundamental de Vigas:

Caso de carga distribuida q:

$$-q = \frac{dV}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}$$



Suma de F verticales = 0

$$V - (V + dV) - q \cdot dx = 0$$

$$q = -dV/dx$$

Suma de MA = 0

$$M - M - dM + q \cdot dx \cdot dx/2 + (V + dV) \cdot dx = 0$$

$$-dM + q \cdot dx \cdot dx/2 + (V + dV) \cdot dx = 0$$

Despreciando los términos dif. de 2do orden

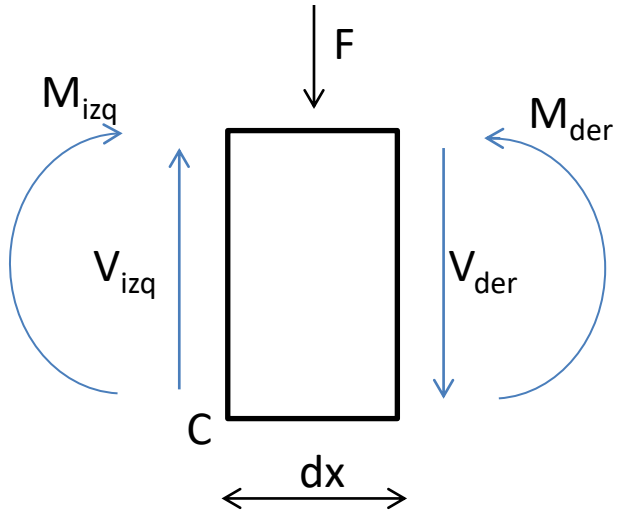
$$-dM + V \cdot dx = 0$$

$$V = dM/dx$$



# Relación entre q, V y M

## Caso carga puntual:



Suma de F verticales = 0

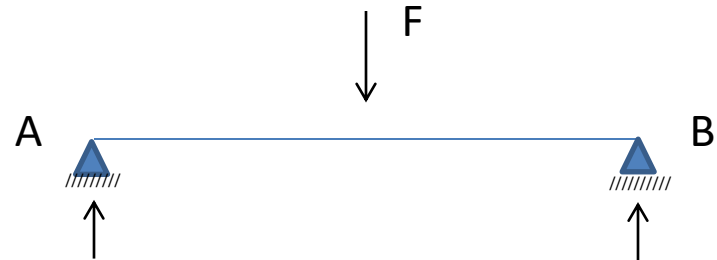
$$V_{izq} - V_{der} - F = 0 \quad V_{der} = V_{izq} - F$$

Suma de  $M_c = 0$

$$M_{izq} - M_{der} + dx * V_{der} + F * dx / 2 = 0 \quad M_{izq} = M_{der}$$

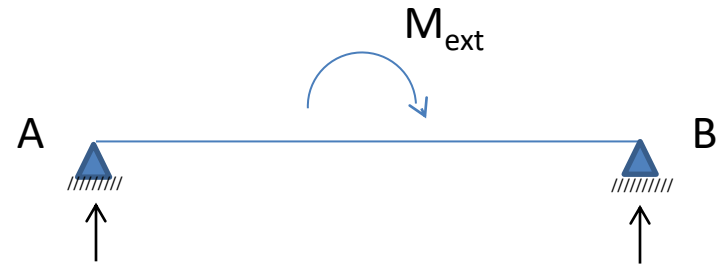
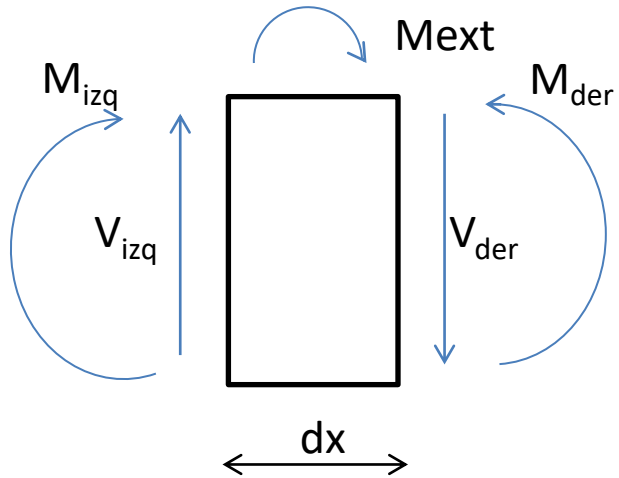
## Convención de signos para el Cortante:

Una fuerza cortante positiva actúa en sentido horario contra el material. Una negativa lo hace en sentido antihorario.



# Relación entre q, V y M

## Caso Momento puntual:



Suma de M = 0

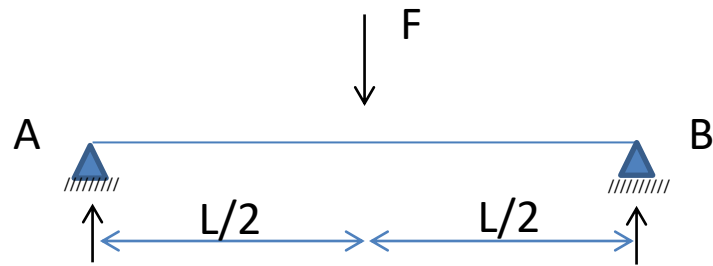
$$M_{izq} - M_{der} + M_{ext} + dx * V_{der} = 0$$

$$M_{der} = M_{izq} + M_{ext}$$

Suma de V = 0

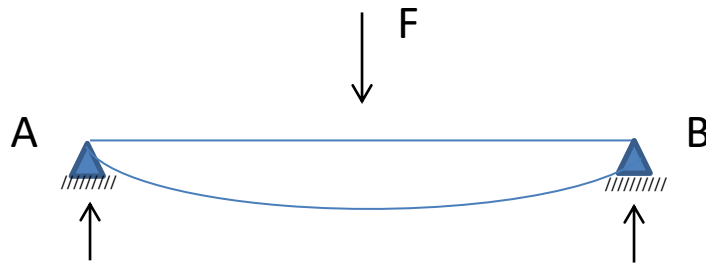
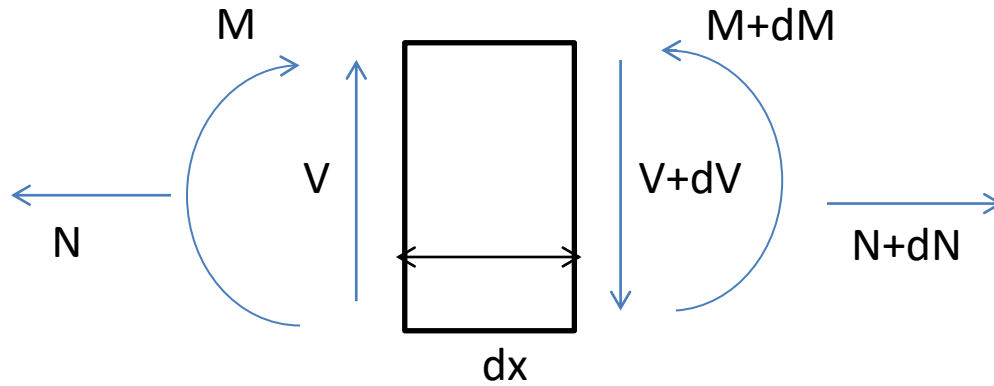
$$V_{der} = V_{izq}$$

# Ejemplo



V

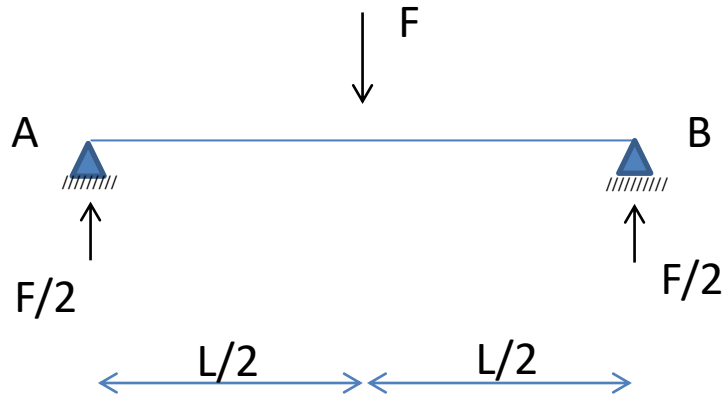




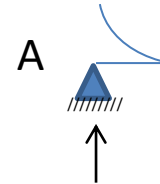
### IMPORTANTE:

Por convención, el momento se dibuja del lado de la fibra traccionada. Le decimos momento positivo aunque lo dibujemos del lado inferior del eje de la viga. Y le decimos momento negativo cuando tracciona las fibras superiores.

# Ejemplo



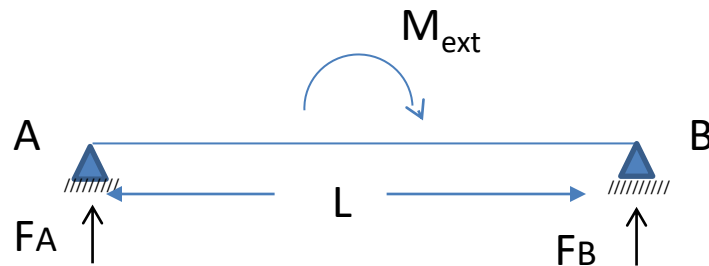
$$V = dM/dx$$



M



# Ejemplo



V



$$\text{Suma } F = 0$$

$$F_A + F_B = 0$$

$$F_A = -F_B$$

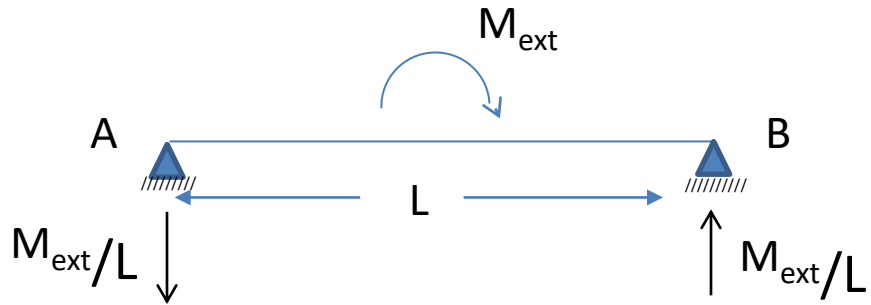
$$\text{Suma } M = 0$$

$$M_{\text{ext}} - L \cdot F_B = 0$$

$$F_B = M_{\text{ext}} / L$$

# EJEMPLO

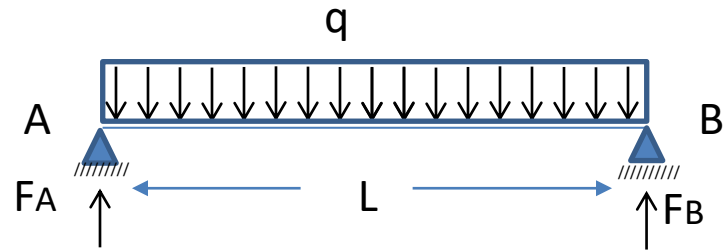
$$V = dM/dx$$



M



# Ejemplo



$$q = -dV/dx$$

V



$$V = dM/dx$$

M



$$\begin{aligned} \text{Suma } F &= 0 \\ F_A + F_B &= qL \end{aligned}$$

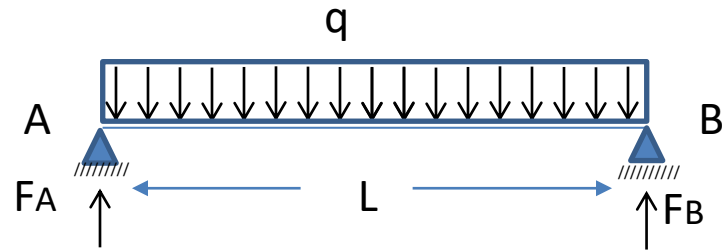
$$\text{Suma } M = 0$$

$$qL \cdot L/2 - L \cdot F_B = 0$$

$$F_B = qL/2$$



# Ejemplo



$$\text{Suma } F = 0$$

$$F_A + F_B = qL$$

$$\text{Suma } M = 0$$

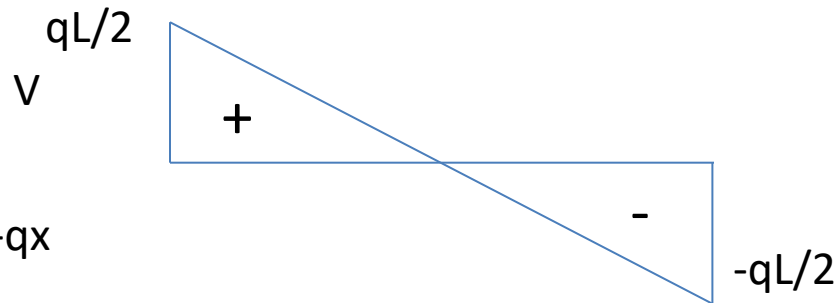
$$qL \cdot L/2 - L \cdot F_B = 0$$

$$F_A = qL/2$$

$$F_B = qL/2$$

$$q = -dV/dx$$

$$V(x) = qL/2 - qx$$



$$V = dM/dx$$

$M$



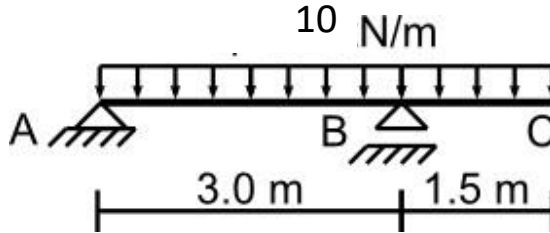
$$V(L/2) = 0$$

$$dM/dx = 0$$

En  $L/2$  hay un máximo de  $M$

# Ejemplo

Ejemplo:



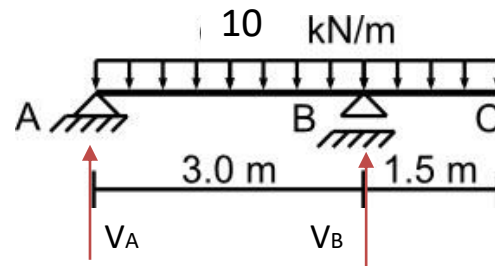
- Hallar Reacciones
- Diagrama de V y M
- Bosquejar deformada.

Condición de Equilibrio

Suma de Fuerzas = 0

Suma de Momentos = 0

# Ejemplo



Condición de Equilibrio

Suma de Fuerzas = 0

$$V_A + V_B = (3 \text{ m} + 1.5 \text{ m}) \cdot 10 \text{ kN/m}$$

$$\rightarrow V_A + V_B = 45 \text{ kN}$$

Suma de Momentos = 0

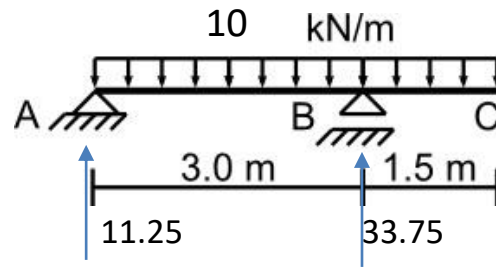
$$M_A = 0$$

$$45 \text{ kN} \cdot (4.5/2) - V_B \cdot 3 \text{ m} = 0$$

$$V_B = 45 \cdot 2.25/3 \rightarrow V_B = 33.75 \text{ kN}$$

$$V_A = 45 - 33.75 = 11.25 \text{ kN}$$

# Ejemplo

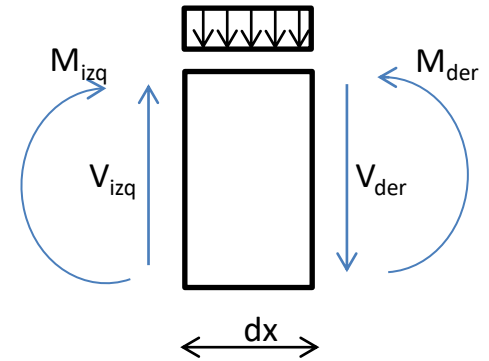


V(kN)

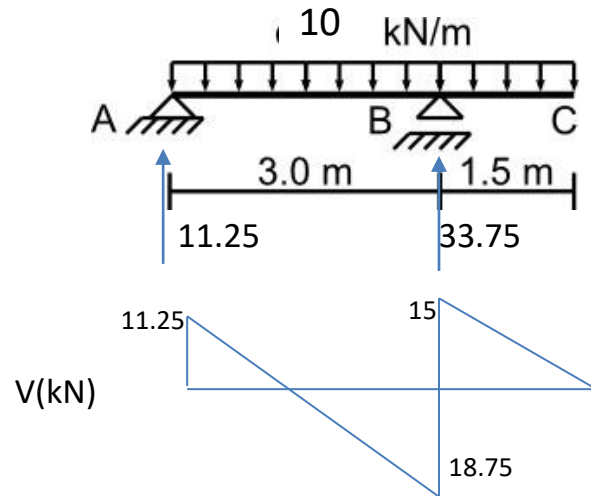


$$q = -dV/dx$$

$$V = dM/dx$$

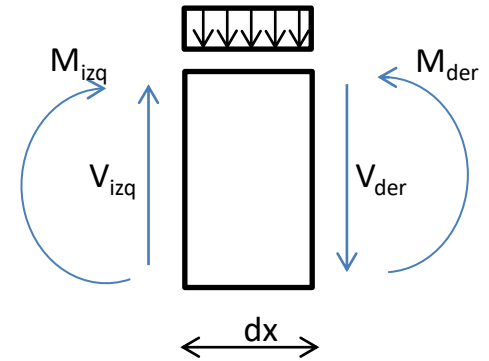


# Ejemplo



M(kN.m) \_\_\_\_\_

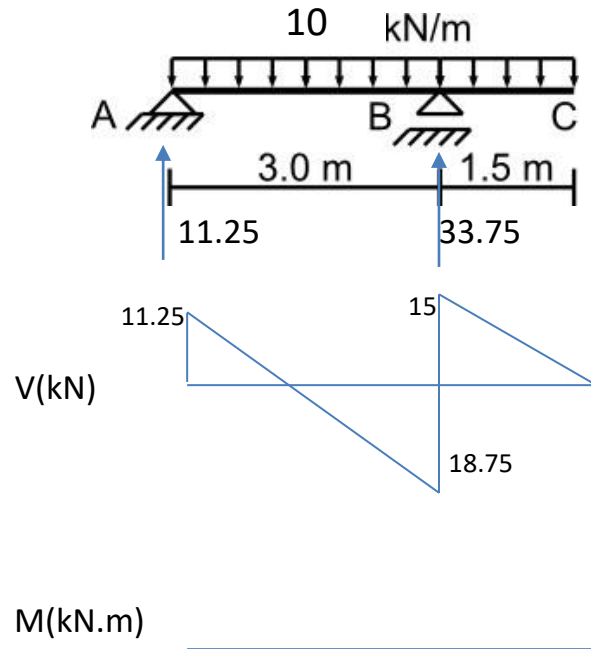
$$V = dM/dx$$



## IMPORTANTE:

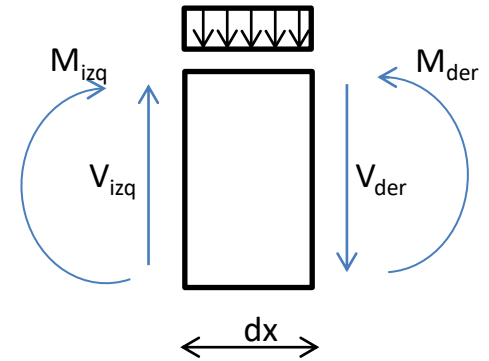
Por convención, el momento se dibuja del lado de la fibra traccionada. Y le decimos momento negativo cuando tracciona las fibras superiores

# Ejemplo



$$M_{\max} = 11.25 \cdot 1.125 / 2 = 6.328 \text{ kN.m}$$

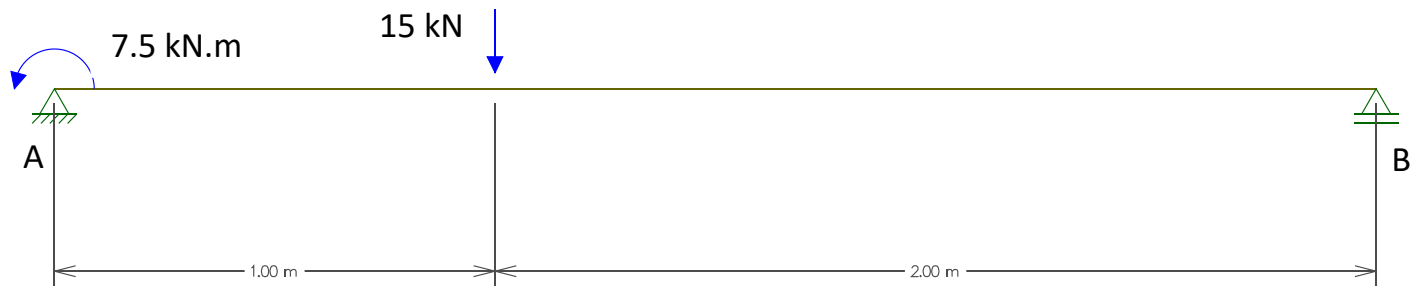
$$V = dM/dx$$



## IMPORTANTE:

Por convención, el momento se dibuja del lado de la fibra traccionada. Le decimos Momento positivo cuando tracciona la fibra inferior y momento negativo cuando tracciona la fibra superior

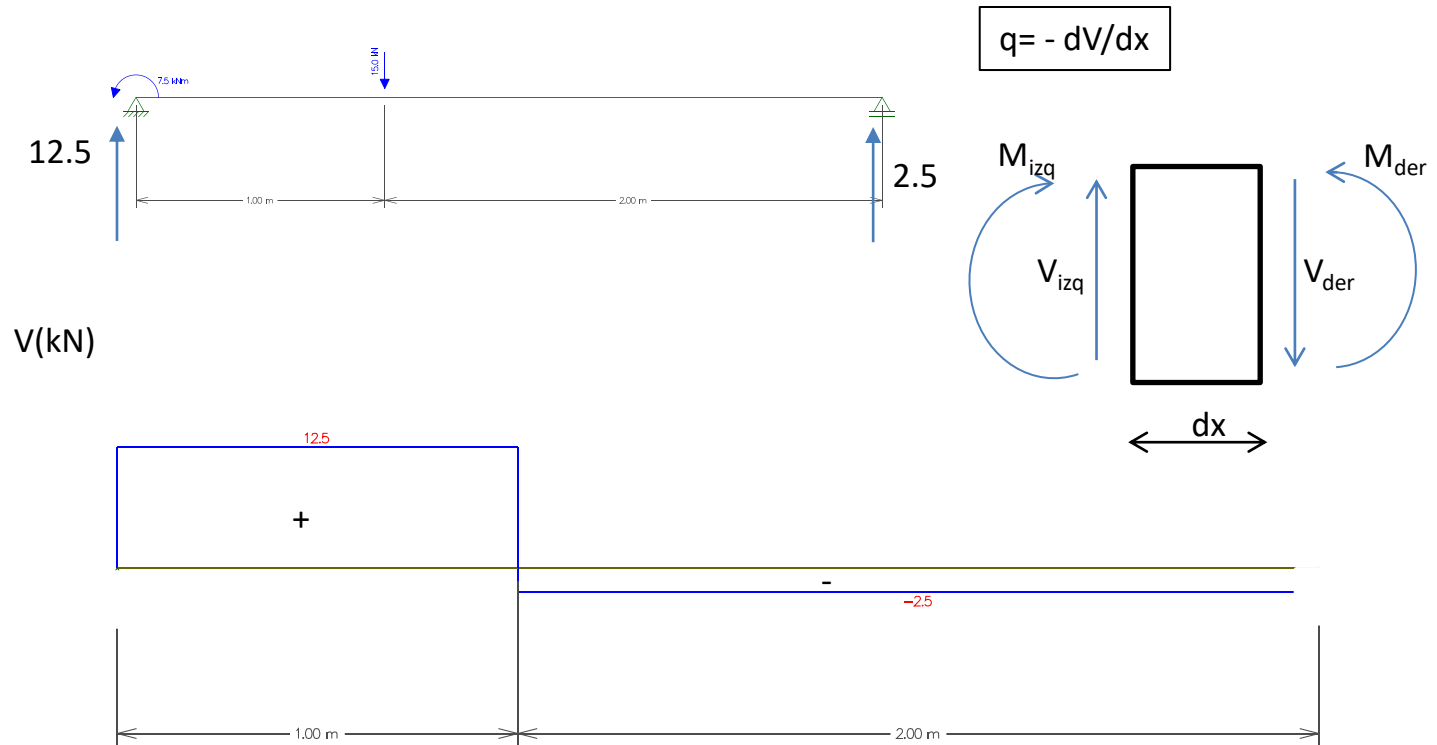
# Ejemplo



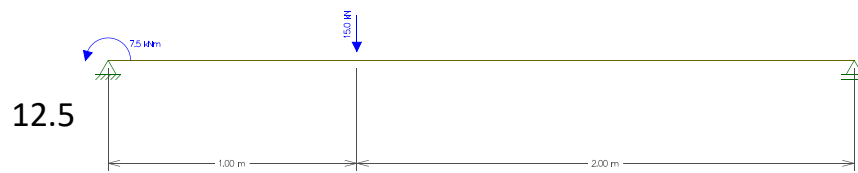
$$\begin{aligned} \text{Suma } F_v &= 0 \\ \text{Suma } M_A &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_A &= 12.5 \text{ kN} \\ F_B &= 2.5 \text{ kN} \end{aligned}$$

# Cortante

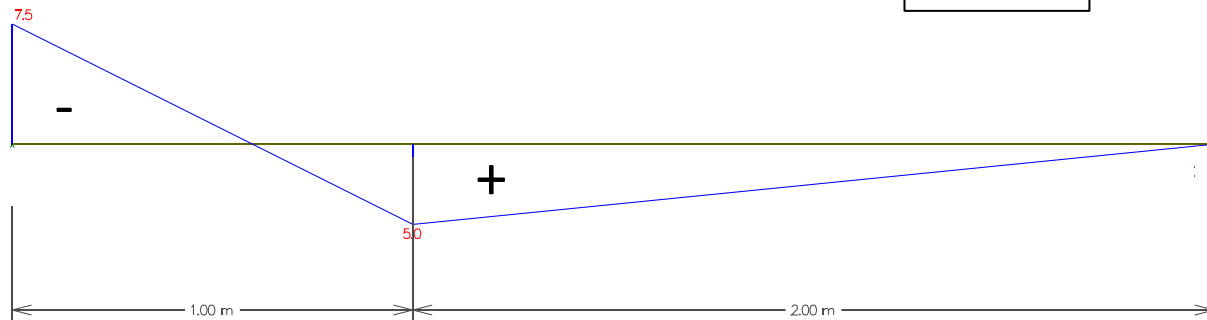






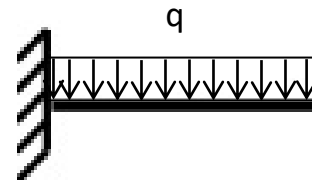
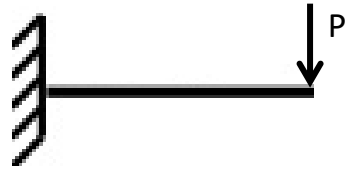
M(kN,m)

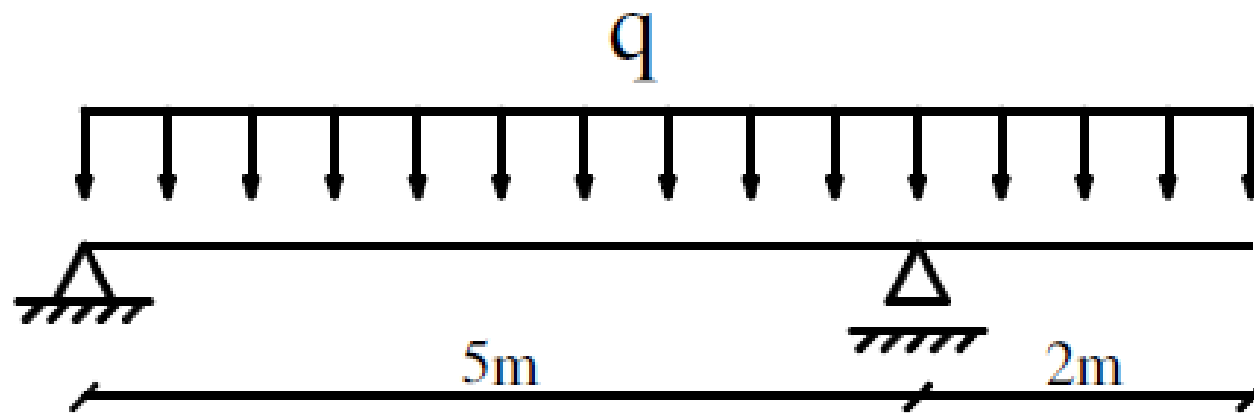
$$V = dM/dx$$



# Ejemplo

Trazar diagramas de V y M.





# Ejemplo Ex. Julio 2005

Para la viga de la figura, se pide:

- Hallar reacciones.
- Trazar diagrama de solicitaciones.
- Dimensionar la viga con un perfil **PNI** considerando  $\sigma_{adm} = 140 \text{ MPa}$ .

