Fuerza Axial: Directa

Tensiones internas

TEMARIO

Sistemas planos de cuerpos rígidos vinculados. Grados de libertad. Sistemas isostáticos e hiperestáticos. Criterios de clasificación.

Barras solicitaciones internas. Reticulados (sistemas de biela biarticuladas).

Teoría de barras elásticas rectas.

- -Fuerza axial. Tensiones y deformaciones. Ley de Hooke. Principio de Saint-Venant.
- -Reticulados isostáticos.
- -Características geométricas de las secciones.
- -Flexión pura. Hipótesis de Navier.
- -Diagrama de tensiones y deformaciones. Módulo resistente.
- -Ecuación fundamental de vigas.
- -Elástica de vigas rectas. Ecuación de la elástica. Viga análoga.
- -Tensiones Rasantes (Jouravski). Vigas compuestas de sección rectangular.
- -Vigas continuas hiperestáticas, ecuación de tres momentos.

Directa

- Coeficiente de seguridad
- Fuerza axial
- Deformación unitaria
- Comportamiento del material
- Ley de Hook
- Tensión normal (Tensiones internas)
  - Bibliografía:

Ortiz Berrocal, 3ª Ed. (2007):
1.5 (Sólo pags. 8 y 9); 1.7 (hasta pag. 23); 1.9; 1.10; 1.13; 2.1 (hasta pag. 74); 2.3; 2.4 y 2.5

Beer, 3ª Ed. (2004):
1.1 a 1.5; 1.13; 2.1 a 2.3; 2.5; 2.6; 2.8; 2.17

Gere, 5ª Ed. (2002):
1.1 a 1.5; 1.7; 1.8; 2.1 a 2.3 y pags. 140 y 141

Coeficiente de Seguridad

$$C.S. = \frac{\text{carga de falla}}{\text{carga de diseño}}$$

$$C.S. = \frac{250\ \text{MPa}}{150\ \text{MPa}} = 1{,}67$$

Coeficiente de seguridad

Los C.S. en ingeniería pueden variar entre valores algo mayores a 1 hasta valores en torno a 10.

Por ejemplo: probabilidad de sobrecargas, tipo de cargas, con que precisión se conocen, tipo de falla , métodos de análisis, variabilidad de la mano de obra que realiza la estructura, variaciones de los materiales o consecuencias de la falla.

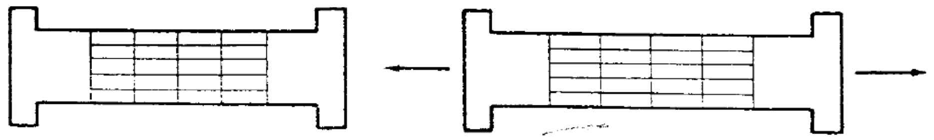
Los CS estar en niveles aceptables de seguridad, y ser lo menor posibles.

Ejemplos:

Tensión normal (o esfuerzo normal)

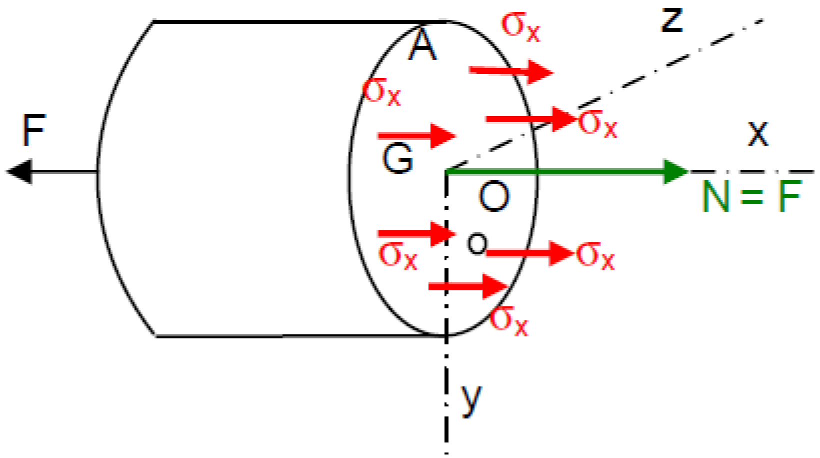
Para estudiar el tema, en forma simplificada, consideraremos una **barra de eje recto, sometida a una fuerza axial P, aplicada en el baricentro de la sección**.

Si hacemos un corte imaginario por una sección, podremos visualizar las tensiones internas



Hipótesis (determinada experimentalmente): Suponemos que las tensiones se distribuyen uniformemente en toda la sección (i.e. *f=cte* $\forall P \epsilon \Omega$). Por lo tanto:

En una sección sometida a una fuerza axial aplicada en su baricentro, aparecerán sólo tensiones normales de valor: σ = P/A

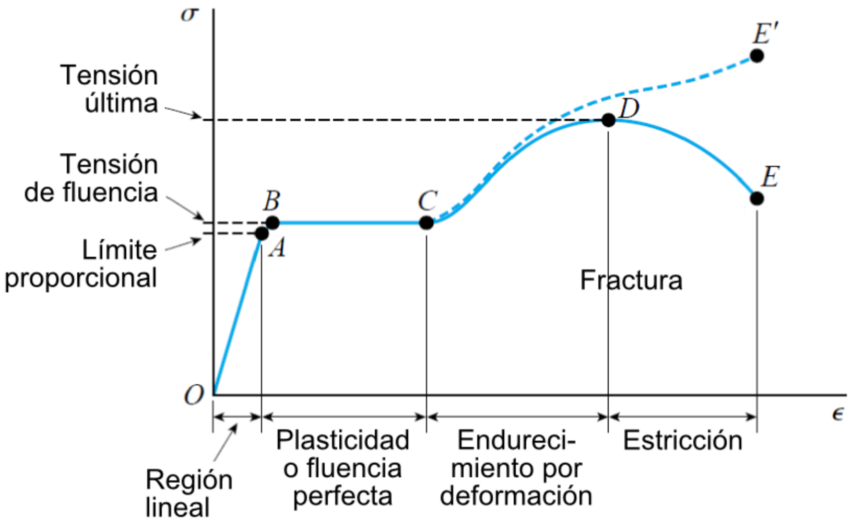


Coeficiente de seguridad

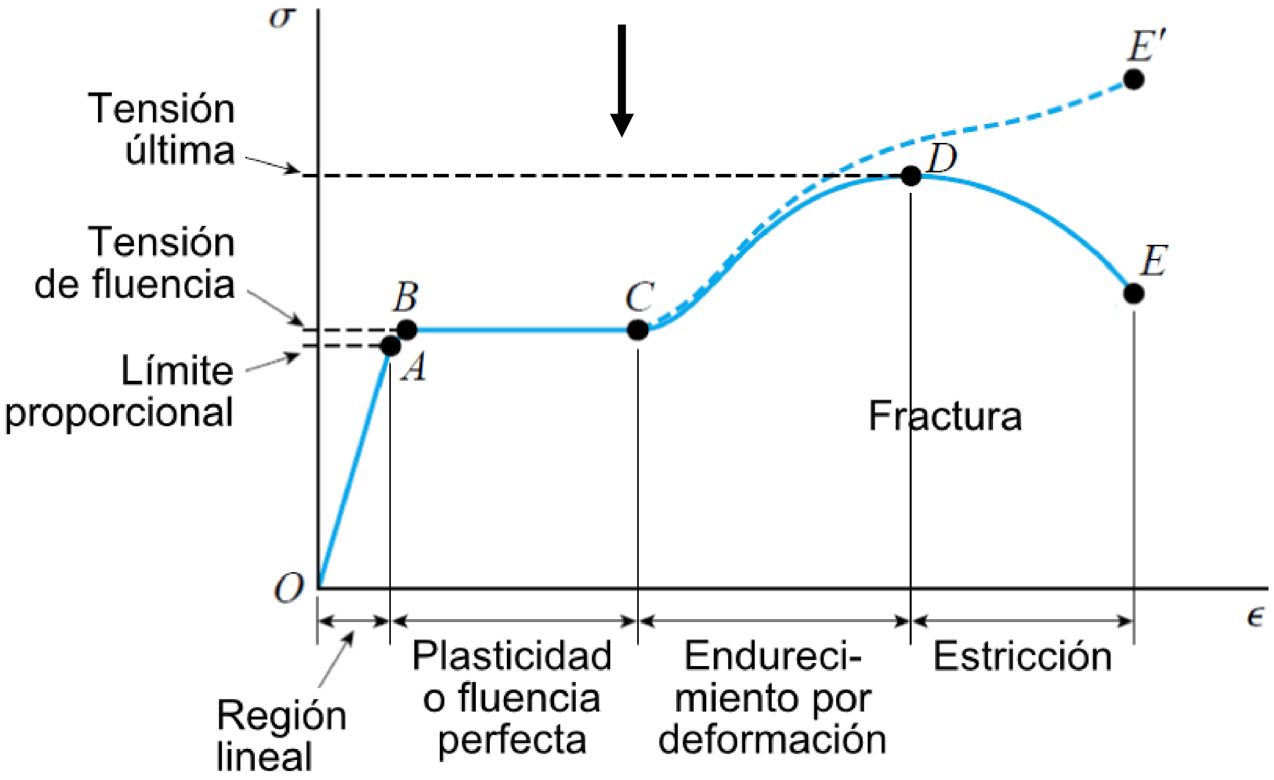
Queremos que el material permanezca en el rango elástico para evitar deformaciones remanentes. Por lo tanto, consideramos que la estructura "falla" cuando se alcanza, en cualquier punto, el $\boldsymbol{\sigma_{fl}}$. Para estar lejos de la falla diseñamos con una tensión menor, llamada tensión admisible: $\boldsymbol{\sigma_{adm}}$. Nuevamente, el coeficiente de seguridad estará dado por:

$$C.S. = \frac{\sigma_{fl}}{\sigma_{adm}}$$

Un factor de seguridad típico para estructuras, con respecto a la fluencia en tensión es **CS = 1,67**. Por lo tanto, para aceros con $\boldsymbol{\sigma_{fl}}$ **= 250 MPa**, la tensión admisible es de, aproximadamente, $\boldsymbol{\sigma_{adm}}$ **= 150 MPa**. En este entorno se tomará la tensión admisible y, por lo general, será un valor dado en los ejercicios.



Veremos en mayor detalle el comportamiento del ***acero estructural***



Ley de Hooke

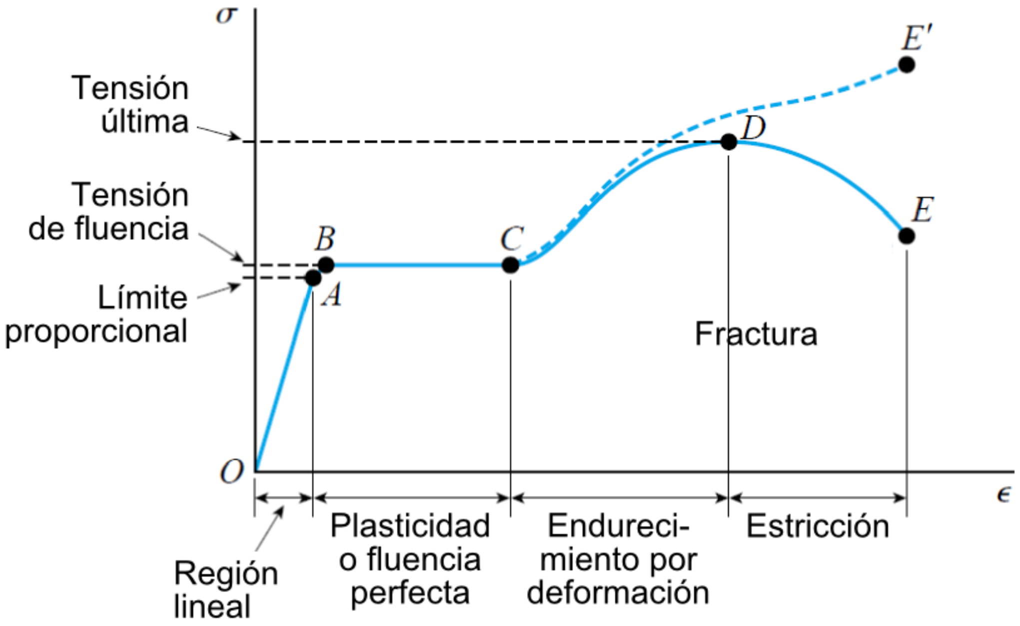
En el tramo inicial, la **tensión** es **directamente proporcional** a la **deformación unitaria:**

Ley de Hooke: $\boldsymbol{\sigma = E.\ \varepsilon}$

En este tramo, el material tiene un comportamiento: **elástico lineal**.

El coeficiente **E** se denomina: *Módulo de elasticidad* (o *Módulo de Young*)

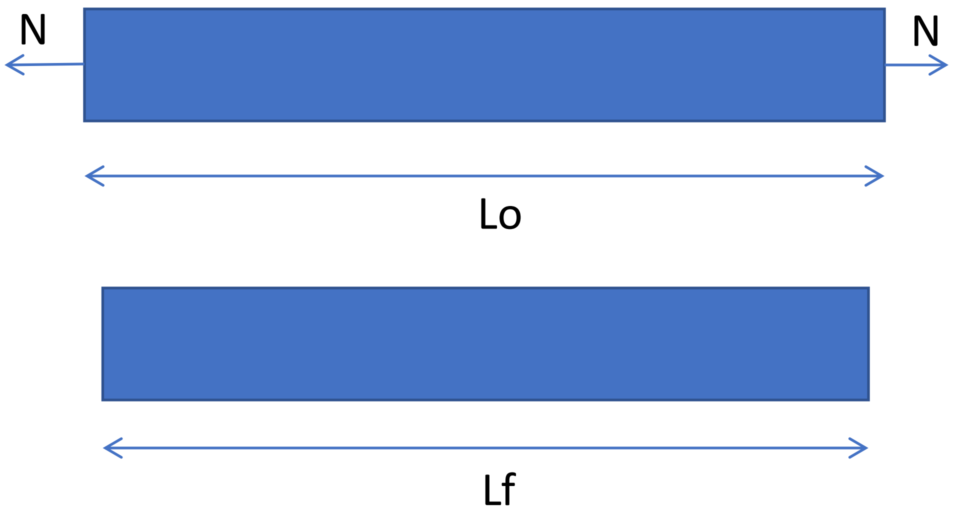
$\boldsymbol{\sigma = N/A}$



$\boldsymbol{\varepsilon = \Delta L/L}$

Deformación unitaria

Consideraremos una barra de largo ***L*** de eje recto y sección constante, bajo una carga ***P*** axial. La barra se alargará una distancia delta **L**



$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{Lf - Lo}{Lo}$$

En el caso de una barra de sección o carga variable a lo largo del eje, la deformación unitaria puede variar punto a punto a lo largo del eje. Es necesario definir, en forma general, la deformación unitaria para cada punto.

u: vector desplazamiento de cada punto desde la posición inicial a la posición deformada.

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$

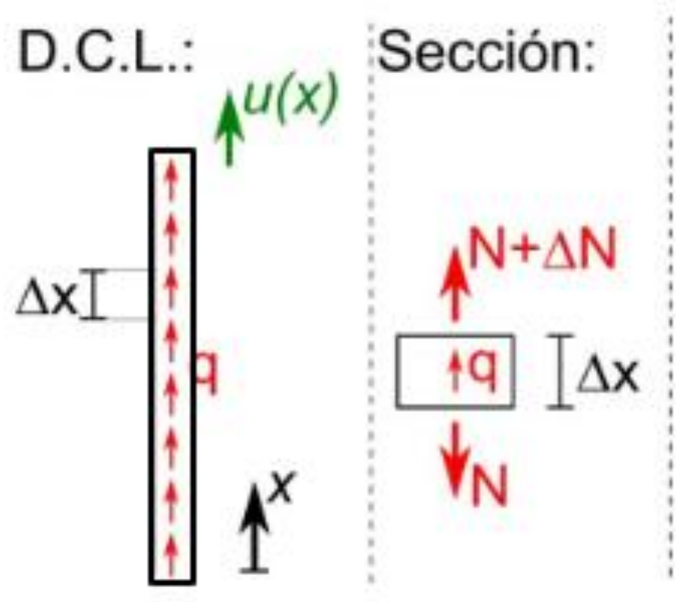
Fuerza Axial – Diagramas de directa

Carga distribuida (q):

Carga por unidad de longitud de la barra.
Ejemplo: el peso propio de los materiales.
La fuerza en un diferencial de largo de barra **dx** estará dada por: **dF = q * dx**.

Por lo tanto, en un tramo de barra de largo **L**, la resultante de la carga distribuida **q(x)** será $\mathbf{R=\int_L q(x)\,dx}$

Su unidad será por lo tanto [N/m] (usualmente: [kN/m]).

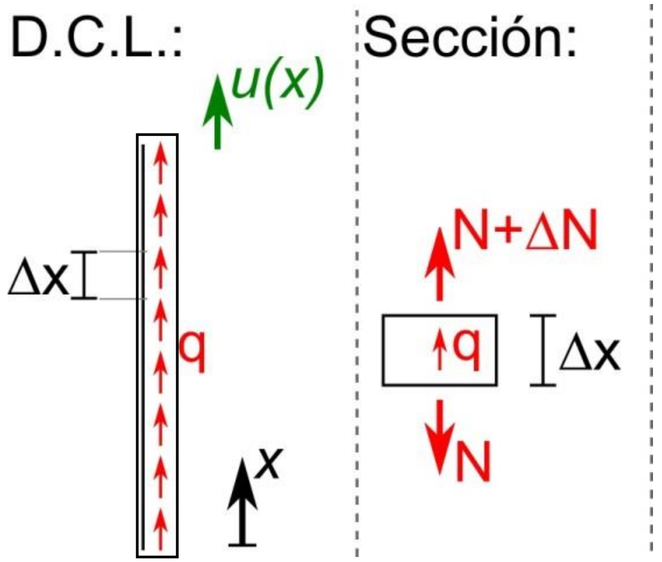


¿Cómo será el diagrama de directas, si el elemento tiene una carga axial distribuida?

Si **q** es nula en un tramo (sin carga distribuida), **N** es cte. en dicho tramo.

Si en un tramo de barra **q** es constante, la variación de **N** es lineal.

Principales conceptos



Ley de Hooke:

$$\sigma = E.\varepsilon$$

Variación de directa por carga distribuida axial:

$$\frac{dN}{dx} = -q$$

Estiramiento (**ΔL**) de una barra recta:

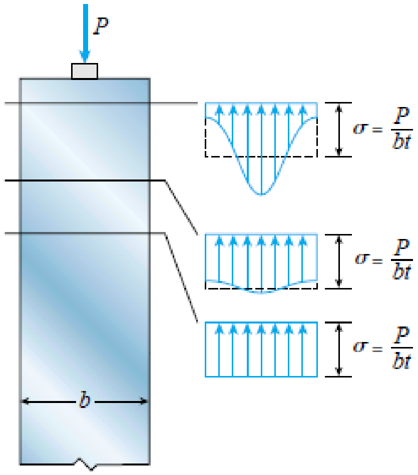
Para barra de **largo L** con **A, E y N cte**:

$$\Delta L = \Delta u = \frac{NL}{AE}$$

Principio de Saint Venant

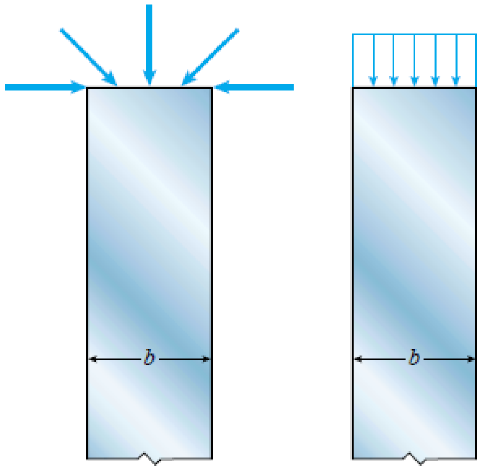
En el desarrollo anterior consideramos que las tensiones se distribuían uniformemente en toda la sección.

Consideremos una barra en la que se introduce una carga concentrada en el extremo. ¿Cómo serán las tensiones en distintas secciones?



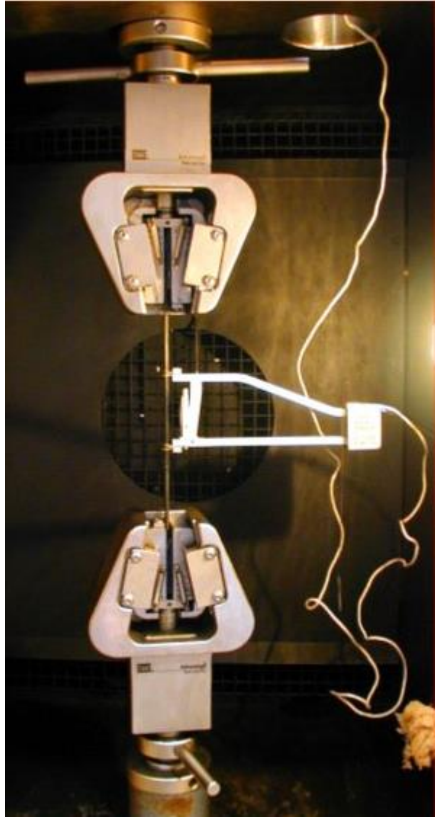
Las tensiones en los cuerpos causadas por sistemas de cargas estáticamente equivalente son iguales siempre que nos alejemos de la región cargada una distancia por lo menos igual a la mayor dimensión transversal.

Está idea se generaliza, considerando distintos sistemas equivalentes de carga actuando en una misma sección.



En R1 vamos a despreciar el efecto de introducción de carga, por lo que supondremos que la formula **σ = P/A** es válida para toda sección de la barra.

Comportamiento del material

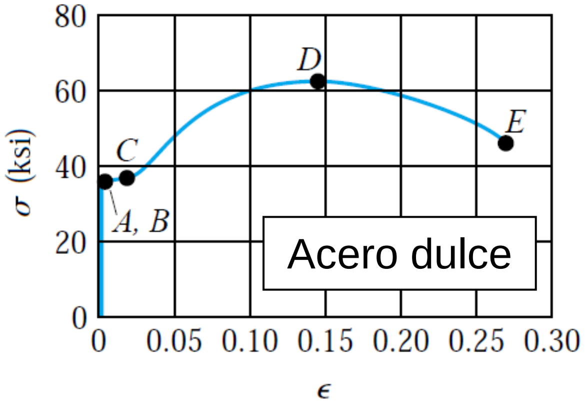


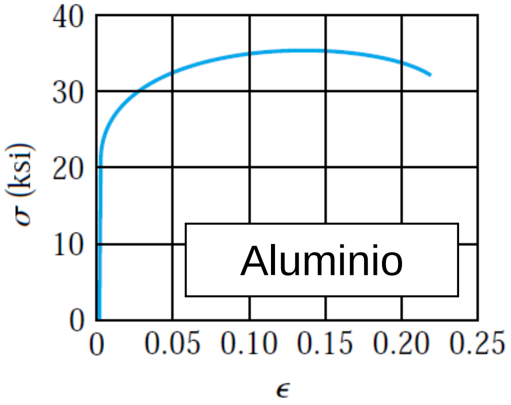
En los ensayos **se miden** simultáneamente **las fuerzas** (***P***) aplicadas a la probeta **y las deformaciones** (δ) que esta sufre

Si se grafica ***P* vs** δ se obtendrán curvas que, por lo general, dependen de las dimensiones de las probetas.

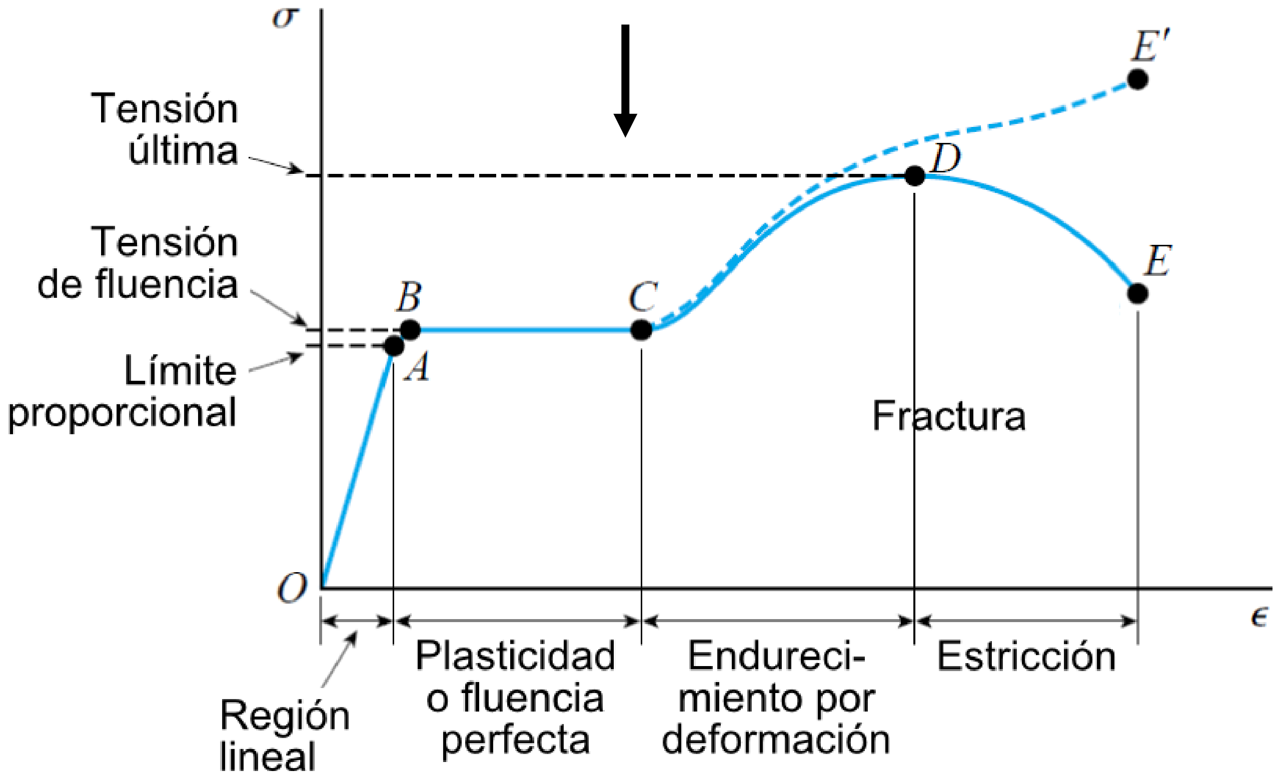
Por ello, los resultados de las pruebas se expresan calculando y representando la relación: **tensión** versus **deformación unitaria** (***σ – ε)***. El **diagrama** obtenido es **característico del material** que se está evaluando, y brinda información importante sobre las propiedades mecánicas y sobre su tipo de comportamiento.

Ejemplos:
[Gere, 2004]





Veremos en mayor detalle el comportamiento del ***acero estructural*** (también llamado *acero dulce*).
(Los libros del curso incluyen tablas de propiedades del acero y otros materiales estructurales).



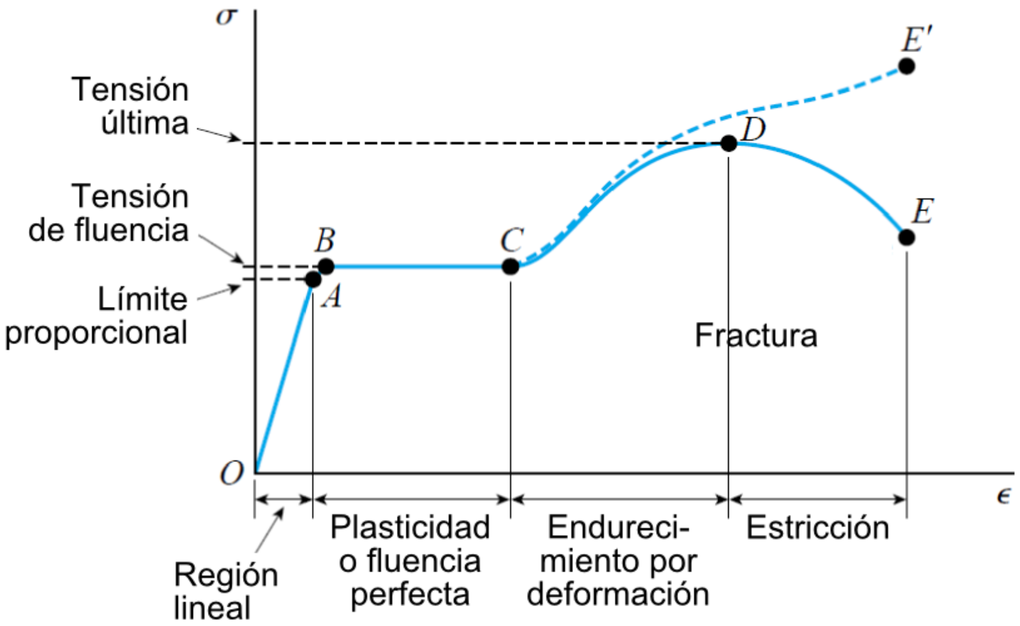
Ley de Hooke

En el tramo inicial, la **tensión** es **directamente proporcional** a la **deformación unitaria:**

Ley de Hooke: $\boldsymbol{\sigma = E.\ \varepsilon}$

En este tramo, el material tiene un comportamiento: **elástico lineal**.

El coeficiente **E** se denomina: *Módulo de elasticidad* (o *Módulo de Young*)



En R1 vamos a diseñar en el tramo elástico-lineal.

Ley de Hooke

Como ε es adimensional, E tiene las mismas unidades que las tensiones: **Pa** (pascales) (N/m^2)

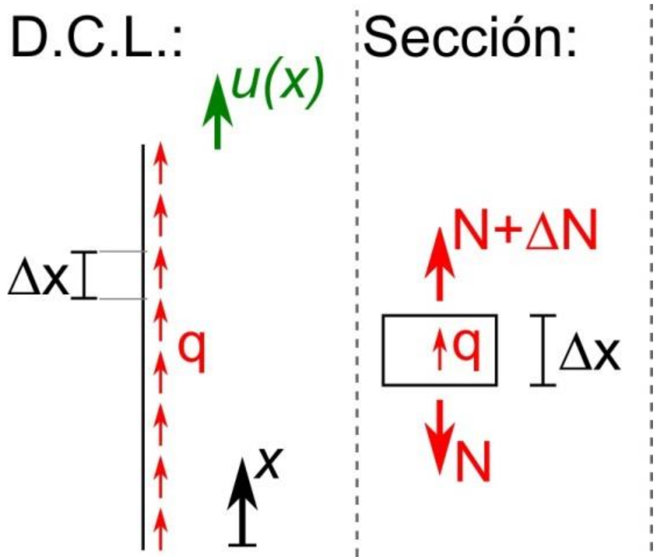
Los valores de **E** para los materiales de construcción son relativamente grandes, del orden de los **GPa.**

Por ejemplo, para el **acero**: **E = 210 GPa**

La mayoría de los materiales (metales, madera, plásticos, cerámicas e incluso en parte el hormigón) se comportan en forma elástico-lineal en las primeras etapas de carga.

Generalmente, diseñaremos las estructuras para que sufran deformaciones relativamente pequeñas.

Resumen de principales conceptos



Ley de Hooke:

$$\sigma = E.\varepsilon$$

Variación de directa por carga distribuida axial:

$$\frac{dN}{dx} = -q$$

Estiramiento (**ΔL**) de una barra recta:

Para barra de **largo L** con **A, E y N cte**:

$$\Delta L = \Delta u = \frac{NL}{AE}$$

Ley de Hooke

Tensión normal por directa: $\sigma = \dfrac{N}{A}$

Deformación unitaria: $\varepsilon = \dfrac{du}{dx}$

Relación entre **q, N y u:**

en un tramo **con A y E cte:**	$-q = \dfrac{dN}{dx} = AE\,\dfrac{d^2u}{dx^2}$

$$\sigma = \frac{N}{A} = E\varepsilon = E\,\frac{du}{dx}$$

$$\boxed{du = \frac{N.dx}{EA}}$$

Fuerza Axial

$$\frac{dN}{dx} = -q$$

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

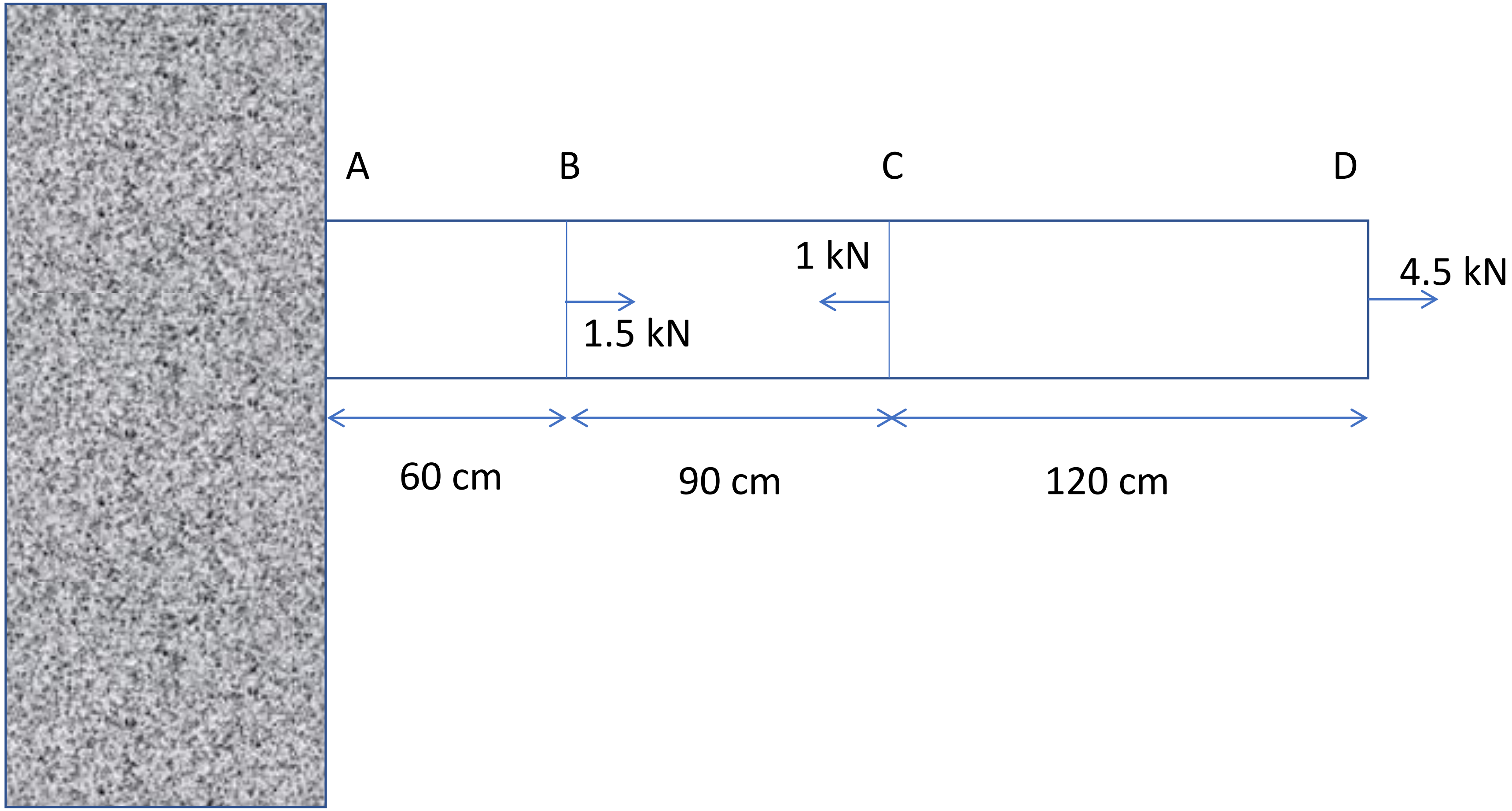
$$\sigma = E.\varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

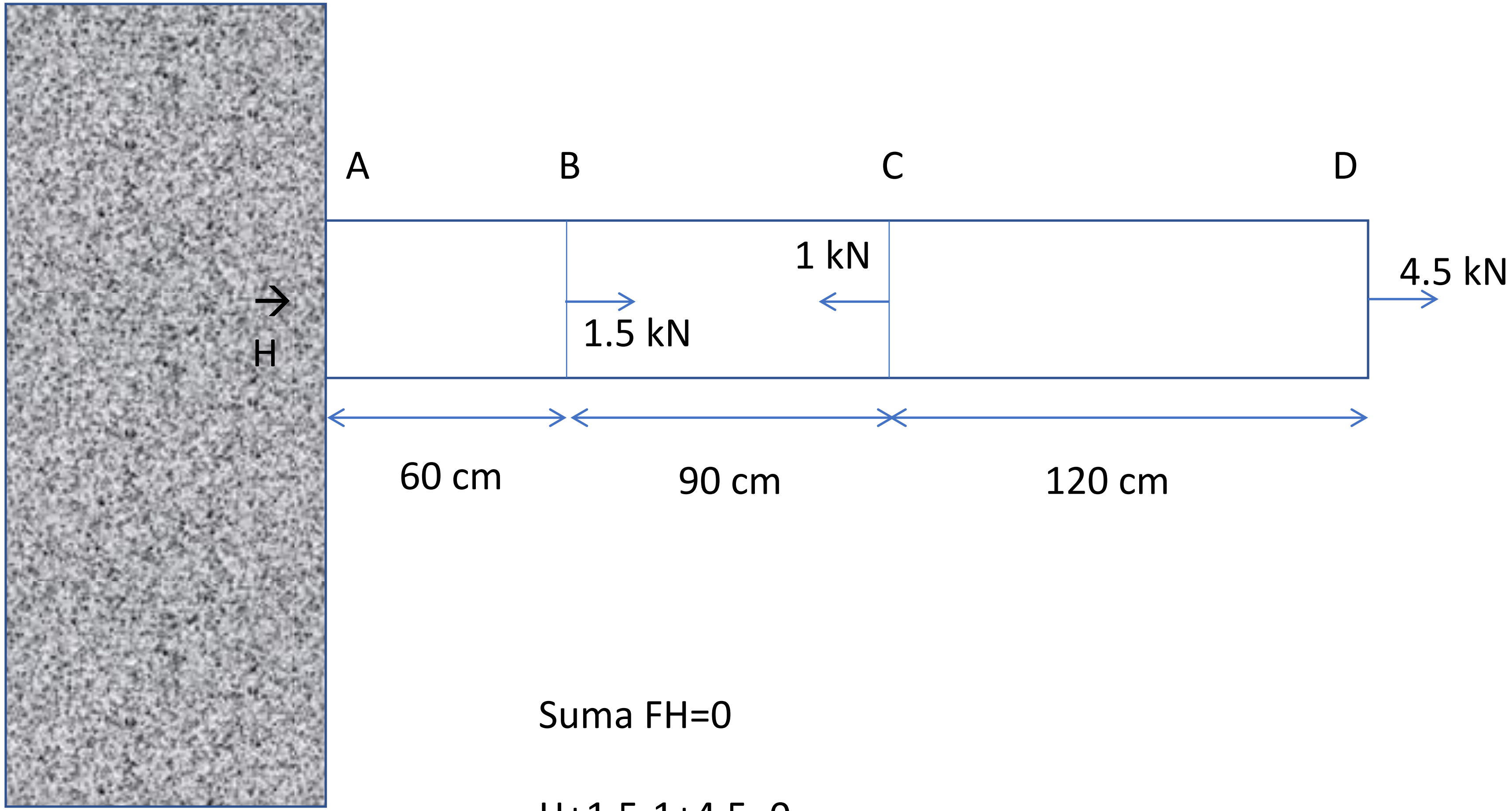
con A y E cte:

$$-q = \frac{dN}{dx} = AE\,\frac{d^2u}{dx^2}$$

Ejemplo



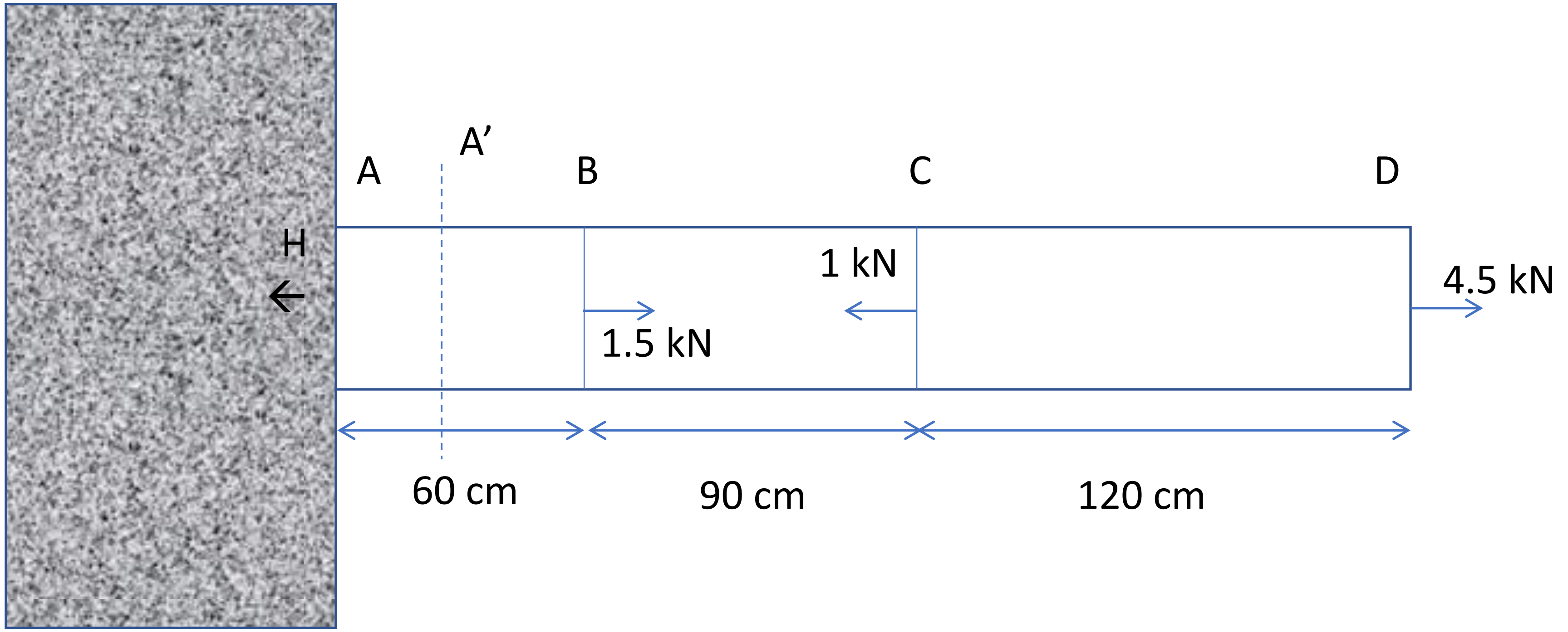
Ejemplo

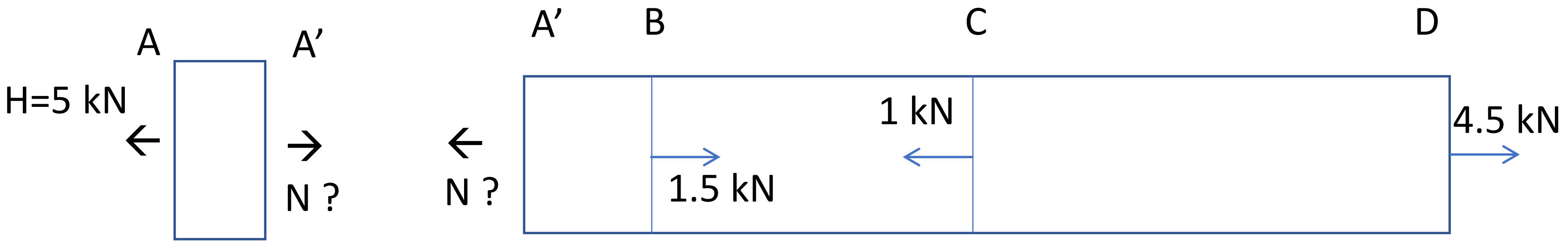


Suma FH=0

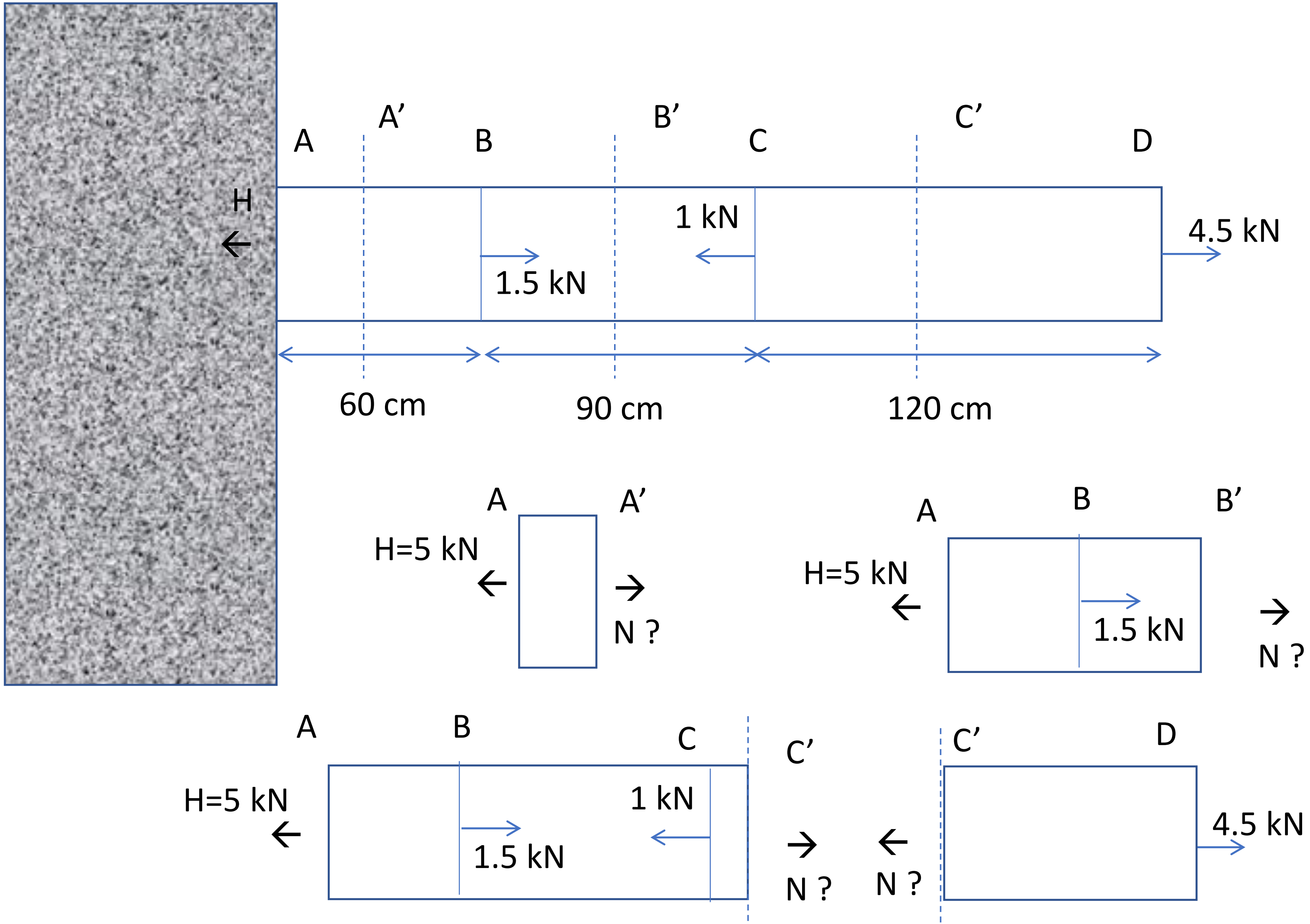
H+1.5-1+4.5=0
H= -5 kN

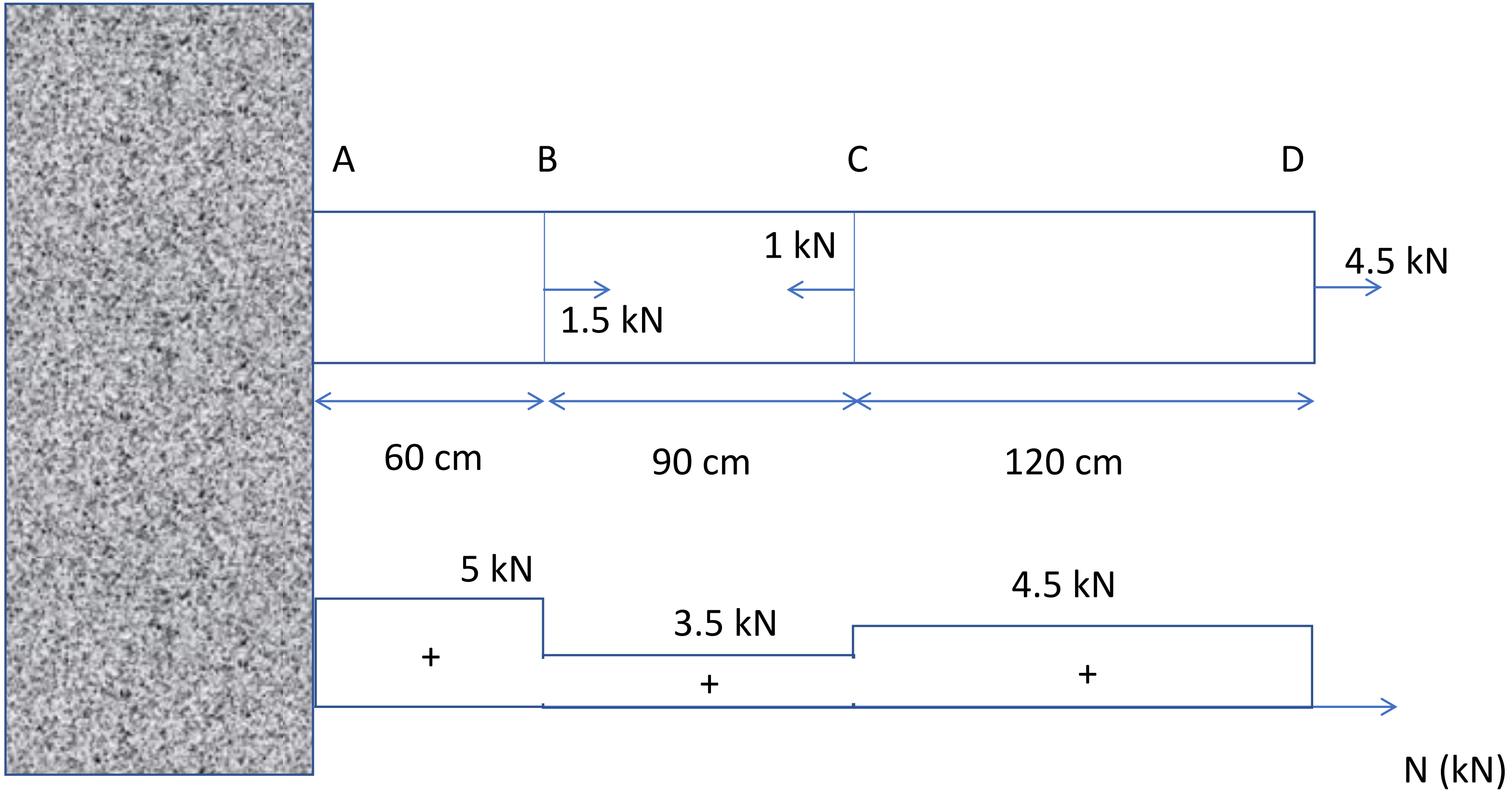
Ejemplo


A
A'
B
C
D
H
1 kN
1.5 kN
4.5 kN
60 cm
90 cm
120 cm

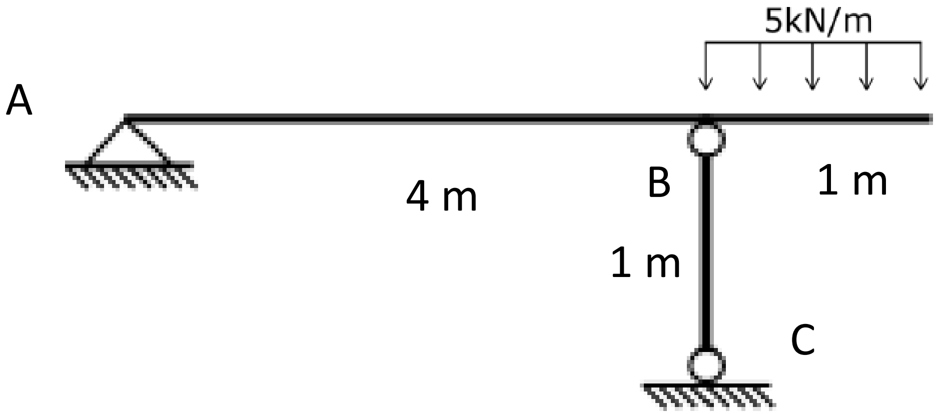

A
A'
H=5 kN
N ?
A'
B
C
D
1 kN
1.5 kN
N ?
4.5 kN

Ejemplo


A
A’
B
B’
C
C’
D
H
1 kN
1.5 kN
4.5 kN
60 cm
90 cm
120 cm
A
A’
H=5 kN
N ?
A
B
B’
H=5 kN
1.5 kN
N ?
A
B
C
C’
H=5 kN
1 kN
1.5 kN
N ?
N ?
C’
D
4.5 kN

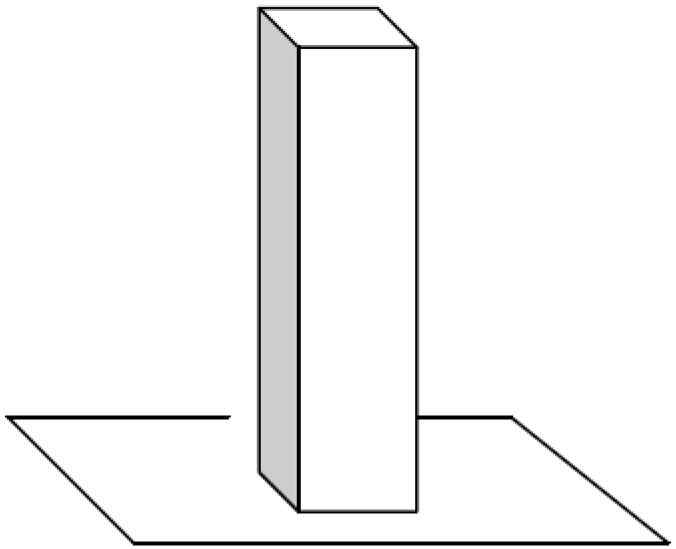

A
B
C
D
1 kN
4.5 kN
1.5 kN
60 cm
90 cm
120 cm
5 kN
4.5 kN
3.5 kN
+
+
+
N (kN)

Hallar el descenso de de la barra BC



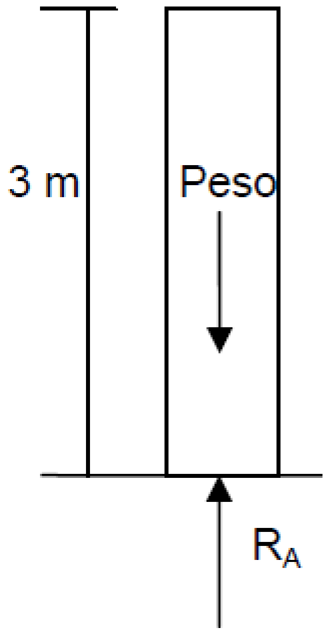
Calcular el incremento de longitud que tendrá un pilar de hormigón de 50 x 50 cm^2 de sección y de 3 m de longitud, que se encuentra apoyado en su base inferior, debido a su propio peso.

Datos: E= 25 GPa , γ(peso específico del hormigón)= 24 KN/m^3



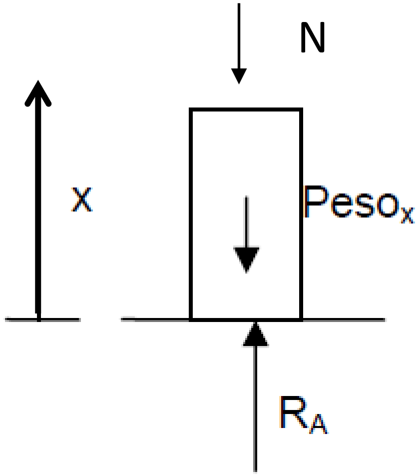
$$\gamma = 24\frac{kN}{m^3} = 24.10^3\,\frac{N}{m^3}$$

$$E = 25\,GPa = 25.10^9\ Pa = 25.10^9\,\frac{N}{m^2}$$



$$\sum F = 0 \qquad R_A = Peso$$

$$R_A = \gamma . V = 24.10^3 .(0,5.0,5.3) = 18000\ N$$

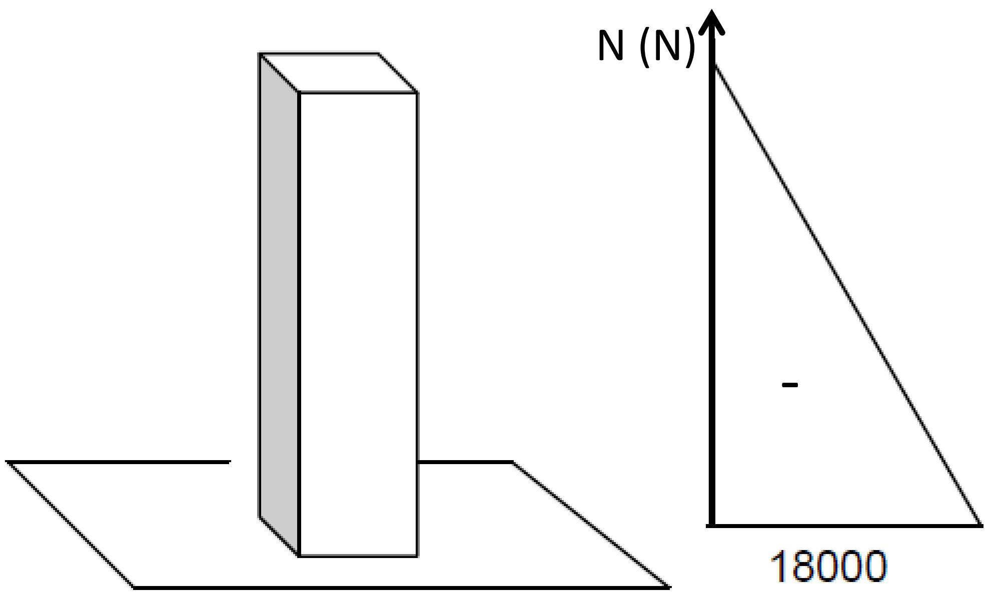


$$siendo\ \ N = f(x)$$

Suma Fv=0 → R_A-$Peso_x$-N=0 → N=R_A-$Peso_x$

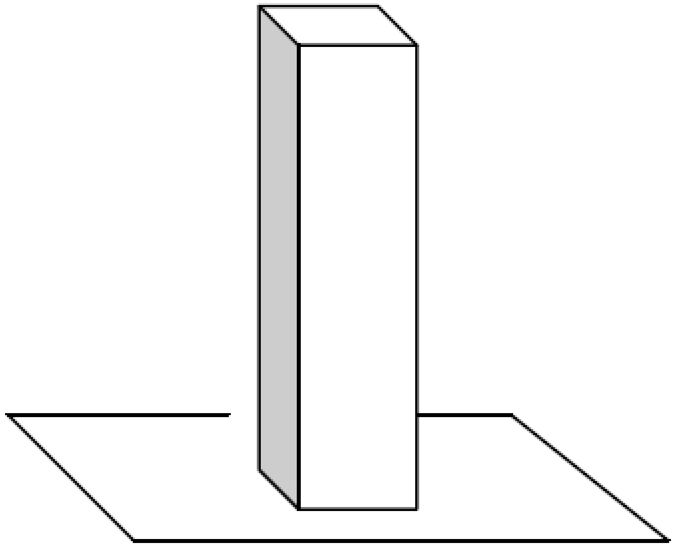
$$N = -18000 + 6000.x$$

$$x = 0 \rightarrow N = -18000\ N \qquad x = 3 \rightarrow N = 0$$



$$-q = \frac{dN}{dx} = AE\frac{d^2u}{dx^2}$$

Calcular el incremento de longitud que tendrá un pilar de hormigón de 50 x 50 cm^2 de sección y de 3 m de longitud, que se encuentra apoyado en su base inferior, debido a su propio peso.



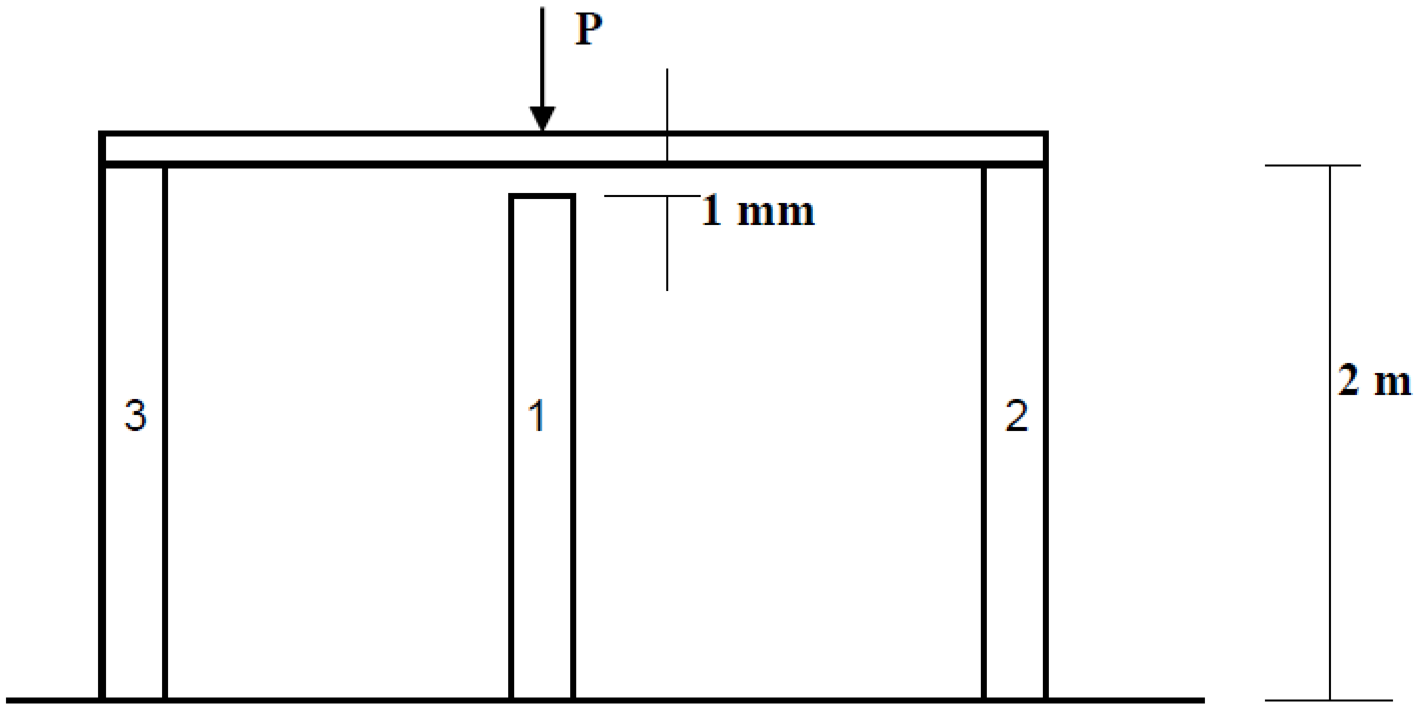
$$-q = \frac{dN}{dx} = AE\,\frac{d^2u}{dx^2}$$

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

$$\boxed{du = \frac{N.dx}{EA}}$$

$$\Delta L = \int_0^L \frac{N.dx}{E.A}$$

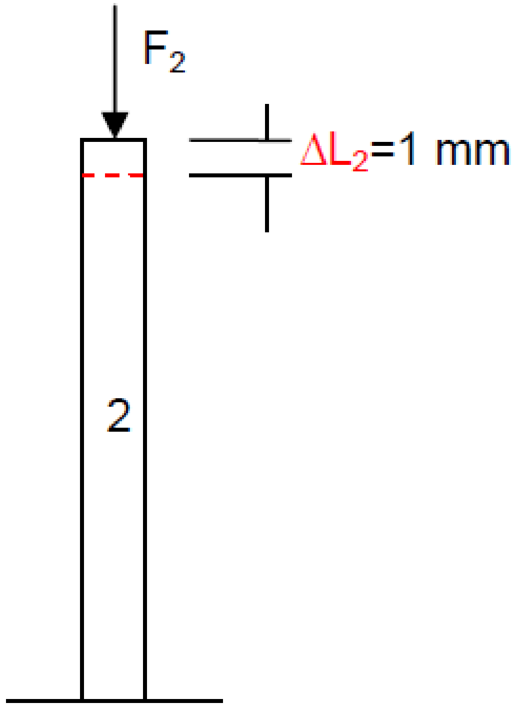
$$\Delta L = \int_0^3 \frac{(-18000 + 6000.x).dx}{25.10^9.(0{,}5.0{,}5)} = -432.10^{-8}\ m$$



E (hormigón) = 30 GPa

sección transversal cuadrada de 20x20 cm^2

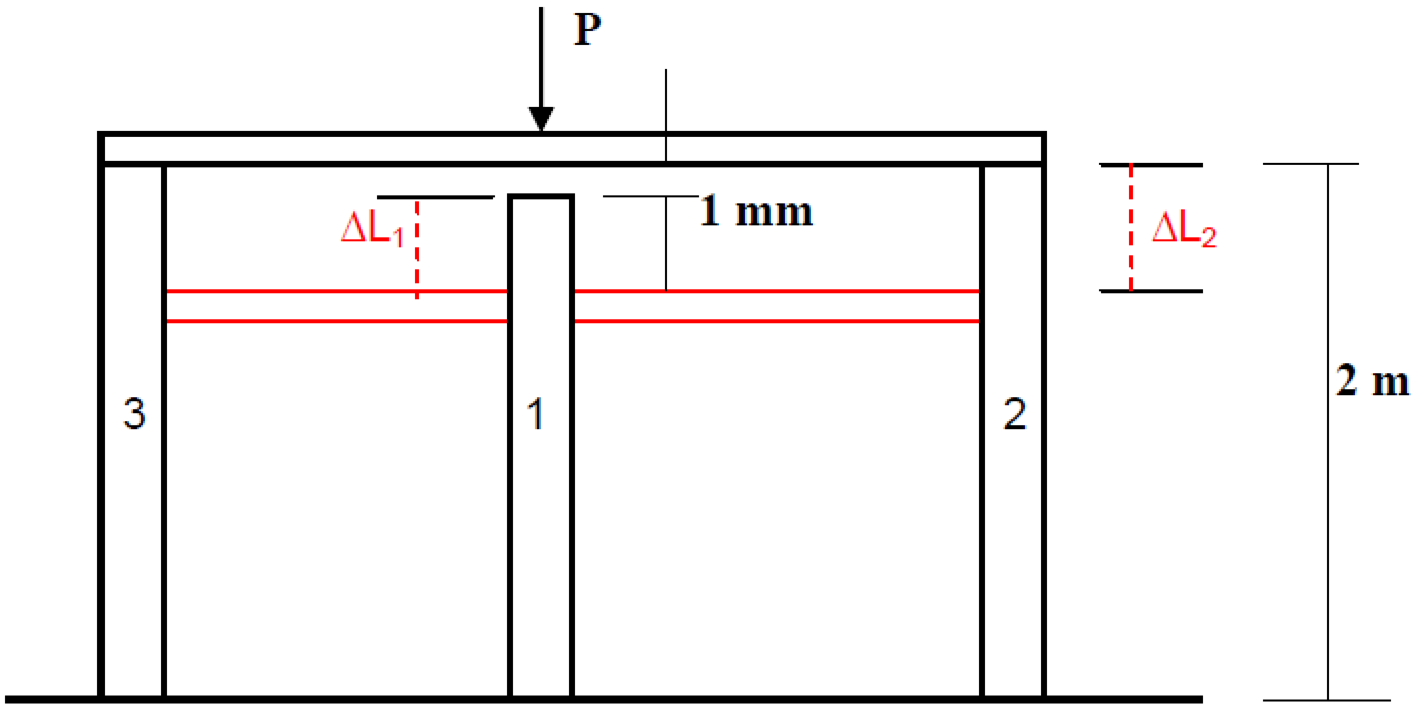
tensión máxima a la que podrá estar sometido el hormigón es de 18 MPa.



$$\Delta L_2 = \frac{F_2 . L_2}{E_2 . A_2} = 1\ mm$$

$$\frac{F_2 .2}{30.10^9 .20^2 .10^{-4}} = 0{,}001 \rightarrow F_2 = 600000\ N$$

$$\sigma_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{600000}{20^2 .10^{-4}} = 15000000\ Pa = 15\ MPa < 18\ MPa$$



$$\Delta L_1 + 1\ mm = \Delta L_2$$

$$\frac{F_1.L_1}{E_1.A_1} + 0{,}001\ m = \frac{F_2.L_2}{E_2.A_2}$$

$$\sigma_2 = \frac{F_2}{A_2} = 18\ MPa = 18000000\ Pa$$

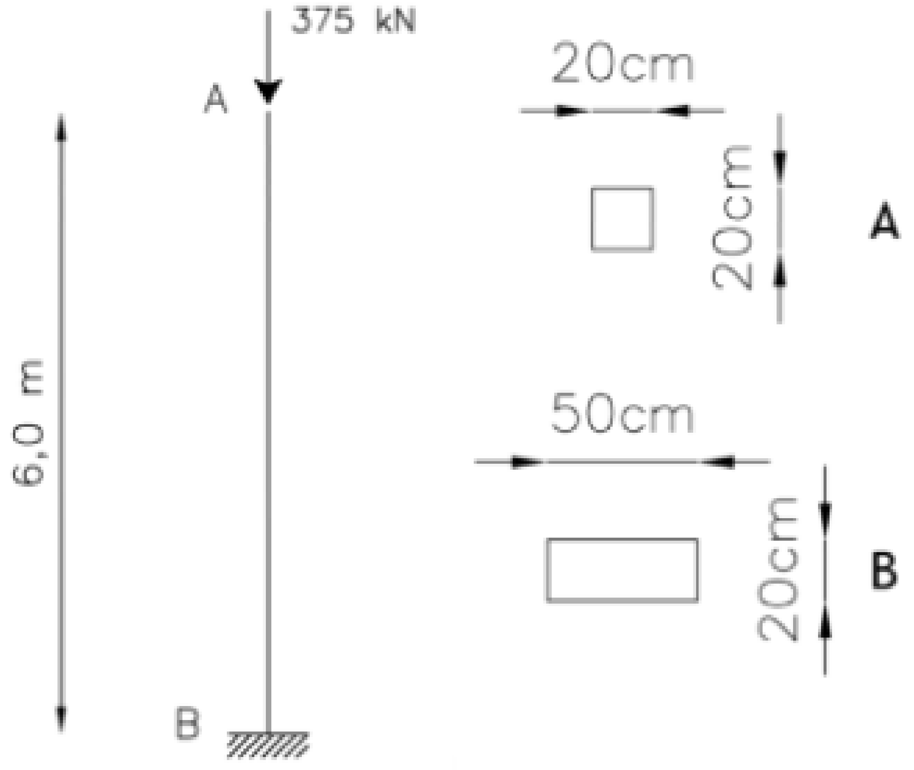
$$\rightarrow F_2 = 18000000.A_2 = 18000000.20^2.10^{-4} = 720000\ N$$

$$F_3 = F_2 = 720000\ N \quad F_1 = 120000\ N$$

$$\text{P} = 1560\ kN$$

Ejemplo 2: 1º Parcial 2017

- La sección varía de forma lineal
- Se toma $E = 30\ GPa$
- Se busca el desplazamiento del punto **A**



En este caso la directa es constante, pero el área es linealmente variable, por lo que queremos encontrar la expresión del área.

Colocando un eje z en B, considerando positivo hacia arriba.

$$A(z) = 0.20\ m\ \left(0.50\ m - 0.30\ m\,\frac{z}{6\ m}\right)$$

Calculamos entonces las deformaciones unitarias:

$$\varepsilon(z) = \frac{N}{EA(z)} = -\frac{375\ kN}{E\ 0.20\ m\left(0.50\ m - 0.30\ m\,\frac{z}{6\ m}\right)}$$

Recordando la definición de las deformaciones unitarias:

$$\varepsilon(z) = \frac{du}{dz}$$

Sabiendo que en el empotramiento el desplazamiento es nulo, $u(0) = 0$

$$\varepsilon(z) = \frac{du}{dz}$$

Sabiendo que en el empotramiento el desplazamiento es nulo, $u(0) = 0$

$$\delta_A = u(6m) = \int_0^{6m} -\frac{375kN}{E\,0.20m\left(0.50m - 0.30m\,\frac{z}{6m}\right)}dz$$

Vamos a utilizar:

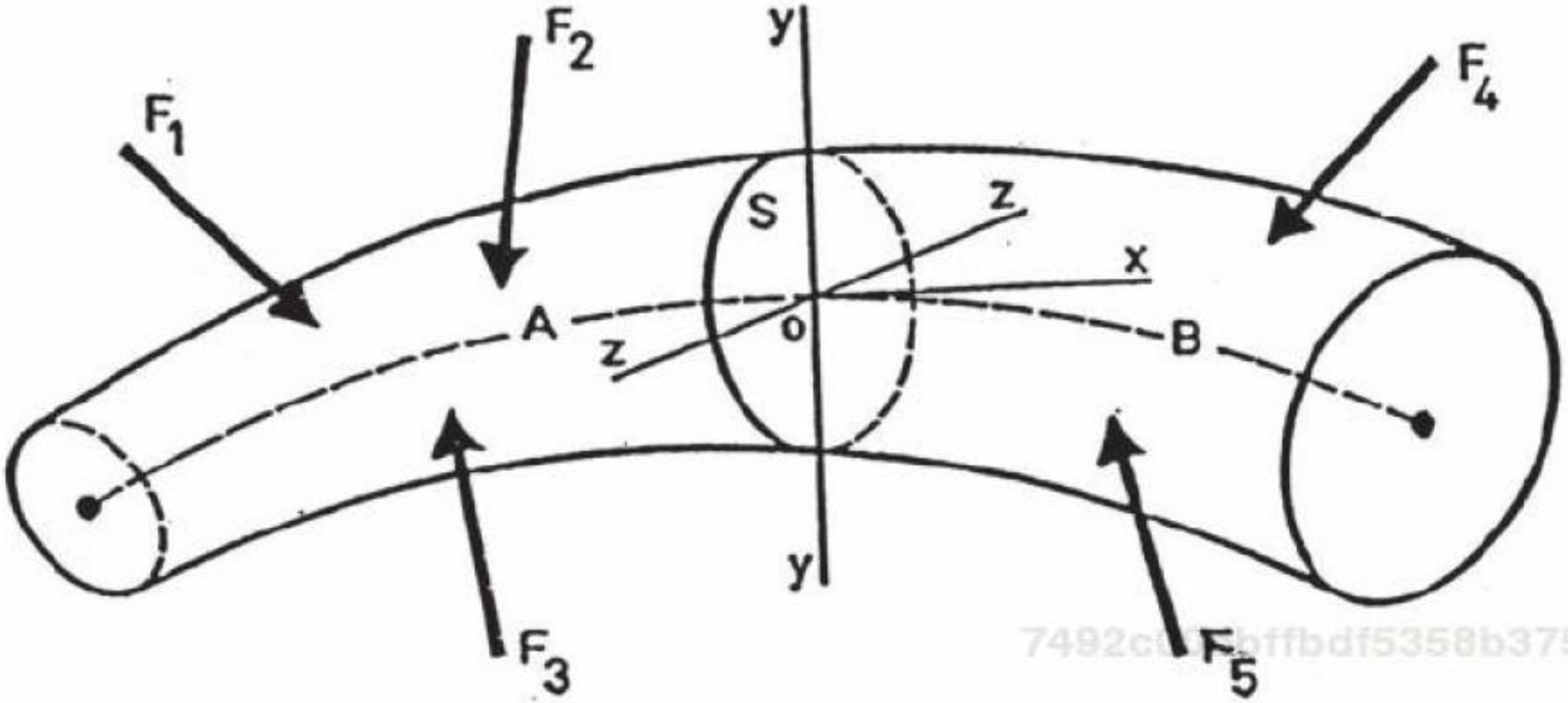
$$\int \frac{1}{a - bx} = -\frac{\log(a - bx)}{b} + C$$

Entonces:

$$\delta_A = -\frac{375kN}{30GPa\,0.20m}\int_0^{6m} \frac{1}{\left(0.50m - 0.30m\,\frac{z}{6m}\right)}dz = -\frac{375kN}{30GPa\,0.20m}18.33$$

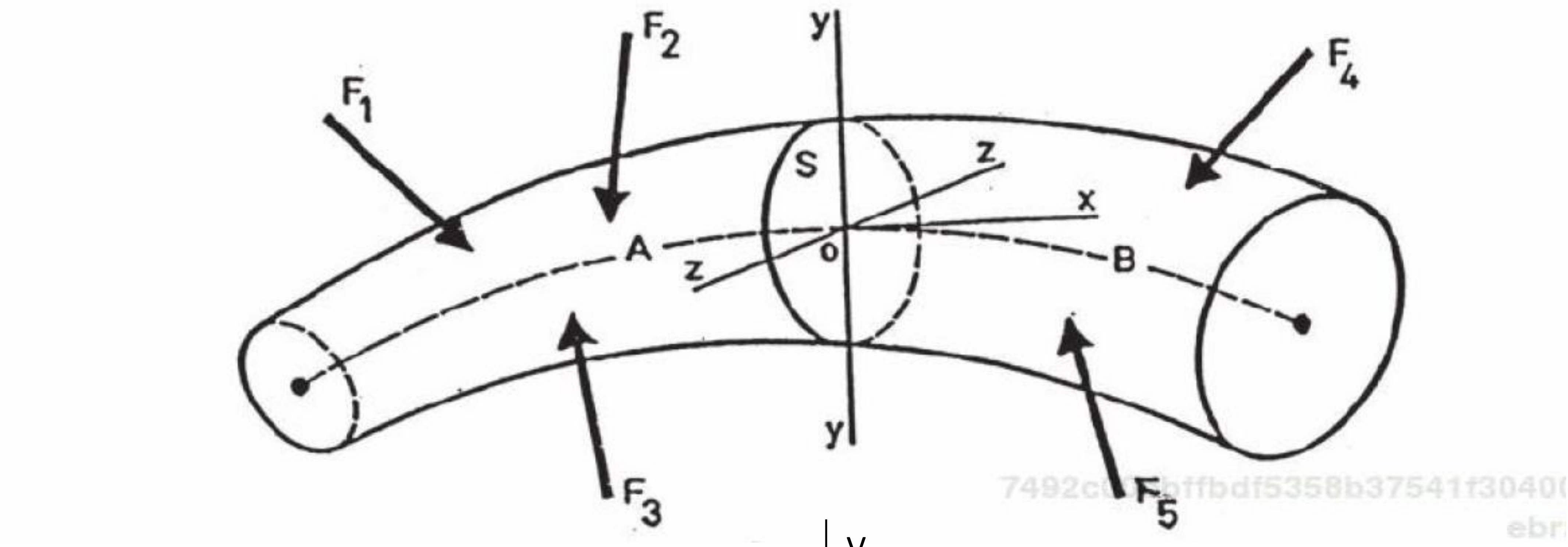
$$\delta_A = -1.15\;mm$$

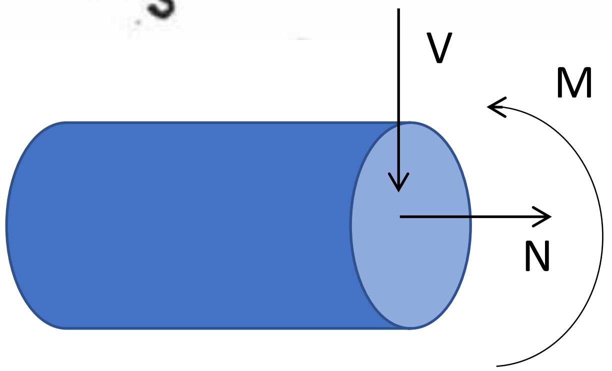
TENSIONES INTERNAS

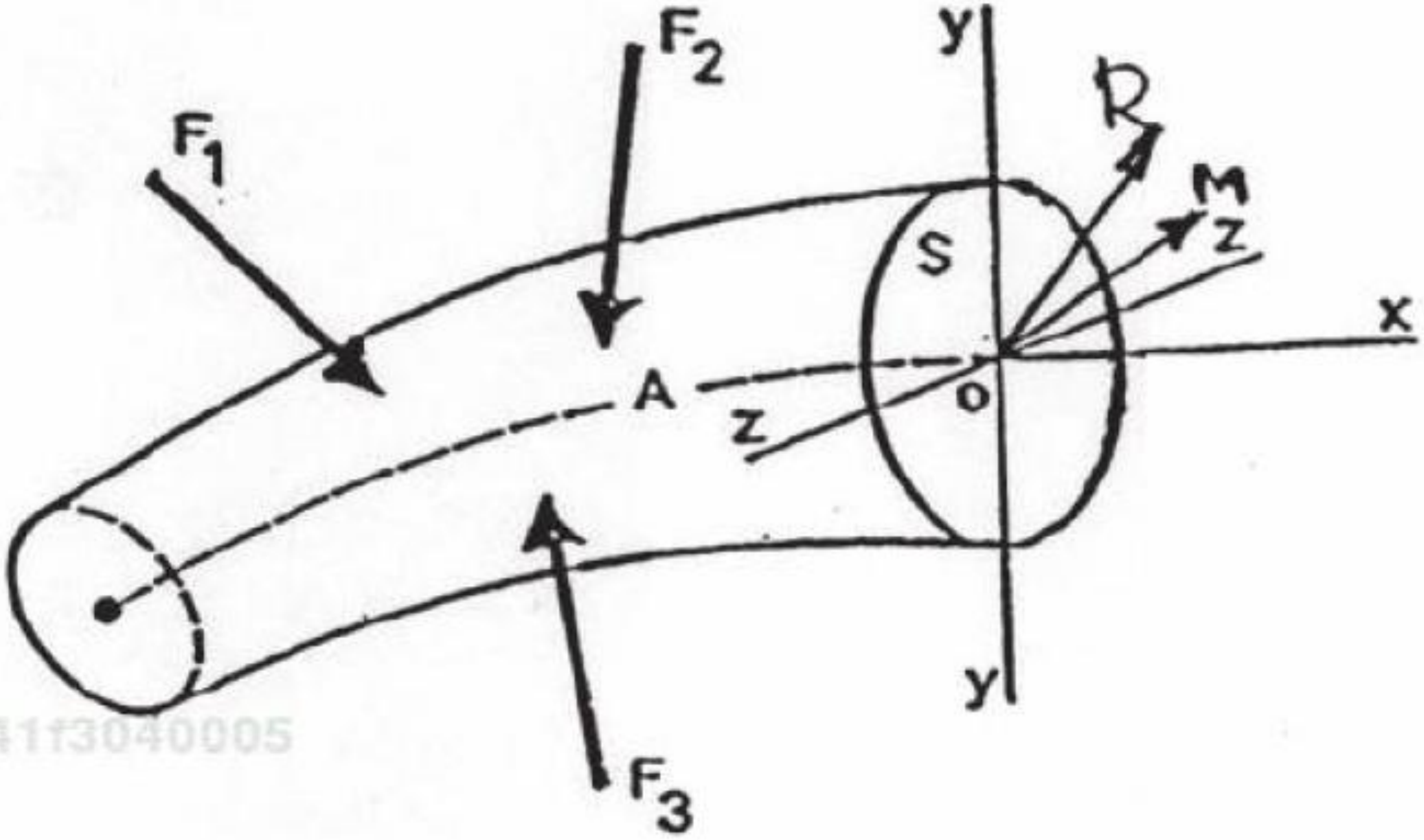


F_1
F_2
F_3
F_4
F_5
y
y
S
z
z
x
A
o
B

Tensiones internas



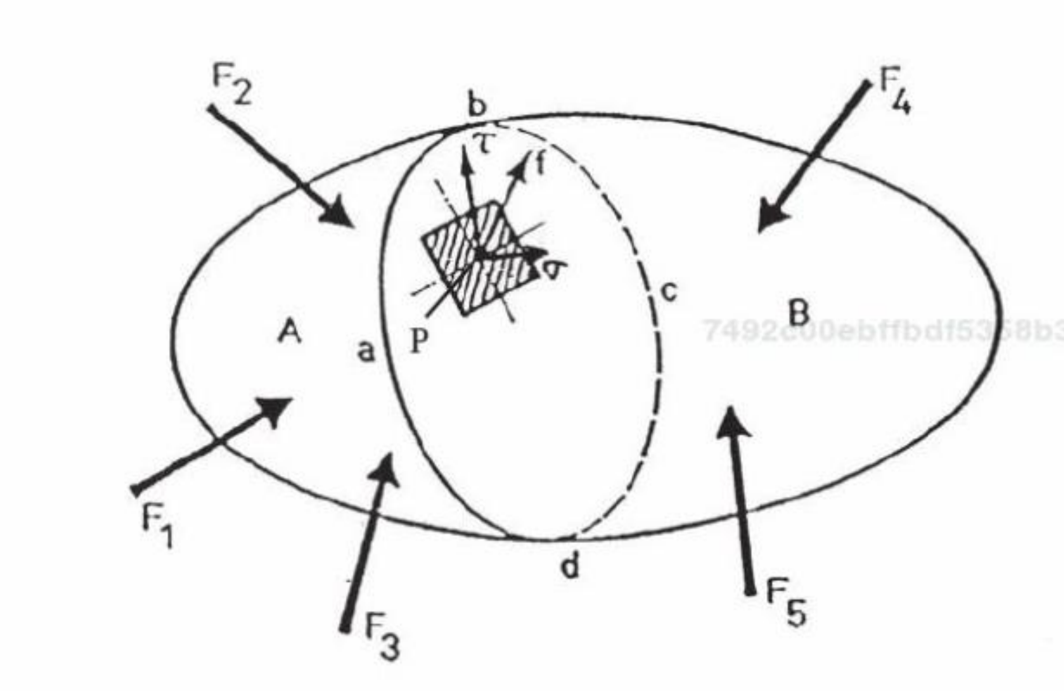



F1
F2
F3
y
R
M
z
S
x
A
o
z
y

Tensiones internas

Si de un cuerpo en equilibrio, aislamos ("cortamos") una parte, ésta también tiene que estar en equilibrio. Para ello, cómo ya vimos, aparecen fuerzas que llamamos solicitaciones (M, V, N).

En realidad, en el plano que cortamos (definido por la normal (***n***) a dicho plano) no hay sólo fuerzas en el baricentro de la sección, sino que cada trozo de área de la sección pueden estar bajo un esfuerzo.



Por lo tanto, para cada porción de la sección que nos tomemos (***ΔΩ***), habrá en general una fuerza (***F***) aplicada.

La definición de tensión se obtiene extendiendo el concepto anterior para una región infinitesimal de área. Por lo tanto:

La **tensión** (***f***) actuando en un punto ***P*** en un plano ***n*** dado **se define** como el límite:

$$\lim_{\Delta\Omega \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta \Omega} = f(P)$$

Tensiones internas

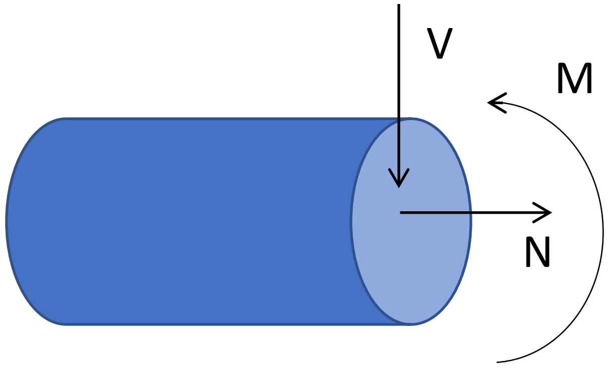
Para el análisis estructural, la tensión se divide en dos componentes.
Se denominan:

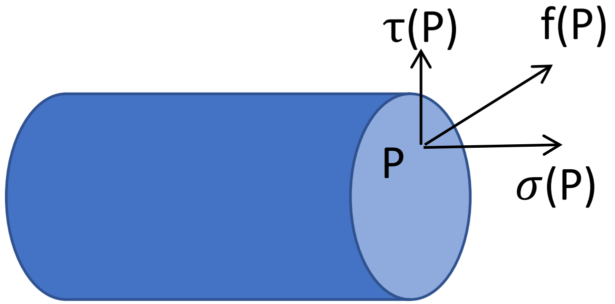
tensión normal a la componente de ***f*** normal al plano ***n***.
tensión rasante* a la componente de ***f*** tangencial al plano ***n***.

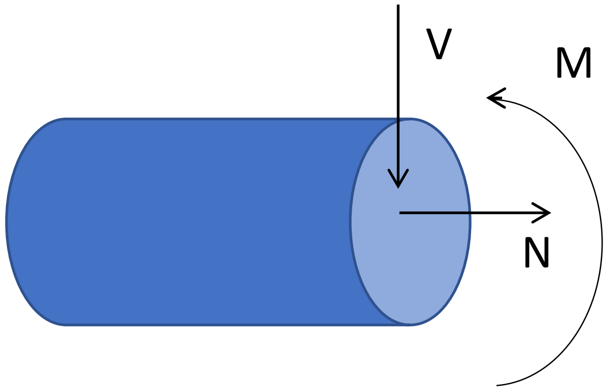
Dimensiones de las tensiones: $[F/L^2]$.
En el SI: N/m^2 = Pa (pascal).
Como un Pa es muy pequeño, en la práctica se utilizan sus múltiplos: kPa, MPa, GPa.

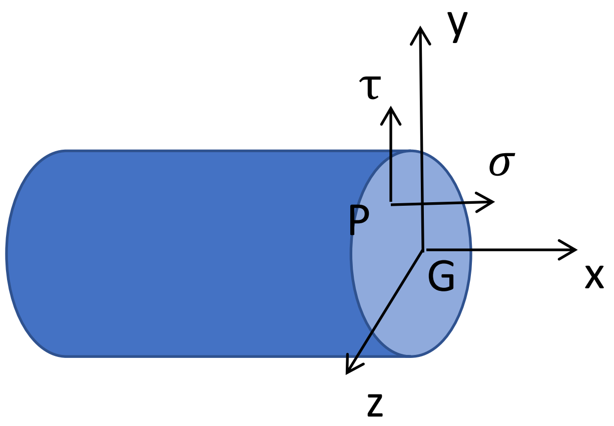
* En libros españoles a la tensión rasante se la denomina usualmente: *esfuerzo cortante*, o *tensión tangencial*, o *de cizalla*.

Tensiones internas









$$N = \int_{\Omega} \sigma \, d\Omega \qquad V = \int_{\Omega} -\tau \, d\Omega \qquad M = \int_{\Omega} -\sigma * y \, d\Omega$$

Ejemplo de tensión normal por directa